Zadatak 181 (BT, gimnazija)

$$\text{Ako je } f(x)=x^2+x+1, \text{ onda je } (a+1)\cdot f(-a)+(a-1)\cdot f(a) \text{ jednako:}$$

$$A.\ a^3+1 \qquad B.\ 2\cdot a^3 \qquad C.\ a^3-1 \qquad D.\ a^3$$

Rješenje 181

Ponovimo!

$$(-a)^2=a^2 \quad , \quad a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right) - \text{zbroj kubova.}$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right) - \text{razlika kubova.}$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

Za funkciju $f(x)=x^2+x+1$ vrijedi:

$$(a+1)\cdot f(-a)+(a-1)\cdot f(a)=(a+1)\cdot\left((-a)^2+(-a)+1\right)+(a-1)\cdot\left(a^2+a+1\right)=$$

$$=(a+1)\cdot\left(a^2-a+1\right)+(a-1)\cdot\left(a^2+a+1\right)=a^3-a^2+a+a^2-a+1+a^3+a^2+a-a^2-a-1=$$

$$=a^3-a^2+a+a^2-a+1+a^3+a^2+a-a^2-a-1=a^3+a^3=2\cdot a^3.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Za funkciju $f(x)=x^2+x+1$ vrijedi:

$$(a+1)\cdot f(-a)+(a-1)\cdot f(a)=(a+1)\cdot\left((-a)^2+(-a)+1\right)+(a-1)\cdot\left(a^2+a+1\right)=$$

$$=(a+1)\cdot\left(a^2-a+1\right)+(a-1)\cdot\left(a^2+a+1\right)=\underbrace{(a+1)\cdot\left(a^2-a+1\right)}_{\text{zbroj kubova}}+\underbrace{(a-1)\cdot\left(a^2+a+1\right)}_{\text{razlika kubova}}=$$

$$=\left(a^3+1^3\right)+\left(a^3-1^3\right)=a^3+1+a^3-1=a^3+1+a^3-1=a^3+a^3=2\cdot a^3.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 181

$$\text{Ako je } f(x)=x^2-x+1, \text{ onda je } (a+1)\cdot f(a)+(a-1)\cdot f(-a) \text{ jednako:}$$

$$A.\ a^3+1 \qquad B.\ 2\cdot a^3 \qquad C.\ a^3-1 \qquad D.\ a^3$$

Rezultat: B.

Zadatak 182 (BT, gimnazija)

$$\text{Ako je } f(x)=a\cdot x^6+b\cdot x^4+c\cdot x^2-1, \text{ te } f(-1)=9, \text{ koliko je } f(1)?$$

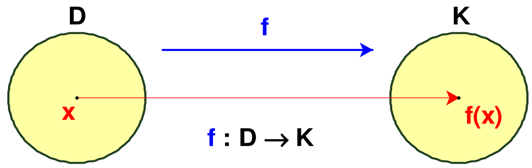
$$A.\ -9 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 9$$

Rješenje 182

Ponovimo!

$$(-a)^{2\cdot n}=a^{2\cdot n} \quad , \quad a=b \Rightarrow b=a.$$

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo:

- parnom, ako je f(– x) = f(x)
- neparnom, ako je f(– x) = – f(x).

1.inačica

Iz f(– 1) = 9 dobije se:

$$f(-1)=9 \Rightarrow a\cdot(-1)^6+b\cdot(-1)^4+c\cdot(-1)^2-1=9 \Rightarrow a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1-1=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b+c-1=9 \Rightarrow a+b+c=9+1 \Rightarrow a+b+c=10.$$

Tada f(1) iznosi:

$$f(1)=a\cdot 1^6+b\cdot 1^4+c\cdot 1^2-1 \Rightarrow f(1)=a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1-1 \Rightarrow f(1)=a+b+c-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\,a+b+c=10\,] \Rightarrow f(1)=10-1 \Rightarrow f(1)=9.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Uočimo da je funkcija $f(x)=a\cdot x^6+b\cdot x^4+c\cdot x^2-1$ parna.

$$f(-x)=a\cdot(-x)^6+b\cdot(-x)^4+c\cdot(-x)^2-1 \Rightarrow f(-x)=a\cdot x^6+b\cdot x^4+c\cdot x^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=\underbrace{a\cdot x^6+b\cdot x^4+c\cdot x^2-1}_{f(x)} \Rightarrow f(-x)=f(x).$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=f(1) \\ f(-1)=9 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=9.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 182

Ako je $f(x)=a\cdot x^6+b\cdot x^4+c\cdot x^2-1$, te $f(-1)=-9$, koliko je $f(1)$?

$A.\ -9$ $\quad B.\ 3$ $\quad C.\ 1$ $\quad D.\ 9$

Rezultat: A.

Zadatak 183 (Dino, tehnička škola)

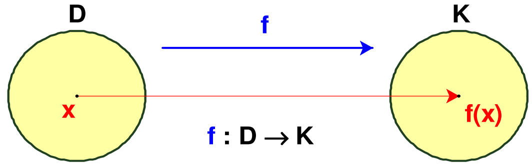
Ispitajte parnost funkcije $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^5-7\cdot x}-x^3$.

Rješenje 183

Ponovimo!

$$(-a)^{2\cdot n-1}=-a^{2\cdot n-1}.$$

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo:

- parnom, ako je f(– x) = f(x)
- neparnom, ako je f(– x) = – f(x).
- Funkcija f(x) = sin x je neparna:

$$\sin(-x)=-\sin x$$

- Funkcija f(x) = cos x je parna:

$$\cos(-x)=\cos x.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Umjesto x uvrstimo – x u jednadžbu. Računamo f(– x) i gledamo je li jednako f(x) ili – f(x).

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^5-7\cdot x}-x^3 \Rightarrow f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)^5-7\cdot(-x)}-(-x)^3 \Rightarrow f(-x)=\frac{-\sin x}{-x^5+7\cdot x}-\left(-x^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x)=\frac{-\sin x}{-x^5+7\cdot x}+x^3 \Rightarrow f(-x)=\frac{-\sin x}{-\left(x^5-7\cdot x\right)}+x^3 \Rightarrow f(-x)=\frac{\sin x}{x^5-7\cdot x}+x^3.$$

Vidi se da funkcija f nije parna, niti je neparna jer je

$$f(-x)\neq f(x) \quad , \quad f(-x)\neq -f(x).$$

Vježba 183

Ispitajte parnost funkcije $f(x)=\dfrac{x^3-3\cdot x}{\cos x}$.

Rezultat: Parna je.

Zadatak 184 (Sanja, gimnazija)

Provjerite je li funkcija $f(x)=x^2+3\cdot x+1$ injekcija.

Rješenje 184

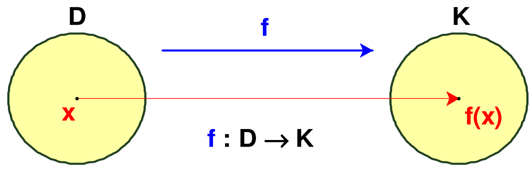
Ponovimo!

$$a+c=b+c \Rightarrow a=b \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da je injekcija, odnosno injektivno preslikavanje, ako

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y \qquad (x,\ y \in A).$$

Za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da je surjekcija, odnosno surjektivno preslikavanje, ako za svaki $y \in B$ postoji bar jedan $x \in A$ takav da je

$$y = f(x).$$

Funkcija $f : A \rightarrow B$ zove se bijekcija, ako je f istodobno injekcija i surjekcija.

Neka je $f : A \rightarrow B$ realna funkcija realne varijable. U nekim slučajevima pomoću sljedećeg postupka možemo ispitati je li funkcija f bijekcija.

Iz jednadžbe $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ računamo $f^{-1}(x)$.	
Ako rješenje:	**Funkcija f:**
• **ne postoji**	• **nije surjekcija**
• **nije jedinstveno**	• **nije injekcija**
• **postoji i jedinstveno je**	• **je bijekcija i f^{-1} je inverz funkcije f**

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

Provjerimo je li funkcija $f(x) = x^2 + 3 \cdot x + 1$ injekcija pomoću uvjeta $f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y.$

$$f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x^2 + 3 \cdot x + 1 = y^2 + 3 \cdot y + 1 \;\Rightarrow\; x^2 + 3 \cdot x + 1 = y^2 + 3 \cdot y + 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 + 3 \cdot x = y^2 + 3 \cdot y \;\Rightarrow\; x^2 + 3 \cdot x - y^2 - 3 \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 + 3 \cdot x - 3 \cdot y = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (x - y) \cdot (x + y) + 3 \cdot (x - y) = 0 \;\Rightarrow\; (x - y) \cdot (x + y) + 3 \cdot (x - y) = 0 \;\Rightarrow\; (x - y) \cdot (x + y + 3) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x - y = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = y \\ x = -y - 3 \end{matrix}\right\}.$$

Funkcija nije injekcija.

2.inačica

Trebamo riješiti kvadratnu jednadžbu po $f^{-1}(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+3\cdot x+1 \\ f\left(f^{-1}(x)\right)=x \end{array}\right\} \Rightarrow \left(f^{-1}(x)\right)^2+3\cdot f^{-1}(x)+1=x \Rightarrow \left(f^{-1}(x)\right)^2+3\cdot f^{-1}(x)+1-x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(f^{-1}(x)\right)^2+3\cdot f^{-1}(x)+1-x=0 \\ a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=1-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=1-x \\ \left(f^{-1}(x)\right)_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}(x)\right)_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(1-x)}}{2\cdot 1} \Rightarrow \left(f^{-1}(x)\right)_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4+4\cdot x}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}(x)\right)_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5+4\cdot x}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(f^{-1}(x)\right)_1=\dfrac{-3+\sqrt{5+4\cdot x}}{2} \\ \left(f^{-1}(x)\right)_2=\dfrac{-3-\sqrt{5+4\cdot x}}{2} \end{array}\right\}.$$

Budući da jednadžba

$$\left(f^{-1}(x)\right)^2+3\cdot f^{-1}(x)+1-x=0$$

ima dva rješenja (rješenje nije jednoznačno), zaključujemo da funkcija f nije injekcija.

Vježba 184

Provjerite je li funkcija $f(x)=x^2+3\cdot x+2$ injekcija.

Rezultat: Nije injekcija.

Zadatak 185 (Roby, gimnazija)

Pokažite da je funkcija $f(x)=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x-a}$, $a,\ b,\ c\in R,\ a\neq 0,\ c\neq 0$ inverzna sama sebi.

Rješenje 185

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

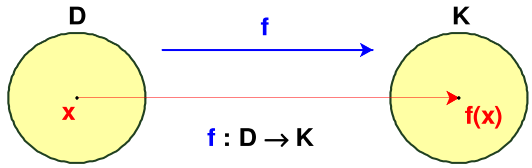
Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f : A \to B,\ g : B \to C$ funkcije zadane na A, odnosno na B sa vrijednostima u B, odnosno u C. Tada je sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ , \ \forall x \in A$$

zadana funkcija $g \circ f : A \to C$ koja se zove kompozicija (složena funkcija) funkcija f i g.

Inverzna funkcija

Neka je $f : A \to B$ bijekcija. Tada postoji jedna i samo jedna bijekcija $g : B \to A$ takva da je

$$(g \circ f)(x) = x \ , \ \forall x \in A$$

$$(f \circ g)(y) = y \ , \ \forall y \in B.$$

Ta jedinstvena bijekcija g označava se sa f^{-1} i zove inverzna funkcija funkcije f.

Zapamtimo!

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x \ , \ \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Budući da je funkcija f inverzna sama sebi, mora vrijediti

$$(f \circ f)(x) = x \ \Rightarrow \ f(f(x)) = x.$$

1.inačica

$$f(f(x)) = f(f(x)) = \frac{a \cdot f(x) + b}{c \cdot f(x) - a} = \frac{a \cdot \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x - a} + b}{c \cdot \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x - a} - a} = \frac{\frac{a \cdot (a \cdot x + b)}{c \cdot x - a} + b}{\frac{c \cdot (a \cdot x + b)}{c \cdot x - a} - a} = \frac{\frac{a^2 \cdot x + a \cdot b}{c \cdot x - a} + b}{\frac{a \cdot c \cdot x + b \cdot c}{c \cdot x - a} - a} =$$

$$= \frac{\frac{a^2 \cdot x + a \cdot b}{c \cdot x - a} + \frac{b}{1}}{\frac{a \cdot c \cdot x + b \cdot c}{c \cdot x - a} - \frac{a}{1}} = \frac{\frac{a^2 \cdot x + a \cdot b + b \cdot (c \cdot x - a)}{c \cdot x - a}}{\frac{a \cdot c \cdot x + b \cdot c - a \cdot (c \cdot x - a)}{c \cdot x - a}} = \frac{\frac{a^2 \cdot x + a \cdot b + b \cdot c \cdot x - a \cdot b}{c \cdot x - a}}{\frac{a \cdot c \cdot x + b \cdot c - a \cdot c \cdot x + a^2}{c \cdot x - a}} =$$

$$= \frac{\frac{a^2 \cdot x + a \cdot b + b \cdot c \cdot x - a \cdot b}{c \cdot x - a}}{\frac{a \cdot c \cdot x + b \cdot c - a \cdot c \cdot x + a^2}{c \cdot x - a}} = \frac{\frac{a^2 \cdot x + b \cdot c \cdot x}{c \cdot x - a}}{\frac{b \cdot c + a^2}{c \cdot x - a}} = \frac{\frac{a^2 \cdot x + b \cdot c \cdot x}{c \cdot x - a}}{\frac{b \cdot c + a^2}{c \cdot x - a}} = \frac{\frac{a^2 \cdot x + b \cdot c \cdot x}{1}}{\frac{b \cdot c + a^2}{1}} =$$

$$= \frac{a^2 \cdot x + b \cdot c \cdot x}{b \cdot c + a^2} = \frac{x \cdot \left(a^2 + b \cdot c\right)}{a^2 + b \cdot c} = \frac{x \cdot \left(a^2 + b \cdot c\right)}{a^2 + b \cdot c} = x.$$

2.inačica

$$f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x-a}\right)=\frac{a\cdot\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x-a}+b}{c\cdot\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x-a}-a}=\frac{\frac{a\cdot\left(a\cdot x+b\right)}{c\cdot x-a}+b}{\frac{c\cdot\left(a\cdot x+b\right)}{c\cdot x-a}-a}=\frac{\frac{a^{2}\cdot x+a\cdot b}{c\cdot x-a}+b}{\frac{a\cdot c\cdot x+b\cdot c}{c\cdot x-a}-a}=$$

$$=\frac{\frac{a^{2}\cdot x+a\cdot b}{c\cdot x-a}+b}{\frac{a\cdot c\cdot x+b\cdot c}{c\cdot x-a}-a}\cdot\frac{c\cdot x-a}{c\cdot x-a}=\frac{a^{2}\cdot x+a\cdot b+b\cdot\left(c\cdot x-a\right)}{a\cdot c\cdot x+b\cdot c-a\cdot\left(c\cdot x-a\right)}=\frac{a^{2}\cdot x+a\cdot b+b\cdot c\cdot x-a\cdot b}{a\cdot c\cdot x+b\cdot c-a\cdot c\cdot x+a^{2}}=$$

$$=\frac{a^{2}\cdot x+a\cdot b+b\cdot c\cdot x-a\cdot b}{a\cdot c\cdot x+b\cdot c-a\cdot c\cdot x+a^{2}}=\frac{a^{2}\cdot x+b\cdot c\cdot x}{b\cdot c+a^{2}}=\frac{x\cdot\left(a^{2}+b\cdot c\right)}{a^{2}+b\cdot c}=\frac{x\cdot\left(a^{2}+b\cdot c\right)}{a^{2}+b\cdot c}=x.$$

Vježba 185

Pokažite da je funkcija $f\left(x\right)=\frac{x+3}{2\cdot x-1}$ inverzna sama sebi.

Rezultat: Dokaz analogan. Funkcija je inverzna sama sebi.

Zadatak 186 (Ante, gimnazija)

Dokažite da je kompozicija polinoma prvog stupnja polinom prvog stupnja.

Rješenje 186

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f:A\rightarrow B,\ g:B\rightarrow C$ funkcije zadane na A, odnosno na B sa vrijednostima u B, odnosno u C. Tada je sa

$$\left(g\circ f\right)\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)\ ,\ \forall x\in A$$

zadana funkcija $g\circ f:A\rightarrow C$ koja se zove kompozicija (složena funkcija) funkcija f i g.
Polinom stupnja n je funkcija f : R → R definirana s

$$f\left(x\right)=a_{n}\cdot x^{n}+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_{2}\cdot x^{2}+a_{1}\cdot x+a_{0},$$

gdje su a_0, a_1, a_2, … , a_n realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve a_0, a_1, a_2, … , a_n nazivamo koeficijentima polinoma. Koeficijent a_n nazivamo vodećim koeficijentom, koeficijent a_0 slobodnim koeficijentom. Gornji zapis nazivamo kanonskim (standardnim) oblikom polinoma jedne varijable.
Neka su zadani polinomi prvog stupnja

$$f\left(x\right)=a\cdot x+b\quad,\quad g\left(x\right)=c\cdot x+d,$$

gdje su $a,\ b,\ c,\ d\in R,\ a\neq 0,\ c\neq 0.$
Kompozicija f ○ g jednaka je:

- $\left(f\circ g\right)\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(g\left(x\right)\right)=a\cdot g\left(x\right)+b=a\cdot\left(c\cdot x+d\right)+b=a\cdot c\cdot x+a\cdot d+b$

ili

- $\left(f\circ g\right)\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(c\cdot x+d\right)=a\cdot\left(c\cdot x+d\right)+b=a\cdot c\cdot x+a\cdot d+b.$

Stavimo li da je

$$a\cdot c=m\quad,\quad a\cdot d+b=n,$$

gdje su $m,\ n\in R,$ dobije se

$$\left(f\circ g\right)\left(x\right)=m\cdot x+n.$$

To je polinom prvog stupnja.
Kompozicija g ○ f jednaka je:

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x)) = c \cdot f(x) + d = c \cdot (a \cdot x + b) + d = a \cdot c \cdot x + b \cdot c + d$

ili

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x)) = g(a \cdot x + b) = c \cdot (a \cdot x + b) + d = a \cdot c \cdot x + b \cdot c + d.$

Stavimo li da je
$$a \cdot c = m \quad , \quad b \cdot c + d = r,$$
gdje su $m, r \in R$, dobije se
$$(g \circ f)(x) = m \cdot x + r.$$
To je polinom prvog stupnja.

Vježba 186

Zadani su polinomi prvog stupnja $f(x) = x + 3$ i $g(x) = x + 5$. Nađi kompozicije f ○ g i g ○ f.

Rezultat: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x + 8.$

Zadatak 187 (4A, 4B, TUPŠ)

Funkcija $f(x) = 5^{2 \cdot x + 6}$ jednaka je funkciji:

$A.\ 25^{x+3} \qquad B.\ 2 \cdot 5^{x+3} \qquad C.\ 5^{2 \cdot x} + 3 \qquad D.\ 25^{x+6}$

Rješenje 187

Ponovimo!
$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n \cdot m}.$$
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$
Postavljenu funkciju prepravimo na sljedeći oblik.
$$f(x) = 5^{2 \cdot x + 6} \Rightarrow f(x) = 5^{2 \cdot (x+3)} \Rightarrow f(x) = \left(5^{2}\right)^{x+3} \Rightarrow f(x) = 25^{x+3}.$$
Odgovor je pod A.

Vježba 187

Funkcija $f(x) = 5^{2 \cdot x + 12}$ jednaka je funkciji:

$A.\ 25^{x+3} \qquad B.\ 2 \cdot 5^{x+3} \qquad C.\ 5^{2 \cdot x} + 3 \qquad D.\ 25^{x+6}$

Rezultat: D.

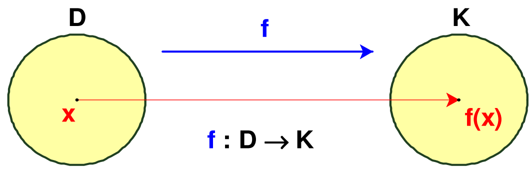
Zadatak 188 (4A, 4B, TUPŠ)

Ako je $(g \circ f)(x) = \frac{1 - x^{2}}{x^{2}}$, $x \neq 0$ i $f(x) = 1 - x^{2}$, pronađite $g(x)$.

Rješenje 188

Ponovimo!

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije
K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije
x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla
f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f:A\to B$, $g:B\to C$ funkcije zadane na A, odnosno na B sa vrijednostima u B, odnosno u C. Tada je sa

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)) \;,\; \forall x\in A$$

zadana funkcija $g\circ f:A\to C$ koja se zove kompozicija (složena funkcija) funkcija f i g.
Iz postavljene kompozicije dobije se

$$(g\circ f)(x)=\frac{1-x^2}{x^2} \Rightarrow g(f(x))=\frac{1-x^2}{x^2} \Rightarrow \left[f(x)=1-x^2\right] \Rightarrow g\left(1-x^2\right)=\frac{1-x^2}{x^2}.$$

Budući da je za funkciju g

$$g\left(1-x^2\right)=\frac{1-x^2}{x^2},$$

slijedi

$$g\left(1-x^2\right)=\frac{1-x^2}{x^2} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{supstitucija}\\ 1-x^2=y\\ x^2=1-y\end{bmatrix} \Rightarrow g(y)=\frac{y}{1-y}.$$

Funkcija g zadana je izrazom

$$g(x)=\frac{x}{1-x}.$$

Vježba 188

Ako je $(g\circ f)(x)=\frac{1-x}{x}$, $x\neq 0$ i $f(x)=1-x$, pronađite $g(x)$.

Rezultat: $g(x)=\frac{x}{1-x}.$

Zadatak 189 (Goran, gimnazija)

Rastavi funkciju na parcijalne razlomke $f(x)=\frac{x^2+2}{x^3-3\cdot x+2}.$

Rješenje 189

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad,\quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad,\quad n=\frac{n}{1} \quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}=\frac{a}{b\cdot c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednakost polinoma

Dva polinoma su jednaka ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Za zadane funkcije f i g i realne brojeve A i B funkcija h = A · f + B · g zove se linearna kombinacija funkcija f i g.

Rastav na parcijalne razlomke

Racionalnu funkciju $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rastaviti na parcijalne razlomke znači prikazati je kao zbroj jednostavnih racionalnih funkcija:

$$\frac{A}{\left(x-x_0\right)^n} \text{ ili } \frac{A\cdot x+B}{\left(x^2+b\cdot x+c\right)^n}, \text{ gdje je } n\geq 1.$$

Izraz $x - x_0$ je linearni faktor, a izraz $x^2 + b \cdot x + c$ je kvadratni faktor s negativnom diskriminantom polinoma $Q_n(x)$.

Zadanu funkciju preoblikujemo na ovaj način:

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^3-3\cdot x+2} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2}{x^3-4\cdot x+x+2} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2}{\left(x^3-4\cdot x\right)+(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2}{x\cdot\left(x^2-4\right)+(x+2)} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)+(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)+(x+2)} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2}{(x+2)\cdot(x\cdot(x-2)+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2}{(x+2)\cdot\left(x^2-2\cdot x+1\right)} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+2}{(x+2)\cdot(x-1)^2}.$$

Racionalnu funkciju f(x) prikazat ćemo kao linearnu kombinaciju racionalnih funkcija:

$$\frac{1}{x+2} \;,\; \frac{1}{x-1} \;,\; \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Prema uvjetu zadatka treba odrediti realne brojeve A, B i C takve da vrijedi:

$$\frac{x^2+2}{(x+2)\cdot(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s $(x+2)\cdot(x-1)^2$ dobije se:

$$\frac{x^2+2}{(x+2)\cdot(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2}{(x+2)\cdot(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \ /\cdot (x+2)\cdot(x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2=A\cdot(x-1)^2+B\cdot(x+2)\cdot(x-1)+C\cdot(x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2=A\cdot\left(x^2-2\cdot x+1\right)+B\cdot\left(x^2-x+2\cdot x-2\right)+C\cdot(x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2=A\cdot\left(x^2-2\cdot x+1\right)+B\cdot\left(x^2+x-2\right)+C\cdot(x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2=A\cdot x^2-2\cdot A\cdot x+A+B\cdot x^2+B\cdot x-2\cdot B+C\cdot x+2\cdot C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2=(A+B)\cdot x^2+(-2\cdot A+B+C)\cdot x+(A-2\cdot B+2\cdot C).$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma mora vrijediti:

$$x^2+2=(A+B)\cdot x^2+(-2\cdot A+B+C)\cdot x+(A-2\cdot B+2\cdot C) \Rightarrow$$

$$1\cdot x^2+0\cdot x+2=(A+B)\cdot x^2+(-2\cdot A+B+C)\cdot x+(A-2\cdot B+2\cdot C) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1=A+B \\ 0=-2\cdot A+B+C \\ 2=A-2\cdot B+2\cdot C \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ -2\cdot A+B+C=0 \\ A-2\cdot B+2\cdot C=2 \end{array}\right\}.$$

Riješimo sustav triju jednadžbi sa tri nepoznanice:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ -2\cdot A+B+C=0 \\ A-2\cdot B+2\cdot C=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=1-A \\ -2\cdot A+B+C=0 \\ A-2\cdot B+2\cdot C=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot A+1-A+C=0 \\ A-2\cdot(1-A)+2\cdot C=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot A+1-A+C=0 \\ A-2+2\cdot A+2\cdot C=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3\cdot A+C=-1 \\ 3\cdot A+2\cdot C=2+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3\cdot A+C=-1 \\ 3\cdot A+2\cdot C=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot C=3 \Rightarrow 3\cdot C=3 \ /:3 \Rightarrow C=1.$$

Računamo A.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot A+2\cdot C=4 \\ C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot A+2\cdot 1=4 \Rightarrow 3\cdot A+2=4 \Rightarrow 3\cdot A=4-2 \Rightarrow 3\cdot A=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot A=2 \ /:3 \Rightarrow A=\frac{2}{3}.$$

Računamo B.

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ A=\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3}+B=1 \Rightarrow B=1-\frac{2}{3} \Rightarrow B=\frac{1}{1}-\frac{2}{3} \Rightarrow B=\frac{3-2}{3} \Rightarrow B=\frac{1}{3}.$$

Zadana funkcija rastavljena na parcijalne razlomke glasi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3-3\cdot x+2} \\ f(x)=\dfrac{x^2+2}{(x+2)\cdot(x-1)^2} \\ f(x)=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A=\dfrac{2}{3} \\ B=\dfrac{1}{3} \\ C=1 \end{array}\right] \Rightarrow f(x)=\dfrac{\frac{2}{3}}{x+2}+\dfrac{\frac{1}{3}}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3\cdot(x+2)}+\frac{1}{3\cdot(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Vježba 189

Rastavi funkciju na parcijalne razlomke $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-x^2-x+1}$.

Rezultat: $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2\cdot(x+1)}=\ldots=\dfrac{1}{2\cdot(x-1)^2}+\dfrac{3}{4\cdot(x-1)}+\dfrac{1}{4\cdot(x+1)}$.

Zadatak 190 (Mario, gimnazija)

Za funkcije $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ i $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ izračunaj $(g\circ f)(x)$.

Rješenje 190

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Za kompoziciju funkcija f i g vrijedi:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))\quad,\quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(f(x))=g\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=g\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{1}{\frac{x+1}{x+2}-1}=\frac{1}{\frac{x+1}{x+2}-\frac{1}{1}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{x+1-(x+2)}{x+2}}=\frac{1}{\frac{x+1-x-2}{x+2}}=\frac{1}{\frac{x+1-x-2}{x+2}}=\frac{1}{\frac{1-2}{x+2}}=\frac{1}{\frac{-1}{x+2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{-1}{x+2}}=-\frac{x+2}{1}=-(x+2)=-x-2.$$

2.inačica

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(f(x))=\frac{1}{f(x)-1}=\frac{1}{f(x)-1}=\frac{1}{\frac{x+1}{x+2}-1}=\frac{1}{\frac{x+1}{x+2}-\frac{1}{1}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{x+1-(x+2)}{x+2}}=\frac{1}{\frac{x+1-x-2}{x+2}}=\frac{1}{\frac{x+1-x-2}{x+2}}=\frac{1}{\frac{1-2}{x+2}}=\frac{1}{\frac{-1}{x+2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{-1}{x+2}}=-\frac{x+2}{1}=-(x+2)=-x-2.$$

Vježba 190

Za funkcije $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ i $g(x)=\frac{-1}{1-x}$ izračunaj $(g\circ f)(x)$.

Rezultat: $(g\circ f)(x)=-x-2.$

Zadatak 191 (Iva, gimnazija)

Funkcije f i g zadane su tablično.

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
f(x)	– 1	0	4	2	0	– 1	1
g(x)	– 4	– 3	– 2	1	3	0	– 1

Ako je funkcija f(x) definirana kao kompozicija $h(x)=(f\circ g)(x)$, koliko je h(– 2)?

$A.\ -2 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 1$

Rješenje 191

Ponovimo!

Za kompoziciju funkcija f i g vrijedi:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Uočimo da vrijedi:

$$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

Tada je

$$h(-2)=f(g(-2))$$

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
f(x)	– 1	0	4	2	0	– 1	1
g(x)	– 4	– 3	– 2	1	3	0	– 1

$$h(-2)=f(-3)$$

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
f(x)	– 1	0	4	2	0	– 1	1
g(x)	– 4	– 3	– 2	1	3	0	– 1

$$h(-2)=-1.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 191

Funkcije f i g zadane su tablično.

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
f(x)	– 1	0	4	2	0	– 1	1
g(x)	– 4	– 3	– 2	1	3	0	– 1

Ako je funkcija f(x) definirana kao kompozicija $h(x)=(f\circ g)(x)$, koliko je h(2)?

$A.\ -2 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 1$

Rezultat: C.

Zadatak 192 (4A, 4B, TUPŠ)

Odredi parametar a u funkciji f(x) = a · x + 5, ako je f(– 1) = 4.

Rješenje 192

Ponovimo!

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x+5 \\ f(-1)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x+5 \\ x=-1 \\ f(-1)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot(-1)+5=4 \Rightarrow -a+5=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a=4-5 \Rightarrow -a=-1 \Rightarrow -a=-1 \;/\cdot(-1) \Rightarrow a=1.$$

Vježba 192

Odredi parametar a u funkciji f(x) = a · x + 5, ako je f(– 1) = 2.

Rezultat: a = 3.

Zadatak 193 (4A, 4B, TUPŠ)

Odredi parametar b u funkciji f(x) = 2 · x + b, ako je f(– 2) = 7.

Rješenje 193

Ponovimo!

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x+b \\ f(-2)=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x+b \\ x=-2 \\ f(-2)=7 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(-2)+b=7 \Rightarrow -4+b=7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=7+4 \Rightarrow b=11.$$

Vježba 193

Odredi parametar b u funkciji f(x) = 2 · x + b, ako je f(– 2) = 2.

Rezultat: b = 6.

Zadatak 194 (Marin, srednja škola)

Odredite $f(7x)$ ako je $f(x+2)=5\cdot x-1$.

Rješenje 194

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Pomoću zamjene (supstitucije)

$$t=x+2$$

odredimo funkciju f.

$$\left.\begin{array}{l} f(x+2)=5\cdot x-1 \\ t=x+2 \\ x=t-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(t)=5\cdot(t-2)-1 \Rightarrow f(t)=5\cdot t-10-1 \Rightarrow f(t)=5\cdot t-11.$$

Tada je

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=5\cdot t-11 \\ t=7x \end{array}\right\} \Rightarrow f(7x)=5\cdot(7x)-11 \Rightarrow f(7x)=35\cdot x-11.$$

Vježba 194

Odredite $f(3x)$ ako je $f(x+2)=5\cdot x-1.$

Rezultat: $f(3x)=15\cdot x-11.$

Zadatak 195 (Nina, elektrotehnička škola)

Odredite kompoziciju f ∘ g funkcija $f(x)=2\cdot x-x^2$ i $g(x)=8-x^2.$

Rješenje 195

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kompozicija funkcija

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x-x^2 \\ g(x)=8-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=2\cdot g(x)-(g(x))^2=$$

$$=2\cdot g(x)-(g(x))^2=2\cdot\left(8-x^2\right)-\left(8-x^2\right)^2=2\cdot\left(8-x^2\right)-\left(64-16\cdot x^2+x^4\right)^2=$$

$$=16-2\cdot x^2-64+16\cdot x^2-x^4=-x^4+14\cdot x^2-48.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x-x^2 \\ g(x)=8-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=f\left(8-x^2\right)=f\left(8-x^2\right)=$$

$$=2\cdot\left(8-x^2\right)-\left(8-x^2\right)^2=2\cdot\left(8-x^2\right)-\left(64-16\cdot x^2+x^4\right)^2=$$

$$=16-2\cdot x^2-64+16\cdot x^2-x^4=-x^4+14\cdot x^2-48.$$

Vježba 195

Odredite kompoziciju f ∘ g funkcija $f(x)=2\cdot x-x^2$ i $g(x)=1-x^2.$

Rezultat: $1-x^4.$

Zadatak 196 (Nina, elektrotehnička škola)

Odredite kompoziciju g ○ f funkcija $f(x)=2\cdot x-x^2$ i $g(x)=8-x^2$.

Rješenje 196

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kompozicija funkcija

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x-x^2 \\ g(x)=8-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(f(x))=8-(f(x))^2=$$

$$=8-(f(x))^2=8-\left(2\cdot x-x^2\right)^2=8-\left(4\cdot x^2-4\cdot x^3+x^4\right)=8-4\cdot x^2+4\cdot x^3-x^4=$$

$$-x^4+4\cdot x^3-4\cdot x^2+8.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x-x^2 \\ g(x)=8-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(f(x))=g\left(2\cdot x-x^2\right)=g\left(2\cdot x-x^2\right)=$$

$$=8-\left(2\cdot x-x^2\right)^2=8-\left(4\cdot x^2-4\cdot x^3+x^4\right)=8-4\cdot x^2+4\cdot x^3-x^4=-x^4+4\cdot x^3-4\cdot x^2+8.$$

Vježba 196

Odredite kompoziciju g ○ f funkcija $f(x)=2\cdot x-x^2$ i $g(x)=1-x^2$.

Rezultat: $-x^4+4\cdot x^3-4\cdot x^2+1.$

Zadatak 197 (Nina, elektrotehnička škola)

Odredite kompoziciju f ○ g funkcija $f(x)=x^2+9\cdot x$ i $g(x)=\sqrt{x+9}$.

Rješenje 197

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Kompozicija funkcija

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2+9\cdot x \\ g(x)=\sqrt{x+9} \end{array}\right\} \Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=(g(x))^2+9\cdot g(x)=$$

$$=(g(x))^2+9\cdot g(x)=\left(\sqrt{x+9}\right)^2+9\cdot\sqrt{x+9}=x+9+9\cdot\sqrt{x+9}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^{2}+9\cdot x \\ g(x)=\sqrt{x+9} \end{array}\right\} \Rightarrow (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=f\left(\sqrt{x+9}\right)=f\left(\sqrt{x+9}\right)=$$

$$=\left(\sqrt{x+9}\right)^{2}+9\cdot\sqrt{x+9}=x+9+9\cdot\sqrt{x+9}.$$

Vježba 197

Odredite kompoziciju f ○ g funkcija $f(x)=x^{2}+5\cdot x$ i $g(x)=\sqrt{x+5}.$

Rezultat: $x+5+5\cdot\sqrt{x+5}.$

Zadatak 198 (Nina, elektrotehnička škola)

Odredite kompoziciju g ○ f funkcija $f(x)=x^{2}+9\cdot x$ i $g(x)=\sqrt{x+9}.$

Rješenje 198

Ponovimo!

Kompozicija funkcija

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad , \quad (g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^{2}+9\cdot x \\ g(x)=\sqrt{x+9} \end{array}\right\} \Rightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(f(x))=\sqrt{f(x)+9}=\sqrt{f(x)+9}=$$

$$=\sqrt{x^{2}+9\cdot x+9}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^{2}+9\cdot x \\ g(x)=\sqrt{x+9} \end{array}\right\} \Rightarrow (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(f(x))=g\left(x^{2}+9\cdot x\right)=g\left(x^{2}+9\cdot x\right)=$$

$$=\sqrt{x^{2}+9\cdot x+9}.$$

Vježba 198

Odredite kompoziciju g ○ f funkcija $f(x)=x^{2}+5\cdot x$ i $g(x)=\sqrt{x+5}.$

Rezultat: $\sqrt{x^{2}+5\cdot x+5}.$

Zadatak 199 (Tihomir, elektrotehnička škola)

Zadane su funkcije $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$ i $g(x)=x^{2}-3.$ Čemu je jednaka kompozicija tih funkcija $(f\circ g)(x)$?

$$A.\ (f\circ g)(x)=\frac{x^{2}}{x-1} \qquad B.\ (f\circ g)(x)=\frac{x^{3}+3\cdot x^{2}-3\cdot x-9}{x-1}$$

$$C.\ (f\circ g)(x)=\frac{x^{2}}{x^{2}-4} \qquad D.\ (f\circ g)(x)=\frac{x^{3}-x^{2}-2\cdot x+6}{x^{2}-4}$$

Rješenje 199

Ponovimo!

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f:A\rightarrow B,\ g:B\rightarrow C$ funkcije zadane na A, odnosno na B sa vrijednostima u B, odnosno u C. Tada je sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ , \ \forall x \in A$$

zadana funkcija $g \circ f : A \to C$ koja se zove kompozicija (složena funkcija) funkcija f i g.

Kompozicija funkcija

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

1.inačica

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x+3}{x-1} \\ g(x) &= x^2 - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(x)) = \frac{g(x)+3}{g(x)-1} = \frac{x^2-3+3}{x^2-3-1} = \frac{x^2-3+3}{x^2-3-1} =$$

$$= \frac{x^2}{x^2-3-1} = \frac{x^2}{x^2-4}.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x+3}{x-1} \\ g(x) &= x^2 - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(x)) = f\left(x^2-3\right) = f\left(x^2-3\right) =$$

$$= \frac{\left(x^2-3\right)+3}{\left(x^2-3\right)-1} = \frac{x^2-3+3}{x^2-3-1} = \frac{x^2-3+3}{x^2-3-1} = \frac{x^2}{x^2-3-1} = \frac{x^2}{x^2-4}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 199

Zadane su funkcije $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ i $g(x) = x^2 - 2.$ Čemu je jednaka kompozicija tih funkcija $(f \circ g)(x)$?

$A.\ (f \circ g)(x) = \frac{x^2}{x-2}$ $\qquad B.\ (f \circ g)(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 3}{x-1}$

$C.\ (f \circ g)(x) = \frac{x^2}{x^2-3}$ $\qquad D.\ (f \circ g)(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2 \cdot x + 3}{x^2-3}$

Rezultat: C.

Zadatak 200 (Dada, gimnazija)

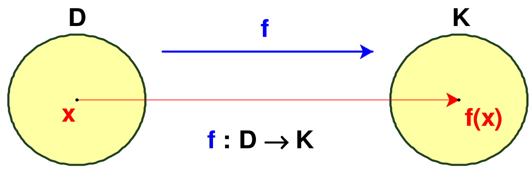
Za funkciju f vrijedi $x \cdot f(x) + f(1-x) = 2 \cdot x,$ za svaki $x \in D_f.$ Izračunajte f(0).

$A.\ 0 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 3$

Rješenje 200

Ponovimo!

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije
K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije
x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla
f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla
Promotrimo zadanu funkcijsku jednadžbu za x = 0 i x = 1:

- $$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x\cdot f(x)+f(1-x)=2\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 0\cdot f(0)+f(1-0)=2\cdot 0 \Rightarrow 0+f(1)=0 \Rightarrow f(1)=0.$$
- $$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ x\cdot f(x)+f(1-x)=2\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 1\cdot f(1)+f(1-1)=2\cdot 1 \Rightarrow f(1)+f(0)=2.$$

Računamo f(0).

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(1)+f(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0+f(0)=2 \Rightarrow f(0)=2.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 200

Za funkciju f vrijedi $f(x)+x\cdot f(1-x)=2\cdot x$, za svaki $x\in D_f$. Izračunajte f(1).

A. 0 *B*. 1 *C*. 2 *D*. 3

Rezultat: C.