Zadatak 141 (Suncokret, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$.

Rješenje 141

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element $f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f: D \to K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f)=\left[0, +\infty\right\rangle.$$

Promatramo funkciju

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}.$$

Uočimo da iz $\sqrt{x}$ slijedi $x \geq 0$.

Funkcija

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$$

mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u skupu realnih brojeva pa je definirana samo ako je

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow 1-\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x}\geq -1 \Rightarrow -\sqrt{x}\geq -1 \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}\leq 1 \Rightarrow \sqrt{x}\leq 1 \;/^{2} \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 \leq 1^2 \Rightarrow x \leq 1.$$

Budući da mora biti $x \geq 0$ i $x \leq 1$, slijedi da je domena funkcije segment.

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D(f)=[0, 1].$$

Vježba 141

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x}}$.

Rezultat: $D(f)=[0, 4]$.

Zadatak 142 (Suncokret, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}$.

Rješenje 142

Ponovimo!

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a.$$

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element

$f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D \to K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f) = \left[\, 0, +\infty \right\rangle.$$

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je skup svih realni brojeva (interval realnih brojeva)

$$D(f) = \left\langle -\infty, +\infty \right\rangle.$$

Budući da funkcija

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}.$$

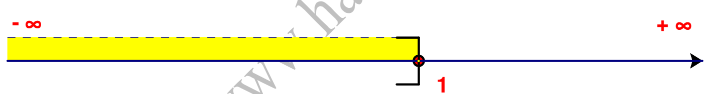
mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u skupu realnih brojeva, bit će definirana samo ako je

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x}} \Rightarrow 1 - \sqrt[3]{x} \ge 0 \Rightarrow -\sqrt[3]{x} \ge -1 \Rightarrow -\sqrt[3]{x} \ge -1 \; / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} \le 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} \le 1 \; /^{3} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \le 1^3 \Rightarrow x \le 1 \Rightarrow -\infty \le x \le 1 \Rightarrow x \in \left\langle -\infty, 1 \right].$$

Domena funkcije je segment.

$$-\infty \le x \le 1 \Rightarrow D(f) = \left\langle -\infty, 1 \right].$$



Vježba 142

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt[3]{x}}$.

Rezultat: $D(f) = \left\langle -\infty, 8 \right].$

Zadatak 143 (Suncokret, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x) = \sqrt{1 - \log x}$.

Rješenje 143

Ponovimo!

$$\log_{10} x = \log x \quad , \quad \log 10 = 1 \quad , \quad \log f(x) < \log g(x) \Rightarrow f(x) < g(x).$$

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element $f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D \to K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f) = [\, 0, +\infty \,\rangle.$$

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \log x$ je interval realnih brojeva

$$D(f) = \langle\, 0, +\infty \,\rangle.$$

Uočimo da iz $\log x$ slijedi x > 0.
Budući da funkcija

$$f(x) = \sqrt{1 - \log x}$$

mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u skupu realnih brojeva, bit će definirana samo ako je

$$f(x) = \sqrt{1 - \log x} \;\Rightarrow\; 1 - \log x \geq 0 \;\Rightarrow\; -\log x \geq -1 \;\Rightarrow\; -\log x \geq -1 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \log x \leq 1 \;\Rightarrow\; \log x \leq \log 10 \;\Rightarrow\; x \leq 10.$$

Budući da mora biti x > 0 i x ≤ 10, slijedi da je domena funkcije polusegment.

$$0 < x \leq 10 \;\Rightarrow\; D(f) = \langle\, 0, 10 \,].$$

Vježba 143

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x) = \sqrt{2 - \log x}$.

Rezultat: $D(f) = \langle\, 0, 100 \,]$.

Zadatak 144 (Suncokret, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$.

Rješenje 144

Ponovimo!

$$\log_e x = \ln x \quad , \quad \ln e = 1 \quad , \quad \ln f(x) < \ln g(x) \;\Rightarrow\; f(x) < g(x).$$

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element $f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D \to K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f) = [\, 0, +\infty \,\rangle.$$

Područje definicije (domena) funkcije $f(x) = \ln x$ je interval realnih brojeva

$$D(f) = \langle\, 0, +\infty \,\rangle.$$

Uočimo da iz $\ln x$ slijedi x > 0.
Budući da funkcija

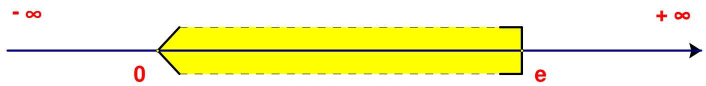
$$f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$$

mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u skupu realnih brojeva, bit će definirana samo ako je

$$f(x)=\sqrt{1-\ln x} \ \Rightarrow \ 1-\ln x \geq 0 \ \Rightarrow \ -\ln x \geq -1 \ \Rightarrow \ -\ln x \geq -1 \ / \cdot (-1) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \ln x \leq 1 \ \Rightarrow \ \ln x \leq \ln e \ \Rightarrow \ x \leq e.$$

Budući da mora biti $x > 0$ i $x \leq e$, slijedi da je domena funkcije polusegment.

$$0 < x \leq e \ \Rightarrow \ D(f)=\langle 0, e\,].$$



Vježba 144

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{2-\ln x}$.

Rezultat: $D(f)=\left\langle 0, e^{2}\right]$.

Zadatak 145 (Suncokret, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{1-10^{x}}$.

Rješenje 145

Ponovimo!

$$a^{0}=1 \quad , \quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \ \Rightarrow \ f(x) < g(x) \ , \ a > 1.$$

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element $f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D \rightarrow K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f)=[\,0, +\infty\rangle.$$

Budući da funkcija

$$f(x)=\sqrt{1-10^{x}}$$

mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u skupu realnih brojeva, bit će definirana samo ako je

$$f(x)=\sqrt{1-10^{x}} \ \Rightarrow \ 1-10^{x} \geq 0 \ \Rightarrow \ -10^{x} \geq -1 \ \Rightarrow \ -10^{x} \geq -1 \ / \cdot (-1) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ 10^{x} \leq 1 \ \Rightarrow \ 10^{x} \leq 10^{0} \ \Rightarrow \ x \leq 0.$$

Domena funkcije je polusegment.

$$-\infty \leq x \leq 0 \ \Rightarrow \ D(f)=\langle -\infty, 0\,].$$

Vježba 145

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{100-10^{x}}$.

Rezultat: $D(f)=\langle -\infty, 2\,]$.

Zadatak 146 (Suncokret, gimnazija)

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{1-e^{x}}$.

Rješenje 146

Ponovimo!

$$a^{0}=1 \quad , \quad a^{f(x)}<a^{g(x)} \;\Rightarrow\; f(x)<g(x) \;,\; a>1.$$

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x\in D$ pridružen točno jedan element $f(x)\in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D\rightarrow K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je polusegment realnih brojeva

$$D(f)=\left[\,0,+\infty\right\rangle.$$

Budući da funkcija

$$f(x)=\sqrt{1-e^{x}}$$

mora biti definirana na skupu realnih brojeva i primati vrijednosti u skupu realnih brojeva, bit će definirana samo ako je

$$f(x)=\sqrt{1-e^{x}} \;\Rightarrow\; 1-e^{x}\geq 0 \;\Rightarrow\; -e^{x}\geq -1 \;\Rightarrow\; -e^{x}\geq -1 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; e^{x}\leq 1 \;\Rightarrow\; e^{x}\leq e^{0} \;\Rightarrow\; x\leq 0.$$

Domena funkcije je polusegment.

$$-\infty\leq x\leq 0 \;\Rightarrow\; D(f)=\left\langle -\infty,\,0\right].$$

Vježba 146

Odredi područje definicije (domenu) funkcije $f(x)=\sqrt{e^{2}-e^{x}}$.

Rezultat: $D(f)=\left\langle -\infty,\,2\right].$

Zadatak 147 (Josip, gimnazija)

Odredite $h(x)=(f\circ g)(x)+f(4)$ ako je $f(x)=x\cdot(x-2)$, a $g(x)=2\cdot x-5$.

$A.\; h(x)=4\cdot x^{2}-4\cdot x+27$ $\qquad B.\; h(x)=2\cdot x^{2}-24\cdot x-27$

$C.\; h(x)=2\cdot x^{2}-4\cdot x-43$ $\qquad D.\; h(x)=4\cdot x^{2}-24\cdot x+43$

Rješenje 147

Ponovimo!

Kompozicija funkcija f i g

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

1.inačica

$$h(x)=(f\circ g)(x)+f(4) \;\Rightarrow\; h(x)=f(g(x))+f(4) \;\Rightarrow\; h(x)=f(g(x))+f(4) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=f(2\cdot x-5)+f(4) \Rightarrow h(x)=(2\cdot x-5)\cdot(2\cdot x-5-2)+4\cdot(4-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=(2\cdot x-5)\cdot(2\cdot x-7)+4\cdot 2 \Rightarrow h(x)=4\cdot x^2-14\cdot x-10\cdot x+35+8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=4\cdot x^2-24\cdot x+43.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$h(x)=(f\circ g)(x)+f(4) \Rightarrow h(x)=f(g(x))+f(4) \Rightarrow h(x)=f(g(x))+f(4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=g(x)\cdot(g(x)-2)+f(4) \Rightarrow h(x)=(2\cdot x-5)\cdot(2\cdot x-5-2)+4\cdot(4-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=(2\cdot x-5)\cdot(2\cdot x-7)+4\cdot 2 \Rightarrow h(x)=4\cdot x^2-14\cdot x-10\cdot x+35+8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=4\cdot x^2-24\cdot x+43.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 147

Odredite $h(x)=(f\circ g)(x)+f(2)$ ako je $f(x)=x\cdot(x-2)$, a $g(x)=2\cdot x-5$.

$A.\ h(x)=4\cdot x^2-4\cdot x+35 \qquad B.\ h(x)=2\cdot x^2-24\cdot x-35$

$C.\ h(x)=2\cdot x^2+4\cdot x+35 \qquad D.\ h(x)=4\cdot x^2+4\cdot x+53$

Rezultat: A.

Zadatak 148 (Branka, gimnazija)

Za zadane funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$ i $g(x)=\sin x$ odredi $(f\circ g)\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$A.\ 2 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -2$

Rješenje 148

Ponovimo!

$$\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Kompozicija funkcija f i g

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

1.inačica

$$(f\circ g)\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=f\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=f(1)=\frac{1}{1}=1.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$(f\circ g)\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=f\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1}=1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 148

Za zadane funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$ i $g(x)=\sin x$ odredi $(f\circ g)\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$A.\ 2 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -2$

Rezultat: A.

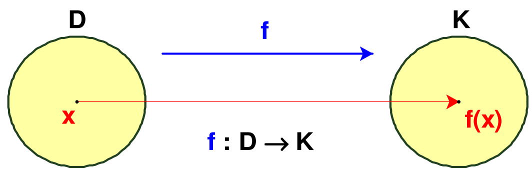
Zadatak 149 (Mira, gimnazija)

Odredite domenu funkcije $f(x)=\sqrt{x+2}$. Rješenje zapišite pomoću intervala.

Rješenje 149

Ponovimo!

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup, ulazni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup, izlazni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Područje definicije funkcije (domena) $f(x)=\sqrt{x}$ je $x \geq 0$ ili $x \in \left[0, +\infty\right\rangle$.

Vrijedi da je

$$f(x)=\sqrt{x+2},$$

realan broj ako je radikand (izraz pod korijenom) veći ili jednak nuli. Ako je radikand negativan, tada je drugi korijen imaginaran broj. Dakle, prirodna domena funkcije f dobije se iz nejednadžbe:

$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D(f)=\left[-2, +\infty\right\rangle$$

Vježba 149

Odredite domenu funkcije $f(x)=\sqrt{x+5}$. Rješenje zapišite pomoću intervala.

Rezultat: $D(f)=\left[-5, +\infty\right\rangle$.

Zadatak 150 (Ante, srednja škola)

Odredi nultočku funkcije f(x) = 5 · x – 15.

Rješenje 150

Ponovimo!

Broj x_0 nazivamo nultočkom funkcije f ako je $f(x_0) = 0$. Graf funkcije f u točki $(x_0, 0)$ siječe x – os.

Računamo nultočku zadane funkcije.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=5\cdot x-15 \\ f(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{za neki } x \text{ vrijednost} \\ \text{funkcije jednaka je } 0 \end{array}\right] \Rightarrow 5\cdot x-15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot x=15 \Rightarrow 5\cdot x=15 \;/:5 \Rightarrow x=3.$$

Vježba 150

Odredi nultočku funkcije f(x) = 4 · x + 12.

Rezultat: – 3.

Zadatak 151 (Ante, srednja škola)

Odredi parametar a u funkciji f(x) = a · x + 5, ako je f(–1) = 4.

Rješenje 151

Ponovimo!

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Računamo parametar a u zadanoj funkciji.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x+5 \\ f(-1)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x+5 \\ f(-1)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{za } x=-1 \text{ vrijednost} \\ \text{funkcije jednaka je } 4 \end{array}\right] \Rightarrow a\cdot(-1)+5=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a+5=4 \Rightarrow -a=4-5 \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow -a=-1 \;/\cdot(-1) \Rightarrow a=1.$$

Vježba 151

Odredi parametar a u funkciji f(x) = a · x + 5, ako je f(–2) = 4.

Rezultat: $\frac{1}{2}.$

Zadatak 152 (Ante, srednja škola)

Odredi parametar b u funkciji f(x) = 2 · x + b, ako je f(–2) = 7.

Rješenje 152

Ponovimo!

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Računamo parametar b u zadanoj funkciji.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x+b \\ f(-2)=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x+b \\ f(-2)=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{za } x=-2 \text{ vrijednost} \\ \text{funkcije jednaka je } 7 \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot(-2)+b=7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4+b=7 \Rightarrow b=7+4 \Rightarrow b=11.$$

Vježba 152

Odredi parametar b u funkciji f(x) = 2 · x + b, ako je f(–1) = 8.

Rezultat: 10.

Zadatak 153 (Tonka, srednja škola)

Graf funkcije f(x) = 2 · x – 4 siječe os apscisa u točki A, a os ordinata u točki B. Koje su koordinate točaka A i B?

$$A.\ A(2,0),\ B(0,-4) \qquad B.\ A(0,2),\ B(-4,0)$$
$$C.\ A(-4,0),\ B(0,2) \qquad D.\ A(0,-4),\ B(2,0)$$

Rješenje 153

Ponovimo!

Ako graf funkcije y = f(x) siječe os apscisa koordinate presječne točke su A(x, 0), tj. ordinata presječne točke je y = 0.

Ako graf funkcije y = f(x) siječe os ordinata koordinate presječne točke su B(0, y), tj. apscisa presječne točke je x = 0.

Ako je zadana funkcija $f(x) = 2 \cdot x - 4,$ njezin graf glasi: $y = 2 \cdot x - 4.$

Graf funkcije f(x) = 2 · x – 4 siječe os apscisa u točki A pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \cdot x - 4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot x - 4 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x = 4 \Rightarrow 2 \cdot x = 4 \; / : 2 \Rightarrow x = 2.$$

Koordinate točke A su: $A(2,\ 0).$

Graf funkcije f(x) = 2 · x – 4 siječe os ordinata u točki B pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \cdot x - 4 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow y = 2 \cdot 0 - 4 \Rightarrow y = 0 - 4 \Rightarrow y = -4.$$

Koordinate točke B su: $B(0,\ -4).$

Odgovor je pod A.

Vježba 153

Graf funkcije f(x) = 2 · x + 4 siječe os apscisa u točki A, a os ordinata u točki B. Koje su koordinate točaka A i B?

$$A.\ A(2,\ 0),\ B(0,\ -4) \qquad B.\ A(0,\ 2),\ B(-4,\ 0)$$
$$C.\ A(-2,\ 0),\ B(0,\ 4) \qquad D.\ A(0,\ -4),\ B(2,\ 0)$$

Rezultat: C.

Zadatak 154 (Viky, gimnazija)

Neka je $f\left(\frac{2 \cdot x - 1}{x}\right) = x.$ Odredite $f(4).$

Rješenje 154

Ponovimo!

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Najprije odredimo funkciju f. Pomoću zamjene (supstitucije) dobije se:

$$t = \frac{2 \cdot x - 1}{x} \Rightarrow t = \frac{2 \cdot x - 1}{x} \; / \cdot x \Rightarrow x \cdot t = 2 \cdot x - 1 \Rightarrow x \cdot t - 2 \cdot x = -1 \Rightarrow x \cdot (t - 2) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (t - 2) = -1 \; / \cdot \frac{1}{t - 2} \Rightarrow x = \frac{-1}{t - 2} \Rightarrow x = \frac{1}{-(t - 2)} \Rightarrow x = \frac{1}{2 - t}.$$

Tražena funkcija glasi:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{2 \cdot x - 1}{x}\right) = x \\ t = \frac{2 \cdot x - 1}{x} \\ x = \frac{1}{2 - t} \end{array}\right\} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2 - t} \text{ ili } f(x) = \frac{1}{2 - x}.$$

Računamo f(4).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{2-x} \\ x=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(4)=\frac{1}{2-4} \Rightarrow f(4)=\frac{1}{-2} \Rightarrow f(4)=-\frac{1}{2}.$$

Vježba 154

Neka je $f\left(\dfrac{2\cdot x-1}{x}\right)=x.$ Odredite $f(1).$

Rezultat: 1.

Zadatak 155 (Ivona, gimnazija)

Zadana je funkcija $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2$. Odredite nultočke funkcije i koordinate točke T grafa kojoj je apscisa 1.

Rješenje 155

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Nultočka polinoma

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ \dots\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$$

je svaki kompleksni broj x_0 za koji je

$$f(x_0)=0.$$

Ako je x_0 realan broj, onda se x_0 zove realna nultočka, a ako je x_0 kompleksan broj onda se x_0 zove kompleksna nultočka.

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Računamo nultočke zadane funkcije.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3\cdot x^2 \\ f(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3\cdot x^2=0 \Rightarrow x^2\cdot(x-3)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2=0 \\ x-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2=0 \ /\sqrt{\ } \\ x-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_{1,2}=0 \\ x_3=3 \end{array}\right\}. \text{ tri nultočke, nula je dvostruka nultočka}$$

Ako je zadana funkcija

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2,$$

njezin graf glasi:

$$y = x^3 - 3 \cdot x^2.$$

Budući da točka T pripada tom grafu, njezine koordinate uvrstit ćemo u formulu.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(1,\ y) \\ y=x^3-3\cdot x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y=1^3-3\cdot 1^2 \Rightarrow y=1-3\cdot 1 \Rightarrow y=1-3 \Rightarrow y=-2.$$

Točka T ima koordinate:

$$T(x,\ y)=T(1,\ -2).$$

Vježba 155

Zadana je funkcija $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2$. Odredite koordinate točke T grafa kojoj je apscisa 2.

Rezultat: $T(2, -4).$

Zadatak 156 (Nina, gimnazija)

Koja od sljedećih jednadžbi ima rješenje u skupu prirodnih brojeva?

$$A.\ (x+2)\cdot(x+5)=0 \qquad B.\ |2\cdot x-3|=2 \qquad C.\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x+3}=\frac{1}{4} \qquad D.\ \log(x-3)=1$$

Rješenje 156

Ponovimo!

Prirodnim brojevima zovemo pozitivne cijele brojeve. Skup prirodnih brojeva označavamo velikim slovom N.

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \ldots\}.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \ \Leftrightarrow\ a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x|=a\ ,\ a>0 \ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=a \\ x_2=-a \end{array}\right\}.$$

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \ \Rightarrow\ f(x)=g(x).$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^{c} \ \xrightarrow{} \qquad a=b^{c}$$

$$\log_{10} x=\log x \quad , \quad \log 10=1 \quad , \quad \log f(x)=\log g(x) \ \Rightarrow\ f(x)=g(x).$$

A.

$$(x+2)\cdot(x+5)=0 \ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2=0 \\ x+5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=-5 \end{array}\right\}.$$

Rješenja nisu prirodni brojevi.

B.

$$|2\cdot x-3|=2 \ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x-3=2 \\ 2\cdot x-3=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x=2+3 \\ 2\cdot x=-2+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x=5 \\ 2\cdot x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x=5\ /:2 \\ 2\cdot x=1\ /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{5}{2} \\ x_2=\frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Rješenja nisu prirodni brojevi.

C.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x+3}=\frac{1}{4}\;\Rightarrow\;\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x+3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\;\Rightarrow\;2\cdot x+3=2\;\Rightarrow\;2\cdot x=2-3\;\Rightarrow\;2\cdot x=-1\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot x=-1\;/:2\;\Rightarrow\;x=-\frac{1}{2}.$$

Rješenje nije prirodan broj.

D.

$$\log(x-3)=1\;\Rightarrow\;\begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ x-3>0\\ x>3\end{bmatrix}\;\Rightarrow\;\log(x-3)=\log 10\;\Rightarrow\;x-3=10\;\Rightarrow\;x=10+3\;\Rightarrow\;x=13.$$

Rješenje je prirodan broj. Odgovor je pod D.

Vježba 156

Koja od sljedećih jednadžbi ima rješenje u skupu prirodnih brojeva?

$A.\;(x+2)\cdot(x+5)=0$ $\qquad B.\;|2\cdot x-3|=2$ $\qquad C.\;\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x+3}=\frac{1}{4}$ $\qquad D.\;\log(x-3)=1$

Rezultat: D.

Zadatak 157 (Nina, gimnazija)

Za zadane funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$ i $g(x)=\sin x$ odredi $(f\circ g)\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$A.\;0$ $\qquad B.\;-1$ $\qquad C.\;1$ $\qquad D.\;2$

Rješenje 157

Ponovimo!

Za kompoziciju funkcija f i g vrijedi:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Uoči da vrijedi (☺):

$$f(x)=\frac{1}{x}\;\Rightarrow\;f(\blacklozenge)=\frac{1}{\blacklozenge} \quad , \quad g(x)=\sin x\;\Rightarrow\;g(\blacklozenge)=\sin\blacklozenge.$$

1.inačica

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=f(\sin x)=f(\sin x)=\frac{1}{\sin x}=\left[x=\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1}=1.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\sin x}=\left[x=\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1}=1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 157

Koja od sljedećih jednadžbi ima rješenje u skupu prirodnih brojeva?

$A.\;(x-2)\cdot(x-5)=0$ $\qquad B.\;|2\cdot x-3|=2$ $\qquad C.\;\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot x+3}=\frac{1}{8}$ $\qquad D.\;\log(x+50)=1$

Rezultat: A.

Zadatak 158 (Ivan, gimnazija)

$$\text{Ako je } f(x)=\frac{2\cdot x}{3\cdot x+4} \text{ i } f(g(x))=x, \text{ tada je } g(x) \text{ jednako:}$$

$$A.\ \frac{3\cdot x+4}{2\cdot x} \qquad B.\ \frac{3\cdot x}{2\cdot x+4} \qquad C.\ \frac{2\cdot x+4}{4\cdot x} \qquad D.\ \frac{4\cdot x}{2-3\cdot x}$$

Rješenje 158

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za kompoziciju funkcija f i g vrijedi:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Uoči da vrijedi (☺):

$$f(x)=\frac{2\cdot x}{3\cdot x+4} \Rightarrow f(\blacklozenge)=\frac{2\cdot\blacklozenge}{3\cdot\blacklozenge+4}.$$

$$f(g(x))=x \Rightarrow f(g(x))=x \Rightarrow \frac{2\cdot g(x)}{3\cdot g(x)+4}=x \Rightarrow \frac{2\cdot g(x)}{3\cdot g(x)+4}=x \ /\cdot(3\cdot g(x)+4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot g(x)=x\cdot(3\cdot g(x)+4) \Rightarrow 2\cdot g(x)=3\cdot x\cdot g(x)+4\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot g(x)-3\cdot x\cdot g(x)=4\cdot x \Rightarrow g(x)\cdot(2-3\cdot x)=4\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x)\cdot(2-3\cdot x)=4\cdot x \ /\cdot\frac{1}{2-3\cdot x} \Rightarrow g(x)=\frac{4\cdot x}{2-3\cdot x}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 158

$$\text{Ako je } f(x)=\frac{2\cdot x}{3\cdot x+4} \text{ i } f(g(x))=1, \text{ tada je } g(x) \text{ jednako:}$$

$$A.\ 4 \qquad B.\ -4 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -1$$

Rezultat: B.

Zadatak 159 (MKN, gimnazija)

Zadane su funkcije $f(x)=2\cdot x$ i $g(x)=\log_5 x$. Riješite jednadžbu $(f\circ g)(x)=7$.

Rješenje 159

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

Za kompoziciju funkcija f i g vrijedi:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Definicija logaritma:

$$\log_b a=c \ , \ b>0 \ , \ b\neq 1 \ , \ a>0 \Leftrightarrow b^c=a.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=\underset{\rightarrow}{b^c} \qquad a=b^c$$

Uoči da vrijedi (☺):

$$f(x)=2\cdot x \Rightarrow f(\blacklozenge)=2\cdot\blacklozenge \quad , \quad g(x)=\log_5 x \Rightarrow g(\blacklozenge)=\log_5 \blacklozenge.$$

1.inačica

$$(f\circ g)(x)=7 \Rightarrow f(g(x))=7 \Rightarrow f(g(x))=7 \Rightarrow f(\log_5 x)=7 \Rightarrow f(\log_5 x)=7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\log_5 x=7 \Rightarrow 2\cdot\log_5 x=7 \;/:2 \Rightarrow \log_5 x=\frac{7}{2} \Rightarrow x=5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow x=\sqrt{5^7} \Rightarrow x=279.508.$$

2.inačica

$$(f\circ g)(x)=7 \Rightarrow f(g(x))=7 \Rightarrow f(g(x))=7 \Rightarrow 2\cdot g(x)=7 \Rightarrow 2\cdot g(x)=7 \;/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{7}{2} \Rightarrow g(x)=\frac{7}{2} \Rightarrow \log_5 x=\frac{7}{2} \Rightarrow x=5^{\frac{7}{2}} \Rightarrow x=\sqrt{5^7} \Rightarrow x=279.508.$$

Vježba 159

Zadane su funkcije $f(x)=7\cdot x$ i $g(x)=\log_5 x$. Riješite jednadžbu $(f\circ g)(x)=7$.

Rezultat: x = 5.

Zadatak 160 (DNK, medicinska škola)

Ako je $f(x)=x^2+2\cdot x+3$, onda je $\frac{f(x+1)-f(x-1)}{4}$ jednako:

$A.\ 2\cdot x+1 \qquad B.\ x+1 \qquad C.\ x-1 \qquad D.\ x+2$

Rješenje 160

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Uoči da vrijedi (☺):

$$f(x)=x^2+2\cdot x+3 \Rightarrow f(\blacklozenge)=\blacklozenge^2+2\cdot\blacklozenge+3.$$

$$\frac{f(x+1)-f(x-1)}{4}=\left[f(x)=x^2+2\cdot x+3\right]=\frac{\left[(x+1)^2+2\cdot(x+1)+3\right]-\left[(x-1)^2+2\cdot(x-1)+3\right]}{4}=$$

$$=\frac{\left[x^2+2\cdot x+1+2\cdot x+2+3\right]-\left[x^2-2\cdot x+1+2\cdot x-2+3\right]}{4}=$$

$$=\frac{\left[x^2+4\cdot x+6\right]-\left[x^2-2\cdot x+1+2\cdot x-2+3\right]}{4}=\frac{\left[x^2+4\cdot x+6\right]-\left[x^2+2\right]}{4}=$$

$$=\frac{x^2+4\cdot x+6-x^2-2}{4}=\frac{x^2+4\cdot x+6-x^2-2}{4}=\frac{4\cdot x+4}{4}=\frac{4\cdot(x+1)}{4}=\frac{4\cdot(x+1)}{4}=x+1.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 160

Ako je $f(x)=x^2+2\cdot x+3$, onda je $\frac{f(6)-f(4)}{4}$ jednako:

$A.\ 11 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ 4 \qquad D.\ 7$

Rezultat: B.