Zadatak 161 (Katy, strukovna škola)

Za funkciju $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ nađimo $f(3)$.

A. 1 *B.* 3 *C.* 4 *D.* 8

Rješenje 161

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Prije računanja funkciju možemo pojednostavniti.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow f(x)=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+2\cdot\sqrt{x}+1+\left(\sqrt{x}\right)^2-2\cdot\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2} \Rightarrow f(x)=\frac{x+2\cdot\sqrt{x}+1+x-2\cdot\sqrt{x}+1}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x+2\cdot\sqrt{x}+1+x-2\cdot\sqrt{x}+1}{x-1} \Rightarrow f(x)=\frac{2\cdot x+2}{x-1} \Rightarrow f(x)=\frac{2\cdot(x+1)}{x-1}.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{2\cdot(x+1)}{x-1} \\ x=3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3)=\frac{2\cdot(3+1)}{3-1} \Rightarrow f(3)=\frac{2\cdot 4}{2} \Rightarrow f(3)=\frac{2\cdot 4}{2} \Rightarrow f(3)=4.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \\ x=3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3)=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow f(3)=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(3)=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}+\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2} \Rightarrow f(3)=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}+1}{3-1}+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}+1}{3-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(3)=\frac{3+2\cdot\sqrt{3}+1}{2}+\frac{3-2\cdot\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow f(3)=\frac{4+2\cdot\sqrt{3}}{2}+\frac{4-2\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(3)=\frac{4+2\cdot\sqrt{3}+4-2\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f(3)=\frac{4+2\cdot\sqrt{3}+4-2\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f(3)=\frac{8}{2} \Rightarrow f(3)=4.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 161

Za funkciju $f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ nađimo $f(3)$.

$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 4 \qquad D.\ 8$

Rezultat: C.

Zadatak 162 (Katy, strukovna škola)

Za funkciju $f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\cos x}$ nađimo $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$A.\ -\sqrt{2} \qquad B.\ 2-\sqrt{2} \qquad C.\ 2+\sqrt{2} \qquad D.\ 2$

Rješenje 162

Ponovimo!

$$\sin\frac{\pi}{2}=1 \quad , \quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{\sin 2x}{1+\cos x} \\ x=\frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\frac{1}{1}+\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2-\sqrt{2}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 162

Za funkciju $f(x)=\frac{\sin 2x}{1-\cos x}$ nađimo $f(\pi)$.

$A.\ \sqrt{2} \qquad B.\ -\sqrt{2} \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 0$

Rezultat: D.

Zadatak 163 (Lily, gimnazija)

Odredi f(x) i g(x), ako je $\begin{cases} f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2\cdot x+1)=2\cdot x \\ f\left(\frac{x}{x-1}\right)-g(2\cdot x+1)=x,\ x\neq 1. \end{cases}$

Rješenje 163

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Ako zbrojimo zadane jednakosti dobijemo:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2\cdot x+1)=2\cdot x \\ f\left(\frac{x}{x-1}\right)-g(2\cdot x+1)=x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2\cdot x+1)+f\left(\frac{x}{x-1}\right)-g(2\cdot x+1)=2\cdot x+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2\cdot x+1)+f\left(\frac{x}{x-1}\right)-g(2\cdot x+1)=3\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot f\left(\frac{x}{x-1}\right)=3\cdot x \Rightarrow 2\cdot f\left(\frac{x}{x-1}\right)=3\cdot x \ /:2 \Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{3}{2}\cdot x.$$

Uvodimo zamjenu (supstituciju)

$$\boxed{t=\frac{x}{x-1}.}$$

Tada je:

$$t=\frac{x}{x-1} \Rightarrow t=\frac{x}{x-1}\ /\cdot(x-1) \Rightarrow t\cdot(x-1)=x \Rightarrow t\cdot x-t=x \Rightarrow t\cdot x-x=t \Rightarrow x\cdot(t-1)=t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot(t-1)=t\ /\cdot\frac{1}{t-1} \Rightarrow x=\frac{t}{t-1}.$$

Funkcija f(x) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{3}{2}\cdot x \\ t=\frac{x}{x-1} \ , \ x=\frac{t}{t-1} \end{array}\right\} \Rightarrow f(t)=\frac{3}{2}\cdot\frac{t}{t-1} \Rightarrow f(t)=\frac{3\cdot t}{2\cdot(t-1)} \Rightarrow f(t)=\frac{3\cdot t}{2\cdot t-2} \Rightarrow f(x)=\frac{3\cdot x}{2\cdot x-2}.$$

Ako oduzmemo zadane jednakosti dobijemo:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2\cdot x+1)=2\cdot x \\ f\left(\frac{x}{x-1}\right)-g(2\cdot x+1)=x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{oduzmemo} \\ \text{jednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2\cdot x+1)-\left(f\left(\frac{x}{x-1}\right)-g(2\cdot x+1)\right)=2\cdot x-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2\cdot x+1)-f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2\cdot x+1)=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2\cdot x+1)-f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2\cdot x+1)=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot g(2\cdot x+1)=x \Rightarrow 2\cdot g(2\cdot x+1)=x \; /:2 \Rightarrow g(2\cdot x+1)=\frac{1}{2}\cdot x.$$

Uvodimo zamjenu (supstituciju)

$$t=2\cdot x+1.$$

Tada je:

$$t=2\cdot x+1 \Rightarrow 2\cdot x+1=t \Rightarrow 2\cdot x=t-1 \Rightarrow 2\cdot x=t-1 \; /:2 \Rightarrow x=\frac{t-1}{2}.$$

Funkcija g(x) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} g(2\cdot x+1)=\frac{1}{2}\cdot x \\ t=2\cdot x+1 \;,\; x=\frac{t-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow g(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t-1}{2} \Rightarrow g(t)=\frac{t-1}{4} \Rightarrow g(x)=\frac{x-1}{4}.$$

Vježba 163

Odredi f(x) i g(x), ako je $\left\{\begin{array}{l} g(2\cdot x+1)+f\left(\frac{x}{x-1}\right)=2\cdot x \\ g(2\cdot x+1)-f\left(\frac{x}{x-1}\right)=-x, \; x\neq 1. \end{array}\right.$

Rezultat: $f(x)=\frac{3\cdot x}{2\cdot x-2} \;,\; g(x)=\frac{x-1}{4}.$

Zadatak 164 (Lily, gimnazija)

Ako je $f(x)+3\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2 \; (x\neq 0)$, izračunajte $f(2)$.

Rješenje 164

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad,\quad n=\frac{n}{1} \quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Računamo:

- $$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)+3\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)+3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=2^2 \Rightarrow f(2)+3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=4$$

- $$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ f(x)+3\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot f\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot f\left(\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)+3\cdot f(2)=\frac{1}{4} \Rightarrow 3\cdot f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Iz sustava jednakosti eliminacijom $f\left(\frac{1}{2}\right)$ dobijemo f(2).

$$\left.\begin{array}{l} f(2)+3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=4 \\ 3\cdot f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(2)+3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=4 \\ 3\cdot f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \;/\cdot(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(2)+3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=4 \\ -9\cdot f(2)-3\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow -8\cdot f(2)=4-\frac{3}{4} \Rightarrow -8\cdot f(2)=\frac{4}{1}-\frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8\cdot f(2)=\frac{16-3}{4} \Rightarrow -8\cdot f(2)=\frac{13}{4} \Rightarrow -8\cdot f(2)=\frac{13}{4} \;/\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) \Rightarrow f(2)=-\frac{13}{32}.$$

Vježba 164

Ako je $f(x)+3\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2\ (x\neq 0)$, izračunajte $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Rezultat: $\frac{47}{32}$.

Zadatak 165 (Nina3, gimnazija)

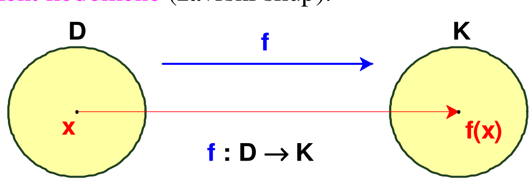
Zadana je funkcija $f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x+2}$. Odredite domenu funkcije f i zapišite je kao interval.

Rješenje 165

Ponovimo!

$$a\geq b\ ,\ c<0 \Rightarrow a\cdot c\leq b\cdot c.$$

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je $x \geq 0$ ili $x \in [0, +\infty \rangle$.

Moramo naći vrijednosti x za koje je radikand (izraz pod korijenom) veći ili jednak nuli.

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

$$A \cap B = \{ x \in U : x \in A \text{ i } x \in B \}$$ presjek skupova A i B,

Ako je funkcija f zadana kao zbroj ili razlika funkcija f_1, f_2, f_3, ..., f_n, onda se njezina domena nađe tako da se odrede domene funkcija f_1, f_2, f_3, ..., f_n i presjek tih domena daje domenu funkcije f, tj.

$$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \ldots \pm f_n(x) \Rightarrow D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) \cap D(f_3) \cap \ldots \cap D(f_n).$$

Budući da je funkcija f zadana kao razlika funkcija f_1 i f_2

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x+2} \\ f(x) = f_1(x) - f_2(x) \end{array} \right\},$$

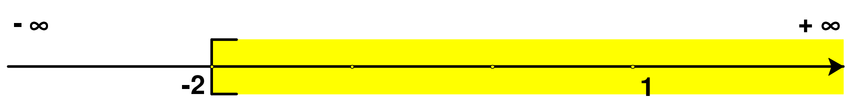
slijedi:

- $f_1(x) = \sqrt{1-x}$, bit će realan broj ako je radikand (izraz pod korijenom) veći ili jednak nuli. Ako je radikand negativan, tada je drugi korijen imaginaran broj. Dakle, prirodna domena funkcije f_1 dobije se:

$$1 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -1 \Rightarrow -x \geq -1 \, / \cdot (-1) \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D(f_1) = \langle -\infty, 1]$$

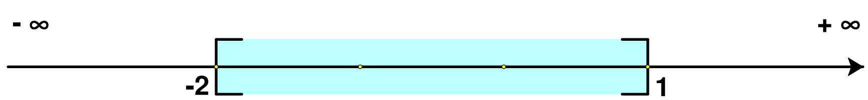
- $f_2(x) = \sqrt{x+2}$, bit će realan broj ako je radikand (izraz pod korijenom) veći ili jednak nuli. Ako je radikand negativan, tada je drugi korijen imaginaran broj. Dakle, prirodna domena funkcije f_2 dobije se:

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D(f_2) = [-2, +\infty \rangle.$$



Područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x+2}$ je presjek skupova

$$\langle -\infty, 1] \cap [-2, +\infty \rangle = [-2, 1].$$



Domena funkcije f je:

$$D(f) = [-2, 1].$$

Vježba 165

Zadana je funkcija $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+2}$. Odredite domenu funkcije f i zapišite je kao interval.

Rezultat: $D(f)=[-2,1]$.

Zadatak 166 (Jaca, gimnazija)

Formula koja povezuje stupnjeve Celzija (C) sa stupnjevima Fahrenheita (F) je

$$C=\frac{5\cdot(F-32)}{9}.$$

Temperatura se promijenila za 10 stupnjeva Celzija. Kolika je ta promjena izražena u stupnjevima Fahrenheita?

$$A.\ 5.5 \qquad B.\ 9 \qquad C.\ 10.5 \qquad D.\ 18$$

Rješenje 166

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad a=b \Rightarrow b=a.$$

Neka su a i b realni brojevi. Funkcija $f:R\rightarrow R$ dana pravilom f(x) = a · x + b naziva se linearna funkcija pri čemu je a $\neq 0$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Celzijev stupanj je temperaturna ljestvicu sa 100 jednakih dijelova (stupnjeva) između ledišta (0°C) i vrelišta (100°C) vode.

Fahrenheitov stupanj je temperaturna ljestvicu sa 180 jednakih dijelova (stupnjeva) između ledišta (32°F) i vrelišta (212°F) vode.

1.inačica

Transformiramo zadanu formulu.

$$C=\frac{5\cdot(F-32)}{9} \Rightarrow C=\frac{5\cdot F-160}{9} \Rightarrow C=\frac{5\cdot F-160}{9} \ /\cdot 9 \Rightarrow 9\cdot C=5\cdot F-160 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot F-160=9\cdot C \Rightarrow 5\cdot F=9\cdot C+160 \Rightarrow 5\cdot F=9\cdot C+160 \ /:5 \Rightarrow F=\frac{9}{5}\cdot C+32.$$

F je linearna funkcija po varijabli C

$$F(C)=\frac{9}{5}\cdot C+32$$

pa za C možemo uzeti dvije proizvoljne vrijednosti, čija je razlika 10, i izračunati pripadne F.

$$\left.\begin{matrix} C_1=0 \\ C_2=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_1=\frac{9}{5}\cdot C_1+32 \\ F_2=\frac{9}{5}\cdot C_2+32 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} F_1=\frac{9}{5}\cdot 0+32 \\ F_2=\frac{9}{5}\cdot 10+32 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} F_1=0+32 \\ F_2=18+32 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} F_1=32 \\ F_2=50 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta F=F_2-F_1 \Rightarrow \Delta F=50-32 \Rightarrow \Delta F=18.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Transformiramo zadanu formulu.

$$C=\frac{5\cdot(F-32)}{9} \Rightarrow C=\frac{5\cdot F-160}{9} \Rightarrow C=\frac{5\cdot F-160}{9} \ /\cdot 9 \Rightarrow 9\cdot C=5\cdot F-160 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot F-160=9\cdot C \Rightarrow 5\cdot F=9\cdot C+160 \Rightarrow 5\cdot F=9\cdot C+160 \ /:5 \Rightarrow F=\frac{9}{5}\cdot C+32.$$

Neka su:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{9}{5}\cdot C_1 + 32 \\ F_2 &= \frac{9}{5}\cdot C_2 + 32 \\ \Delta C &= C_2 - C_1 = 10 \end{aligned}\right\}.$$

Tada je:

$$\Delta F = F_2 - F_1 \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\cdot C_2 + 32 - \left(\frac{9}{5}\cdot C_1 + 32\right) \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\cdot C_2 + 32 - \frac{9}{5}\cdot C_1 - 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\cdot C_2 + 32 - \frac{9}{5}\cdot C_1 - 32 \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\cdot C_2 - \frac{9}{5}\cdot C_1 \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\cdot\left(C_2 - C_1\right) \Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\cdot\Delta C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta F = \frac{9}{5}\cdot 10 \Rightarrow \Delta F = \frac{90}{5} \Rightarrow \Delta F = 18.$$

Odgovor je pod D.

3.inačica

Uočimo da promjeni za 1 °C odgovara promjena za 1.8 °F.

$$\frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = 1.8.$$

Kada se temperatura promijeni za 10 °C ta promjena izražena u stupnjevima Fahrenheita iznosi:

$$10\cdot 1.8 = 18.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 166

Formula koja povezuje stupnjeve Celzija (C) sa stupnjevima Fahrenheita (F) je

$$C = \frac{5\cdot\left(F-32\right)}{9}.$$

Temperatura se promijenila za 5 stupnjeva Celzija. Kolika je ta promjena izražena u stupnjevima Fahrenheita?

A. 5.5 *B.* 9 *C.* 10.5 *D.* 18

Rezultat: B.

Zadatak 167 (Tommy, gimnazija)

Odredi kompoziciju f ∘ g, ako je $f(x) = \frac{2-x}{3\cdot x-1}$, $g(x) = \frac{x+1}{2\cdot x-1}$.

Rješenje 167

Ponovimo!

Kompozicija funkcija

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x) = g(f(x)).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d - b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

1.inačica

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=f\left(\frac{x+1}{2\cdot x-1}\right)=f\left(\frac{x+1}{2\cdot x-1}\right)=\frac{2-\frac{x+1}{2\cdot x-1}}{3\cdot\frac{x+1}{2\cdot x-1}-1}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ 2\cdot x-1\neq 0\\ x\neq\frac{1}{2}\end{array}\right]=\frac{\frac{2}{1}-\frac{x+1}{2\cdot x-1}}{\frac{3}{1}\cdot\frac{x+1}{2\cdot x-1}-\frac{1}{1}}=\frac{\frac{2\cdot(2\cdot x-1)-(x+1)}{2\cdot x-1}}{\frac{3\cdot x+3}{2\cdot x-1}-\frac{1}{1}}=\frac{\frac{4\cdot x-2-x-1}{2\cdot x-1}}{\frac{3\cdot x+3-(2\cdot x-1)}{2\cdot x-1}}=$$

$$=\frac{\frac{3\cdot x-3}{2\cdot x-1}}{\frac{3\cdot x+3-2\cdot x+1}{2\cdot x-1}}=\frac{\frac{3\cdot(x-1)}{2\cdot x-1}}{\frac{x+4}{2\cdot x-1}}=\frac{\frac{3\cdot(x-1)}{2\cdot x-1}}{\frac{x+4}{2\cdot x-1}}=\frac{\frac{3\cdot(x-1)}{1}}{\frac{x+4}{1}}=\frac{3\cdot(x-1)}{x+4},\ \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ x+4\neq 0\\ x\neq -4\end{array}\right].$$

2.inačica

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=\frac{2-g(x)}{3\cdot g(x)-1}=\frac{2-g(x)}{3\cdot g(x)-1}=\frac{2-\frac{x+1}{2\cdot x-1}}{3\cdot\frac{x+1}{2\cdot x-1}-1}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ 2\cdot x-1\neq 0\\ x\neq\frac{1}{2}\end{array}\right]=\frac{\frac{2}{1}-\frac{x+1}{2\cdot x-1}}{\frac{3}{1}\cdot\frac{x+1}{2\cdot x-1}-\frac{1}{1}}=\frac{\frac{2\cdot(2\cdot x-1)-(x+1)}{2\cdot x-1}}{\frac{3\cdot x+3}{2\cdot x-1}-\frac{1}{1}}=\frac{\frac{4\cdot x-2-x-1}{2\cdot x-1}}{\frac{3\cdot x+3-(2\cdot x-1)}{2\cdot x-1}}=$$

$$=\frac{\frac{3\cdot x-3}{2\cdot x-1}}{\frac{3\cdot x+3-2\cdot x+1}{2\cdot x-1}}=\frac{\frac{3\cdot(x-1)}{2\cdot x-1}}{\frac{x+4}{2\cdot x-1}}=\frac{\frac{3\cdot(x-1)}{2\cdot x-1}}{\frac{x+4}{2\cdot x-1}}=\frac{\frac{3\cdot(x-1)}{1}}{\frac{x+4}{1}}=\frac{3\cdot(x-1)}{x+4},\ \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ x+4\neq 0\\ x\neq -4\end{array}\right].$$

Vježba 167

Odredi kompoziciju g ∘ f, ako je $f(x)=\frac{2-x}{3\cdot x-1}$, $g(x)=\frac{x+1}{2\cdot x-1}$.

Rezultat: $\frac{2\cdot x+1}{-5\cdot(x-1)}$.

Zadatak 168 (Iva, gimnazija)

Koji je skup domena funkcije $f(x)=\log(2\cdot x+4)$?

$A.\ R\setminus\{-2,\ 0\}$ $\quad B.\ \langle-\infty,\ -2\rangle$ $\quad C.\ \langle-2,\ +\infty\rangle$ $\quad D.\ R\setminus\{-2\}$

Rješenje 168

Ponovimo!

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x\in D$ pridružen točno jedan element $f(x)\in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f: D\rightarrow K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti

funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.
Logaritamska funkcija s bazom b realna je funkcija oblika

$$f(x)=\log_b x,$$

gdje je b > 0 i b ≠ 1. Područje definicije (domena) logaritamske funkcije je interval pozitivnih realnih brojeva

$$x \in \langle 0, +\infty \rangle \quad , \quad D(\log_b x)=\langle 0, +\infty \rangle .$$

Provedemo diskusiju (tražimo domenu funkcije):

$$f(x)=\log(2\cdot x+4) \;\Rightarrow\; 2\cdot x+4>0 \;\Rightarrow\; 2\cdot x>-4 \;\Rightarrow\; 2\cdot x>-4 \;/:2 \;\Rightarrow\; x>-2.$$

$$D(f)=\langle -2, +\infty \rangle .$$

Odgovor je pod C.

Vježba 168

Koji je skup domena funkcije $f(x)=\log(2\cdot x-4)$?

$A.\ R\setminus\{2, 0\}$ $\quad B.\ \langle -\infty, 2\rangle$ $\quad C.\ \langle 2, +\infty\rangle$ $\quad D.\ R\setminus\{2\}$

Rezultat: C.

Zadatak 169 (Iva, gimnazija)

Za funkciju f(x) = a^x vrijedi f(1) · f(2) = 27. Koliko je f(– 1) · f(3)?

Rješenje 169

Ponovimo!

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \sqrt[n]{a^n}=a \;,\; a\geq 0.$$

Budući da za funkciju f(x) = a^x vrijedi f(1) · f(2) = 27, možemo izračunati bazu a.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a^x \;,\; f(1)=a^1 \\ f(x)=a^x \;,\; f(2)=a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ f(1)\cdot f(2)=27 \end{array}\right] \Rightarrow a^1\cdot a^2=27 \Rightarrow a^3=27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3=27 \;/\sqrt[3]{\;} \Rightarrow a=\sqrt[3]{27} \Rightarrow a=\sqrt[3]{3^3} \Rightarrow a=3.$$

Dakle, funkcija f(x) = a^x ima oblik f(x) = 3^x. Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=3^x \;,\; f(-1)=3^{-1} \\ f(x)=3^x \;,\; f(3)=3^3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1)\cdot f(3)=3^{-1}\cdot 3^3 \Rightarrow f(-1)\cdot f(3)=3^2 \Rightarrow f(-1)\cdot f(3)=9.$$

Vježba 169

Za funkciju f(x) = a^x vrijedi f(1) · f(2) = 8. Koliko je f(– 1) · f(3)?

Rezultat: 4.

Zadatak 170 (Josip, srednja škola)

Ako za linearnu funkciju vrijedi f(x) + f(x + 1) = 2 · x – 1, za svaki realni broj x, odredite f.

$A.\ f(x)=x+1 \qquad B.\ f(x)=x-1 \qquad C.\ f(x)=-x+1 \qquad D.\ f(x)=-x-1$

Rješenje 170

Ponovimo!

Poučak o jednakosti polinoma:

Dva polinoma su jednaka ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka su a $\neq 0$ i b realni brojevi. Funkcija $f : R \to R$ dana pravilom f(x) = a · x + b naziva se linearna funkcija. Graf linearne funkcije je pravac.

Neka je zadana linearna funkcija f(x) = a · x + b, gdje su a i b realni brojevi. Tada je:

$$\begin{cases} f(x)=a\cdot x+b \\ f(x+1)=a\cdot(x+1)+b. \end{cases}$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$f(x)+f(x+1)=2\cdot x-1 \Rightarrow a\cdot x+b+a\cdot(x+1)+b=2\cdot x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot x+b+a\cdot x+a+b=2\cdot x-1 \Rightarrow 2\cdot a\cdot x+a+2\cdot b=2\cdot x-1 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{jednakost}\\ \text{polinoma}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot a=2 \\ a+2\cdot b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot a=2 \ /:2 \\ a+2\cdot b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \\ a+2\cdot b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2\cdot b=-1 \Rightarrow 2\cdot b=-1-1 \Rightarrow 2\cdot b=-2 \Rightarrow 2\cdot b=-2 \ /:2 \Rightarrow b=-1.$$

Linearna funkcija glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \ , \ b=-1 \\ f(x)=a\cdot x+b \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=1\cdot x+(-1) \Rightarrow f(x)=x-1.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 170

Ako za linearnu funkciju vrijedi f(x) + f(x + 1) = 2 · x + 3, za svaki realni broj x, odredite f.

$A.\ f(x)=x+1 \qquad B.\ f(x)=x-1 \qquad C.\ f(x)=-x+1 \qquad D.\ f(x)=-x-1$

Rezultat: A.

Zadatak 171 (Josipa, strukovna škola)

Telefonski operater naplaćuje mjesečnu naknadu od 20 kn i svaku minutu poziva po 0.21 kn. Koliko iznosi telefonski mjesečni račun obitelji koja je razgovarala telefonom 7 h i 32 min? Telefonski mjesečni račun neke druge obitelji iznosi 54.23 kn. Koliko su minuta ukupno trajali njihovi razgovori?

Rješenje 171

Ponovimo!

Funkcija zadana formulom $f(x)=a\cdot x+b,\ a,\ b\in R$ zove se linearna funkcija.

Telefonski račun za t minuta dan je linearnom funkcijom $f(t)=0.21\cdot t+20,$ gdje je 0.21 cijena razgovora po jednoj minuti (konstanta proporcionalnosti), a 20 mjesečna naknada.

Budući da je obitelj telefonom razgovarala 7 h i 32 min, telefonski mjesečni račun iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} t = 7\ h\ 32\ \min \\ f(t) = 0.21 \cdot t + 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 7 \cdot 60 + 32 \\ f(t) = 0.21 \cdot t + 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 452 \\ f(t) = 0.21 \cdot t + 20 \end{array}\right\} \Rightarrow f(452) = 0.21 \cdot 452 + 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(452) = 114.92\ kn.$$

Ako je telefonski mjesečni račun obitelji iznosio 54.23 kn, tada su ukupni njihovi razgovori trajali (u minutama):

$$\left.\begin{array}{l} f(t) = 0.21 \cdot t + 20 \\ f(t) = 54.23 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow 0.21 \cdot t + 20 = 54.23 \Rightarrow 0.21 \cdot t = 54.23 - 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.21 \cdot t = 34.23 \Rightarrow 0.21 \cdot t = 34.23\ /: 0.21 \Rightarrow t = \frac{34.23}{0.21} \Rightarrow t = 163\ \min.$$

Vježba 171

Telefonski operater naplaćuje mjesečnu naknadu od 20 kn i svaku minutu poziva po 0.21 kn. Koliko iznosi telefonski mjesečni račun obitelji koja je razgovarala telefonom 6 h i 32 min?

Rezultat: 102.32 kn.

Zadatak 172 (Ana, gimnazija)

Odredi $h(x) = (f \circ g)(x) + f(4)$ ako je $f(x) = x \cdot (x - 2)$, a $g(x) = 2 \cdot x - 5$.

$A.\ h(x) = 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 27$ $\quad B.\ h(x) = 2 \cdot x^2 - 24 \cdot x - 27$

$C.\ h(x) = 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 43$ $\quad D.\ h(x) = 4 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 43$

Rješenje 172

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Kompozicija funkcija f i g

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

1.inačica

$$h(x) = (f \circ g)(x) + f(4) \Rightarrow h(x) = f(g(x)) + f(4) \Rightarrow h(x) = f(g(x)) + f(4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = g(x) \cdot (g(x) - 2) + 4 \cdot (4 - 2) \Rightarrow h(x) = g(x) \cdot (g(x) - 2) + 4 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = g(x) \cdot (g(x) - 2) + 8 \Rightarrow h(x) = g(x) \cdot (g(x) - 2) + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = (2 \cdot x - 5) \cdot ((2 \cdot x - 5) - 2) + 8 \Rightarrow h(x) = (2 \cdot x - 5) \cdot (2 \cdot x - 5 - 2) + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = (2 \cdot x - 5) \cdot (2 \cdot x - 7) + 8 \Rightarrow h(x) = 4 \cdot x^2 - 14 \cdot x - 10 \cdot x + 35 + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = 4 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 43.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$h(x) = (f \circ g)(x) + f(4) \Rightarrow h(x) = f(g(x)) + f(4) \Rightarrow h(x) = f(g(x)) + f(4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = f(2 \cdot x - 5) + f(4) \Rightarrow h(x) = f(2 \cdot x - 5) + f(4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=(2\cdot x-5)\cdot((2\cdot x-5)-2)+4\cdot(4-2) \Rightarrow h(x)=(2\cdot x-5)\cdot(2\cdot x-5-2)+4\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=(2\cdot x-5)\cdot(2\cdot x-7)+8 \Rightarrow h(x)=4\cdot x^2-14\cdot x-10\cdot x+35+8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=4\cdot x^2-24\cdot x+43.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 172

Odredi $h(x)=(f\circ g)(x)+f(2)$ ako je $f(x)=x\cdot(x-2)$, a $g(x)=2\cdot x-5.$

$A.\ h(x)=4\cdot x^2-4\cdot x+35$ $\qquad B.\ h(x)=2\cdot x^2-24\cdot x-35$

$C.\ h(x)=2\cdot x^2-4\cdot x-43$ $\qquad D.\ h(x)=4\cdot x^2-24\cdot x+35$

Rezultat: D.

Zadatak 173 (Mac, gimnazija)

Ako je $f(x)=\frac{1}{x-1}$ i $g(x)=\frac{x^2-1}{2}$, onda je $(f\circ g)(-1)$ jednako:

$A.\ 2 \qquad B.\ -\frac{1}{2} \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -1$

Rješenje 173

Ponovimo!

Kompozicija funkcija f i g

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

1.inačica

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=f\left(\frac{x^2-1}{2}\right)=f\left(\frac{x^2-1}{2}\right)=\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}-1}=\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}-\frac{1}{1}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{x^2-1-2}{2}}=\frac{1}{\frac{x^2-3}{2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{x^2-3}{2}}=\frac{2}{x^2-3}.$$

Tada je:

$$(f\circ g)(-1)=\frac{2}{(-1)^2-3}=\frac{2}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=\frac{1}{g(x)-1}=\frac{1}{g(x)-1}=\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}-1}=\frac{1}{\frac{x^2-1}{2}-\frac{1}{1}}=$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2-1-2}{2}} = \frac{1}{\frac{x^2-3}{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{x^2-3}{2}} = \frac{2}{x^2-3}.$$

Tada je:

$$(f \circ g)(-1) = \frac{2}{(-1)^2-3} = \frac{2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 173

Ako je $f(x) = \frac{1}{x-1}$ i $g(x) = \frac{x^2-1}{2}$, onda je $(f \circ g)(2)$ jednako:

$$A.\ 2 \qquad B.\ -\frac{1}{2} \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -1$$

Rezultat: A.

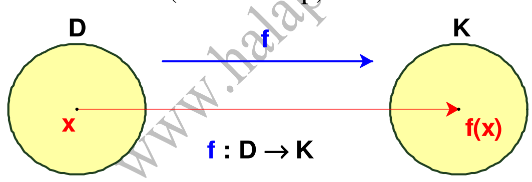
Zadatak 174 (Helena, pedagoški fakultet)

Odredite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \log_2(x-1)$.

Rješenje 174

Ponovimo!

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je injekcija, odnosno injektivno preslikavanje, ako

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y \qquad (x,\ y \in A).$$

Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je surjekcija, odnosno surjektivno preslikavanje, ako za svaki $y \in B$ postoji bar jedan $x \in A$ takav da je

$$y = f(x).$$

Funkcija $f : A \to B$ zove se bijekcija, ako je f istodobno injekcija i surjekcija.

Inverzna funkcija

Neka je $f : A \to B$ bijekcija. Tada postoji jedna i samo jedna bijekcija $g : B \to A$ takva da je

$$(g \circ f)(x) = x \ , \ \forall x \in A$$
$$(f \circ g)(y) = y \ , \ \forall y \in B.$$

Ta jedinstvena bijekcija g označava se sa f^{-1} i zove inverzna funkcija funkcije f.

Zapamtimo!

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=x \quad , \quad \left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=x.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \; \rightarrow \qquad a=b^c$$

$$b^{\log_b a}=a.$$

Tražimo inverznu funkciju:

1.inačica

$$f(x)=\log_2(x-1) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{pišemo} \\ y=f(x) \end{bmatrix} \Rightarrow y=\log_2(x-1) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamijenimo } y \text{ i } x \\ y\leftrightarrow x \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\log_2(y-1) \Rightarrow \log_2(y-1)=x \Rightarrow \left[\text{računamo } y\right] \Rightarrow y-1=2^x \Rightarrow y=2^x+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{pišemo} \\ y=f^{-1}(x) \end{bmatrix} \Rightarrow f^{-1}(x)=2^x+1.$$

2.inačica

$$f(x)=\log_2(x-1) \Rightarrow \left[\text{računamo } x\right] \Rightarrow \log_2(x-1)=f(x) \Rightarrow x-1=2^{f(x)} \Rightarrow x=2^{f(x)}+1.$$

Sada pišemo:

$$f^{-1}(x)=2^x+1.$$

3.inačica

Budući da za kompoziciju funkcije f i njezine inverzne funkcije f^{-1} vrijedi

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=x,$$

pišemo

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x \Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Rightarrow \log_2\left(f^{-1}(x)-1\right)=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)-1=2^x \Rightarrow f^{-1}(x)=2^x+1.$$

Vježba 174

Odredite inverznu funkciju funkcije $f(x)=\log_3(x-1)$.

Rezultat: $f^{-1}(x)=3^x+1.$

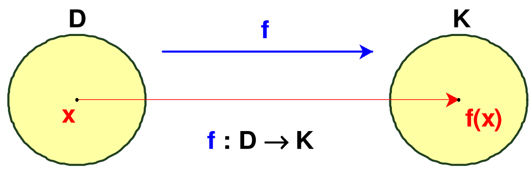
Zadatak 175 (Helena, pedagoški fakultet)

Zadane su funkcije $f(x)=\log_2(x-1)$, $g(x)=2^x-8$. Odredite kompoziciju funkcija g ∘ f.

Rješenje 175

Ponovimo!

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije
K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije
x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla
f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla
Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.
Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \;\rightarrow \qquad a = b^c$$

$$b^{\log_b a} = a.$$

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f: A \to B$, $g: B \to C$ funkcije zadane na A, odnosno na B sa vrijednostima u B, odnosno u C. Tada je sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \; \forall x \in A$$

zadana funkcija $g \circ f: A \to C$ koja se zove kompozicija (složena funkcija) funkcija f i g.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x)) = g\left(\log_2(x-1)\right) = g\left(\log_2(x-1)\right) =$$
$$= 2^{\log_2(x-1)} - 8 = (x-1) - 8 = x - 1 - 8 = x - 9.$$

2.inačica

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x)) = 2^{f(x)} - 8 = 2^{f(x)} - 8 =$$
$$= 2^{\log_2(x-1)} - 8 = (x-1) - 8 = x - 1 - 8 = x - 9.$$

Vježba 175

Zadane su funkcije $f(x) = \log_3(x-1)$, $g(x) = 3^x - 8$. Odredite kompoziciju funkcija g ○ f.

Rezultat: x – 9.

Zadatak 176 (Mario, gimnazija)

Za funkciju $f(x) = 2^x + 1$ vrijedi:

$A.\; f(x+1) = f(x) + 1 \qquad B.\; f(x-1) = 2 \cdot f(x) + 1$
$C.\; f(x-1) = f(x) - 1 \qquad D.\; f(x+1) = 2 \cdot f(x) - 1$

Rješenje 176

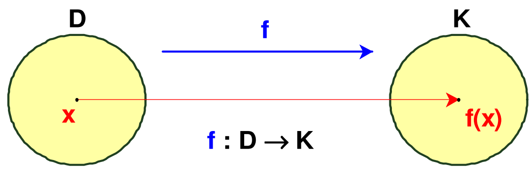
Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad -a + a = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

A.

$$f(x+1)=f(x)+1 \Rightarrow 2^{x+1}+1=\left(2^{x}+1\right)+1 \Rightarrow 2^{x+1}+1=2^{x}+1+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x+1}+1=2^{x}+2 \text{ netočno}$$

B.

$$f(x-1)=2\cdot f(x)+1 \Rightarrow 2^{x-1}+1=2\cdot\left(2^{x}+1\right)+1 \Rightarrow 2^{x-1}+1=2\cdot 2^{x}+2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x-1}+1=2^{1}\cdot 2^{x}+3 \Rightarrow 2^{x-1}+1=2^{x+1}+3 \text{ netočno}$$

C.

$$f(x-1)=f(x)-1 \Rightarrow 2^{x-1}+1=\left(2^{x}+1\right)-1 \Rightarrow 2^{x-1}+1=2^{x}+1-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x-1}+1=2^{x}+1-1 \Rightarrow 2^{x-1}+1=2^{x} \text{ netočno}$$

D.

$$f(x+1)=2\cdot f(x)-1 \Rightarrow 2^{x+1}+1=2\cdot\left(2^{x}+1\right)-1 \Rightarrow 2^{x+1}+1=2\cdot 2^{x}+2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x+1}+1=2^{1}\cdot 2^{x}+1 \Rightarrow 2^{x+1}+1=2^{x+1}+1 \text{ točno}$$

Odgovor je pod D.
Ili ovako:

$$f(x+1)=2^{x+1}+1 \Rightarrow f(x+1)=2^{x}\cdot 2^{1}+1 \Rightarrow f(x+1)=2^{x}\cdot 2+1 \Rightarrow f(x+1)=2\cdot 2^{x}+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+1)=2\cdot 2^{x}+1 \Rightarrow f(x+1)=2\cdot 2^{x}+(2-1) \Rightarrow f(x+1)=2\cdot 2^{x}+2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+1)=\left(2\cdot 2^{x}+2\right)-1 \Rightarrow f(x+1)=2\cdot\left(2^{x}+1\right)-1 \Rightarrow \left[f(x)=2^{x}+1\right] \Rightarrow f(x+1)=2\cdot f(x)-1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 176

Za funkciju $f(x)=2^{x}+2$ vrijedi:

$A.\ f(x+1)=2\cdot f(x)+1 \qquad B.\ f(x-1)=2\cdot f(x)-1$

$C.\ f(x-1)=f(x)-1 \qquad D.\ f(x+1)=2\cdot f(x)-2$

Rezultat: D.

Zadatak 177 (Mario, gimnazija)

- Ako su f i g neparne funkcije, neparna je i funkcija f + g.
- Ako su f i g neparne funkcije, neparna je i funkcija f · g.
- Ako su f i g neparne funkcije, neparna je i funkcija f ○ g.

Točno je:

A. samo *a*) *B.* *a*) i *b*) *C.* *b*) i *c*) *D.* *a*) i *c*)

Rješenje 177

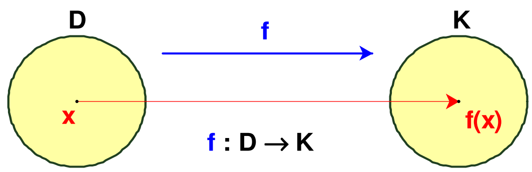
Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad -a + a = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije
K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije
x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla
f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla
Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.
Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo:

- parnom, ako je f(– x) = f(x)
- neparnom, ako je f(– x) = – f(x).

Algebarske operacije s funkcijama
Neka funkcije f i g preslikavaju podskup skupa realnih brojeva A na skup realnih brojeva R. Tada se može definirati zbroj funkcija f i g koji glasi f + g, razlika funkcija f i g koja glasi f – g, umnožak funkcija f i g koji glasi f · g. Područje definicije funkcija f + g, f – g i f · g jednako je području definicije funkcije f i g, tj. skupu A.
Algebarskim operacijama zbrajanja, oduzimanja i množenja djelujemo na vrijednosti funkcija:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad , \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f : A \to B$, $g : B \to C$ funkcije zadane na A, odnosno na B sa vrijednostima u B, odnosno u C. Tada je sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ , \ \forall x \in A$$

zadana funkcija $g \circ f : A \to C$ koja se zove kompozicija (složena funkcija) funkcija f i g.

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = -f(x) \\ g(-x) = -g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) =$$

$$= -(f(x) + g(x)) = -(f + g)(x).$$

$$(f + g)(-x) = -(f + g)(x).$$

Dakle, f + g je neparna funkcija.

b)

$$\left.\begin{array}{l} f(-x)=-f(x) \\ g(-x)=-g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (f\cdot g)(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=(-f(x))\cdot(-g(x))=$$

$$=f(x)\cdot g(x)=(f\cdot g)(x).$$

$$(f\cdot g)(-x)=(f\cdot g)(x).$$

Dakle, f · g nije neparna funkcija.

c)

$$\left.\begin{array}{l} f(-x)=-f(x) \\ g(-x)=-g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (f\circ g)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=$$

$$=-f(g(x))=-(f\circ g)(x).$$

$$(f\circ g)(-x)=-(f\circ g)(x).$$

Dakle, f ○ g je neparna funkcija.
Odgovor je pod D.

Vježba 177

a) Ako su f i g neparne funkcije, neparna je i funkcija f – g.
b) Ako su f i g neparne funkcije, neparna je i funkcija f · g.
c) Ako su f i g neparne funkcije, neparna je i funkcija f ○ g.

Točno je:

$A.$ samo $a)$ $\quad B.$ $a)$ i $b)$ $\quad C.$ $b)$ i $c)$ $\quad D.$ $a)$ i $c)$

Rezultat: D.

Zadatak 178 (Mario, gimnazija)

Za funkciju f vrijedi $x\cdot f(x)+f(1-x)=2\cdot x$, za svaki $x\in D_f$. Izračunajte f(0).

Rješenje 178

Ponovimo!

$$0\cdot x=x\cdot 0=0 \quad , \quad 1\cdot x=x\cdot 1=x \quad , \quad 0+x=x+0=x.$$

Promatrajmo zadanu jednakost za x = 0 i x = 1.

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x\cdot f(x)+f(1-x)=2\cdot x\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0\cdot f(0)+f(1-0)=2\cdot 0 \\ 1\cdot f(1)+f(1-1)=2\cdot 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0+f(1)=0 \\ f(1)+f(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)+f(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 0+f(0)=2 \Rightarrow f(0)=2.$$

Vježba 178

Za funkciju f vrijedi $x\cdot f(x)+f(1-x)=2\cdot x$, za svaki $x\in D_f$. Izračunajte f(1).

Rezultat: f(1) = 0.

Zadatak 179 (Mario, gimnazija)

Ako je $f\left(9^{x-1}\right)=3^{2\cdot x-1}$, onda je $f(3)$ jednako:

$A.\ 9 \quad B.\ \sqrt{3} \quad C.\ 1 \quad D.\ 27$

Rješenje 179

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a\cdot b = b\cdot a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Transformiramo izraz na sljedeći način:

$$f\left(9^{x-1}\right) = 3^{2\cdot x-1} \Rightarrow f\left(\left(3^2\right)^{x-1}\right) = 3^{2\cdot x-1} \Rightarrow f\left(3^{2\cdot x-2}\right) = 3^{2\cdot x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(3^{2\cdot x-2}\right) = 3^{2\cdot x-2}\cdot 3^1 \Rightarrow f\left(3^{2\cdot x-2}\right) = 3^{2\cdot x-2}\cdot 3 \Rightarrow f\left(3^{2\cdot x-2}\right) = 3\cdot 3^{2\cdot x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(3^{2\cdot x-2}\right) = 3\cdot 3^{2\cdot x-2}.$$

Zadana funkcija ima oblik

$$f(x) = 3\cdot x$$

pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ f(x) = 3\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow f(3) = 3\cdot 3 \Rightarrow f(3) = 9.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Transformiramo izraz na ovaj način:

$$f\left(9^{x-1}\right) = 3^{2\cdot x-1} \Rightarrow f\left(9^{x-1}\right) = 3^{2\cdot x}\cdot 3^{-1} \Rightarrow f\left(9^{x-1}\right) = \left(3^2\right)^x\cdot 3^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(9^{x-1}\right) = 9^x\cdot 3^{-1} \Rightarrow f\left(9^{x-1}\right) = 9^{x-1}\cdot 9^1\cdot 3^{-1} \Rightarrow f\left(9^{x-1}\right) = 9^{x-1}\cdot 9\cdot 3^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(9^{x-1}\right) = 9^{x-1}\cdot 3^2\cdot 3^{-1} \Rightarrow f\left(9^{x-1}\right) = 9^{x-1}\cdot 3^1 \Rightarrow f\left(9^{x-1}\right) = 9^{x-1}\cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(9^{x-1}\right) = 3\cdot 9^{x-1} \Rightarrow f\left(9^{x-1}\right) = 3\cdot 9^{x-1}.$$

Zadana funkcija ima oblik

$$f(x) = 3\cdot x$$

pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ f(x) = 3\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow f(3) = 3\cdot 3 \Rightarrow f(3) = 9.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 179

Ako je $f\left(9^{x-1}\right) = 3^{2\cdot x-1}$, onda je $f\left(\frac{1}{3}\right)$ jednako:

$A.\ 9 \qquad B.\ \sqrt{3} \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 27$

Rezultat: C.

Zadatak 180 (BT, gimnazija)

Dan je polinom $f(x) = a\cdot x^5 - b\cdot x^3 + c\cdot x - 1.$ Ako je $f(-2) = 5,$ onda je $f(2)$ jednako:

$A.\ -1 \qquad B.\ -3 \qquad C.\ -5 \qquad D.\ -7$

Rješenje 180

Ponovimo!

$$(-a)^{2\cdot n-1}=-a^{2\cdot n-1}.$$

Iz f(– 2) = 5 dobije se:

$$f(-2)=5\ \Rightarrow\ a\cdot(-2)^5-b\cdot(-2)^3+c\cdot(-2)-1=5\ \Rightarrow\ a\cdot(-32)-b\cdot(-8)+c\cdot(-2)-1=5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -32\cdot a+8\cdot b-2\cdot c-1=5\ \Rightarrow\ -32\cdot a+8\cdot b-2\cdot c=5+1\ \Rightarrow\ -32\cdot a+8\cdot b-2\cdot c=6\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -32\cdot a+8\cdot b-2\cdot c=6\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ 32\cdot a-8\cdot b+2\cdot c=-6.$$

Tada f(2) iznosi:

$$f(2)=a\cdot 2^5-b\cdot 2^3+c\cdot 2-1\ \Rightarrow\ f(2)=a\cdot 32-b\cdot 8+c\cdot 2-1\ \Rightarrow\ f(2)=32\cdot a-8\cdot b+2\cdot c-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left[32\cdot a-8\cdot b+2\cdot c=-6\right]\ \Rightarrow\ f(2)=-6-1\ \Rightarrow\ f(2)=-7.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 180

Dan je polinom $f(x)=a\cdot x^5-b\cdot x^3+c\cdot x-1.$ Ako je $f(-2)=1,$ onda je $f(2)$ jednako :

$A.\ -1\qquad B.\ -3\qquad C.\ -5\qquad D.\ -7$

Rezultat: B.