Zadatak 201 (Jelena, gimnazija)

Za funkciju $f(x)=2^x+1$ vrijedi $f(x+1)=2\cdot f(x)-1$. Dokažite.

Rješenje 201

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$f(x)=2^x+1 \Rightarrow f(x+1)=2^{x+1}+1 \Rightarrow f(x+1)=2^x\cdot 2^1+1 \Rightarrow f(x+1)=2^x\cdot 2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+1)=2\cdot 2^x+1 \Rightarrow f(x+1)=2\cdot 2^x+2-1 \Rightarrow f(x+1)=\left(2\cdot 2^x+2\right)-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+1)=2\cdot\left(2^x+1\right)-1 \Rightarrow \left[f(x)=2^x+1\right] \Rightarrow f(x+1)=2\cdot f(x)-1.$$

Vježba 201

Za funkciju $f(x)=3^x+1$ vrijedi $f(x+1)=3\cdot f(x)-2$. Dokažite.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 202 (Jelena, gimnazija)

Ako je $f\left(x^2+1\right)=x^4+5\cdot x^2+3$, onda je $f\left(x^2-1\right)$ jednako:

$A.\ x^4-x^2-1 \qquad B.\ x^2+3\cdot x-1 \qquad C.\ x^4-x+1 \qquad D.\ x^4+x^2-3$

Rješenje 202

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Najprije odredimo funkciju f.

$$f\left(x^2+1\right)=x^4+5\cdot x^2+3 \Rightarrow f\left(x^2+1\right)=\left(x^2\right)^2+5\cdot x^2+3 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zamjena}\\ x^2+1=t\\ x^2=t-1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=(t-1)^2+5\cdot(t-1)+3 \Rightarrow f(t)=t^2-2\cdot t+1+5\cdot t-5+3 \Rightarrow f(t)=t^2+3\cdot t-1.$$

Funkcija f glasi:

$$f(x)=x^2+3\cdot x-1.$$

Sada računamo:

$$f\left(x^2-1\right)=\left[f(x)=x^2+3\cdot x-1\right]=\left(x^2-1\right)^2+3\cdot\left(x^2-1\right)-1=x^4-2\cdot x^2+1+3\cdot x^2-3-1=$$

$$=x^4-2\cdot x^2+1+3\cdot x^2-3-1=x^4-2\cdot x^2+3\cdot x^2-3=x^4+x^2-3.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f\left(x^2+1\right)=x^4+5\cdot x^2+3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5\cdot x^2=2\cdot x^2+3\cdot x^2 \\ 3=1+2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(x^2+1\right)=x^4+2\cdot x^2+1+3\cdot x^2+2 \Rightarrow f\left(x^2+1\right)=x^4+2\cdot x^2+1+3\cdot x^2+3-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(x^2+1\right)=\left(x^4+2\cdot x^2+1\right)+\left(3\cdot x^2+3\right)-1 \Rightarrow f\left(x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)^2+3\cdot\left(x^2+1\right)-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ x^2+1=t \end{array}\right] \Rightarrow f(t)=t^2+3\cdot t-1.$$

Funkcija f glasi:

$$f(x)=x^2+3\cdot x-1.$$

Sada računamo:

$$f\left(x^2-1\right)=\left[f(x)=x^2+3\cdot x-1\right]=\left(x^2-1\right)^2+3\cdot\left(x^2-1\right)-1=x^4-2\cdot x^2+1+3\cdot x^2-3-1=$$

$$=x^4-2\cdot x^2+1+3\cdot x^2-3-1=x^4-2\cdot x^2+3\cdot x^2-3=x^4+x^2-3.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 202

Ako je $f\left(x^2-1\right)=x^4+x^2-3,$ onda je $f\left(x^2+1\right)$ jednako:

$A.\ x^4+3\cdot x^2-1 \qquad B.\ x^4+5\cdot x+3 \qquad C.\ x^4+5\cdot x+1 \qquad D.\ x^4+x^2-3$

Rezultat: B.

Zadatak 203 (Ivan, gimnazija)

Zadana je funkcija $f(x)=\dfrac{3+x}{x-2}.$ Odredite sjecišta grafa zadane funkcije s koordinatnim osima.

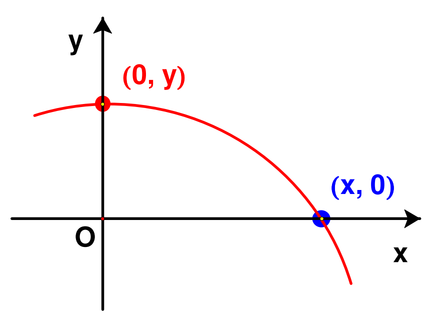
Rješenje 203

Ponovimo!

$$\frac{0}{n}=0 \text{ za svaki } n\in N \quad , \quad \frac{0}{-n}=0 \text{ za svaki } n\in N.$$

$$\frac{a}{b}=0 \ , \ b\neq 0 \Rightarrow a=0.$$

Racionalan broj koji ima u brojniku nulu jednak je nuli.



Graf funkcije f presijeca os x u točki (x, 0). Graf funkcije f presijeca os y u točki (0, y).

- Odredimo sjecište grafa funkcije $f(x)=\frac{3+x}{x-2}$ s osi x.

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ f(x)=\frac{3+x}{x-2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{3+x}{x-2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3+x}{x-2}=0 \\ x-2\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+x=0 \Rightarrow x=-3.$$

Sjecište ima koordinate $(-3,\ 0)$.

- Odredimo sjecište grafa funkcije $f(x)=\frac{3+x}{x-2}$ s osi y.

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \\ f(x)=\frac{3+x}{x-2} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{3+x}{x-2} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{3+0}{0-2} \Rightarrow y=\frac{3}{-2} \Rightarrow y=-\frac{3}{2}.$$

Sjecište ima koordinate $\left(0,\ -\frac{3}{2}\right)$.

Vježba 203

Zadana je funkcija $f(x)=\frac{4+x}{x-2}$. Odredite sjecišta grafa zadane funkcije s koordinatnim osima.

Rezultat: $(-4,\ 0)$, $(0,\ -2)$.

Zadatak 204 (Mario, gimnazija)

Ako je $a*b=\frac{a+b}{a\cdot b}$, je li ova operacija komutativna?

Rješenje 204

Ponovimo!

Za bilo koja dva realna broja a i b vrijedi:

$$a+b=b+a \ -\ \text{komutativnost zbrajanja}$$

$$a\cdot b=b\cdot a \ -\ \text{komutativnost množenja}.$$

Provjerimo je li operacija * komutativna, tj. vrijedi li:

$$a*b=b*a.$$

$$\left.\begin{array}{l} a*b=\frac{a+b}{a\cdot b} \\ b*a=\frac{b+a}{b\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a*b=\frac{a+b}{a\cdot b} \\ b*a=\frac{a+b}{a\cdot b} \end{array}\right\} \Rightarrow a*b=b*a.$$

Operacija * je komutativna.

Vježba 204

Ako je $a*b=\frac{a\cdot b}{a+b}$, je li ova operacija komutativna?

Rezultat: Da.

Zadatak 205 (Tin, gimnazija)

Ako je $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$, $g(x)=\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}$, dokaži da je $(f\circ g)(x)=3\cdot f(x)$.

Rješenje 205

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\quad,\quad (a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3.$$

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\quad,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \qquad a=b^c$$
$$\rightarrow$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x=\log x.$$

$$\log a^n=n\cdot\log a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=\log\frac{1+g(x)}{1-g(x)}=\log\frac{1+\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{1-\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}=\log\frac{\frac{1}{1}+\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{\frac{1}{1}-\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}=$$

$$=\log\frac{\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{\frac{3\cdot x^2+1-\left(3\cdot x+x^3\right)}{3\cdot x^2+1}}=\log\frac{\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{\frac{3\cdot x^2+1-3\cdot x-x^3}{3\cdot x^2+1}}=\log\frac{\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{\frac{3\cdot x^2+1-3\cdot x-x^3}{3\cdot x^2+1}}=$$

$$=\log\frac{\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{1}}{\frac{3\cdot x^2+1-3\cdot x-x^3}{1}}=\log\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1-3\cdot x-x^3}=\log\frac{1+3\cdot x+3\cdot x^2+x^3}{1-3\cdot x+3\cdot x^2-x^3}=$$

$$=\log\frac{(1+x)^3}{(1-x)^3}=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3=3\cdot\log\frac{1+x}{1-x}=3\cdot f(x).$$

2.inačica

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g(x))=f\left(\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}\right)=\log\frac{1+\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{1-\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}=\log\frac{\frac{1}{1}+\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{\frac{1}{1}-\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}=$$

$$=\log\frac{\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{\frac{3\cdot x^2+1-\left(3\cdot x+x^3\right)}{3\cdot x^2+1}}=\log\frac{\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{\frac{3\cdot x^2+1-3\cdot x-x^3}{3\cdot x^2+1}}=\log\frac{\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}}{\frac{3\cdot x^2+1-3\cdot x-x^3}{3\cdot x^2+1}}=$$

$$=\log\frac{\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{1}}{\frac{3\cdot x^2+1-3\cdot x-x^3}{1}}=\log\frac{3\cdot x^2+1+3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1-3\cdot x-x^3}=\log\frac{1+3\cdot x+3\cdot x^2+x^3}{1-3\cdot x+3\cdot x^2-x^3}=$$

$$=\log\frac{(1+x)^3}{(1-x)^3}=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3=3\cdot\log\frac{1+x}{1-x}=3\cdot f(x).$$

Vježba 205

Ako je $f(x)=-\log\frac{1-x}{1+x}$, $g(x)=\frac{3\cdot x+x^3}{3\cdot x^2+1}$, dokaži da je $(f\circ g)(x)=3\cdot f(x)$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 206 (Goga, gimnazija)

Ako je $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$ izračunajte $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Rješenje 206

Ponovimo!

$$x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)\quad,\quad x^3-y^3=(x-y)\cdot\left(x^2+x\cdot y+y^2\right).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\left[\begin{array}{l}f(x)=x^2\\ g(x)=x^3\end{array}\right]=\frac{b^2-a^2}{b^3-a^3}=\frac{(b-a)\cdot(b+a)}{(b-a)\cdot\left(b^2+b\cdot a+a^2\right)}=$$

$$=\frac{(b-a)\cdot(b+a)}{(b-a)\cdot\left(b^2+b\cdot a+a^2\right)}=\frac{b+a}{b^2+b\cdot a+a^2}=\frac{a+b}{a^2+a\cdot b+b^2}.$$

Vježba 206

Ako je $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$ izračunajte $\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$.

Rezultat: $\frac{a^2+a\cdot b+b^2}{a+b}.$

Zadatak 207 (Goga, gimnazija)

Ako je $f(x)=x^2$ izračunajte $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$

Rješenje 207

Ponovimo!

$$x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y) \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\left[f(x)=x^2\right]=\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b-a)\cdot(b+a)}{b-a}=\frac{(b-a)\cdot(b+a)}{b-a}=\frac{b+a}{1}=b+a=a+b.$$

Vježba 207

Ako je $f(x)=x^2$ izračunajte $\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$

Rezultat: $\frac{1}{a+b}.$

Zadatak 208 (4A, TUPŠ)

Odredite nultočku funkcije $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x-6.$

$A.\ -18 \qquad B.\ -6 \qquad C.\ 6 \qquad D.\ 18$

Rješenje 208

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0)=0.$$

1.inačica

Nultočka zadane funkcije iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{3}\cdot x-6 \\ f(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot x-6=0 \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot x-6=0 \ /\cdot 3 \Rightarrow x-18=0 \Rightarrow x=18.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Budući da su ponuđeni odgovori, svaki broj uvrstimo umjesto x i provjerimo je li baš on nultočka.

- $$\left.\begin{array}{l} x=-18 \\ f(x)=\frac{1}{3}\cdot x-6 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-18)=\frac{1}{3}\cdot(-18)-6 \Rightarrow f(-18)=\frac{1}{3}\cdot(-18)-6 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow f(-18)=-6-6 \Rightarrow f(-18)=-12.\ \text{Broj } -18 \text{ nije nultočka.}$$
- $$\left.\begin{array}{l} x=-6 \\ f(x)=\frac{1}{3}\cdot x-6 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-6)=\frac{1}{3}\cdot(-6)-6 \Rightarrow f(-6)=\frac{1}{3}\cdot(-6)-6 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow f(-6)=-2-6 \Rightarrow f(-6)=-8.\ \text{Broj } -6 \text{ nije nultočka.}$$
- $$\left.\begin{array}{l} x=6 \\ f(x)=\frac{1}{3}\cdot x-6 \end{array}\right\} \Rightarrow f(6)=\frac{1}{3}\cdot 6-6 \Rightarrow f(6)=\frac{1}{3}\cdot 6-6 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow f(6)=2-6 \Rightarrow f(6)=-4.\ \text{Broj } 6 \text{ nije nultočka.}$$
- $$\left.\begin{array}{l} x=18 \\ f(x)=\frac{1}{3}\cdot x-6 \end{array}\right\} \Rightarrow f(18)=\frac{1}{3}\cdot 18-6 \Rightarrow f(18)=\frac{1}{3}\cdot 18-6 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow f(18)=6-6 \Rightarrow f(18)=0.\ \text{Broj } 18 \text{ je nultočka.}$$

Odgovor je pod D.

Vježba 208

Odredite nultočku funkcije $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x+6.$

$A.\ -18 \qquad B.\ -6 \qquad C.\ 6 \qquad D.\ 18$

Rezultat: A.

Zadatak 209 (Ivana, gimnazija)

Ako je f linearna funkcija $f(x)=a\cdot x+b$ te ako je
$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)=-20$ i $f(1)-f(2)+f(3)-\ldots-f(10)=20,$ koliko je f(x)?

Rješenje 209

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c=b+d \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow a-c=b-d \quad , \quad 1+2+3+4+5+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Zbrojimo zadane jednakosti.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)=-20 \\ f(1)-f(2)+f(3)-\ldots-f(10)=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)+f(1)-f(2)+f(3)-\ldots-f(10)=-20+20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)+f(1)-f(2)+f(3)-\ldots-f(10)=-20+20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)+f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot f(1)+2\cdot f(3)+2\cdot f(5)+2\cdot f(7)+2\cdot f(9)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot f(1)+2\cdot f(3)+2\cdot f(5)+2\cdot f(7)+2\cdot f(9)=0\ /:2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a+b+3\cdot a+b+5\cdot a+b+7\cdot a+b+9\cdot a+b=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (a+3\cdot a+5\cdot a+7\cdot a+9\cdot a)+5\cdot b=0\ \Rightarrow\ 25\cdot a+5\cdot b=0\ \Rightarrow\ 25\cdot a+5\cdot b=0\ /:5\ \Rightarrow\ 5\cdot a+b=0.$$

Oduzmemo zadane jednakosti.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)=-20 \\ f(1)-f(2)+f(3)-\ldots-f(10)=20 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{oduzmemo} \\ \text{jednakosti}\end{array}\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)-\left(f(1)-f(2)+f(3)-\ldots-f(10)\right)=-20-20\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)-f(1)+f(2)-f(3)+\ldots+f(10)=-40\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)-f(1)+f(2)-f(3)+\ldots+f(10)=-40\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)+f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=-40\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot f(2)+2\cdot f(4)+2\cdot f(6)+2\cdot f(8)+2\cdot f(10)=-40\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot f(2)+2\cdot f(4)+2\cdot f(6)+2\cdot f(8)+2\cdot f(10)=-40\ /:(-2)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)=-20\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot a+b+4\cdot a+b+6\cdot a+b+8\cdot a+b+10\cdot a+b=-20\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 30\cdot a+5\cdot b=-20\ \Rightarrow\ 30\cdot a+5\cdot b=-20\ /:5\ \Rightarrow\ 6\cdot a+b=-4.$$

Vrijednosti koeficijenata a i b dobijemo iz sustava jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot a+b=0 \\ 6\cdot a+b=-4 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} 5\cdot a+b=0\ /\cdot(-1) \\ 6\cdot a+b=-4 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} -5\cdot a-b=0 \\ 6\cdot a+b=-4 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ a=-4.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot a+b=0 \\ a=-4 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ 5\cdot(-4)+b=0\ \Rightarrow\ -20+b=0\ \Rightarrow\ b=20.$$

Linearna funkcija f ima oblik:

$$\left.\begin{array}{l} a=-4\ \ ,\ \ b=20 \\ f(x)=a\cdot x+b \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ f(x)=-4\cdot x+20.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)=-20 \\ f(1)-f(2)+f(3)-\ldots-f(10)=20 \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a+b+2\cdot a+b+3\cdot a+b+\ldots+8\cdot a+b+9\cdot a+b+10\cdot a+b=-20 \\ a+b-(2\cdot a+b)+3\cdot a+b-\ldots-(8\cdot a+b)+9\cdot a+b-(10\cdot a+b)=20 \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a+b+2\cdot a+b+3\cdot a+b+\ldots+8\cdot a+b+9\cdot a+b+10\cdot a+b=-20 \\ a+b-2\cdot a-b+3\cdot a+b-\ldots-8\cdot a-b+9\cdot a+b-10\cdot a-b=20 \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+2\cdot a+b+3\cdot a+b+\ ...\ +8\cdot a+b+9\cdot a+b+10\cdot a+b=-20 \\ a+b-2\cdot a-b+3\cdot a+b-\ ...\ -8\cdot a-b+9\cdot a+b-10\cdot a-b=20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a+2\cdot a+3\cdot a+\ ...\ +8\cdot a+9\cdot a+10\cdot a)+10\cdot b=-20 \\ a-2\cdot a+3\cdot a-\ ...\ -8\cdot a+9\cdot a-10\cdot a=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 55\cdot a+10\cdot b=-20 \\ -5\cdot a=20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 55\cdot a+10\cdot b=-20\ /:5 \\ -5\cdot a=20\ /:(-5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 11\cdot a+2\cdot b=-4 \\ a=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 11\cdot(-4)+2\cdot b=-4 \Rightarrow -44+2\cdot b=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot b=-4+44 \Rightarrow 2\cdot b=40 \Rightarrow 2\cdot b=40\ /:2 \Rightarrow b=20.$$

Linearna funkcija f ima oblik:

$$\left.\begin{array}{l} a=-4\ ,\ b=20 \\ f(x)=a\cdot x+b \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-4\cdot x+20.$$

Vježba 209

Ako je f linearna funkcija $f(x)=a\cdot x+b$ te ako je

$f(1)+f(2)+f(3)+\ ...\ +f(10)=65$ i $f(1)-f(2)+f(3)-...-f(10)=-5,$ koliko je f(x)?

Rezultat: $f(x)=x+1.$

Zadatak 210 (Sanja, gimnazija)

Odredi linearnu funkciju $f(x)=a\cdot x+b$, ako je $f(-1)+f(1)=4,\ f(-1)-f(1)=2.$

Rješenje 210

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\ ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Preoblikujemo zadane jednakosti.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)+f(1)=4 \\ f(-1)-f(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[f(x)=a\cdot x+b\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot(-1)+b+a\cdot 1+b=4 \\ a\cdot(-1)+b-(a\cdot 1+b)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a+b+a+b=4 \\ -a+b-(a+b)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a+b+a+b=4 \\ -a+b-a-b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a+b+a+b=4 \\ -a+b-a-b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+b=4 \\ -a-a=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot b=4 \\ -2\cdot a=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot b=4\ /:2 \\ -2\cdot a=2\ /:(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=2 \\ a=-1 \end{array}\right\}.$$

Linearna funkcija glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a=-1\ ,\ b=2 \\ f(x)=a\cdot x+b \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-1\cdot x+2 \Rightarrow f(x)=-x+2.$$

2.inačica

- $\left.\begin{array}{l} f(-1)+f(1)=4 \\ f(-1)-f(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot f(-1)=6 \Rightarrow 2\cdot f(-1)=6\ /:2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(-1)=3$$

- $$\left.\begin{matrix} f(-1)+f(1)=4 \\ f(-1)-f(1)=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(-1)+f(1)=4 \\ f(-1)-f(1)=2 \;/\cdot(-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} f(-1)+f(1)=4 \\ -f(-1)+f(1)=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\cdot f(1)=2 \Rightarrow 2\cdot f(1)=2 \;/:2 \Rightarrow f(1)=1.$$

Sada je:

$$\left.\begin{matrix} f(-1)=3 \\ f(1)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[f(x)=a\cdot x+b\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot(-1)+b=3 \\ a\cdot 1+b=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -a+b=3 \\ a+b=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow 2\cdot b=4 \Rightarrow 2\cdot b=4 \;/:2 \Rightarrow b=2.$$

Računamo a.

$$\left.\begin{matrix} a+b=1 \\ b=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+2=1 \Rightarrow a=1-2 \Rightarrow a=-1.$$

Linearna funkcija glasi:

$$\left.\begin{matrix} a=-1 \;,\; b=2 \\ f(x)=a\cdot x+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)=-1\cdot x+2 \Rightarrow f(x)=-x+2.$$

Vježba 210

Odredi linearnu funkciju $f(x)=a\cdot x+b$, ako je $f(-1)+f(1)=2,\ f(-1)-f(1)=-2.$

Rezultat: $f(x)=x+1.$

Zadatak 211 (Paula, maturantica)

Odredite koordinate točaka u kojima graf funkcije $f(x)=\log_2(x+2)+1$ siječe koordinatne osi.

$A.\ \left(-\frac{3}{2},\,0\right),\ (0,\,1)$ $\quad B.\ \left(-\frac{3}{2},\,0\right),\ (0,\,2)$ $\quad C.\ \left(\frac{5}{2},\,0\right),\ (0,\,1)$ $\quad D.\ \left(\frac{5}{2},\,0\right),\ (0,\,2)$

Rješenje 211

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \qquad a=b^c$$
$$\rightarrow$$

$$\log_b b=1 \quad , \quad \log_b b^n=n \quad , \quad \log_b f(x)=\log_b g(x) \Rightarrow f(x)=g(x).$$

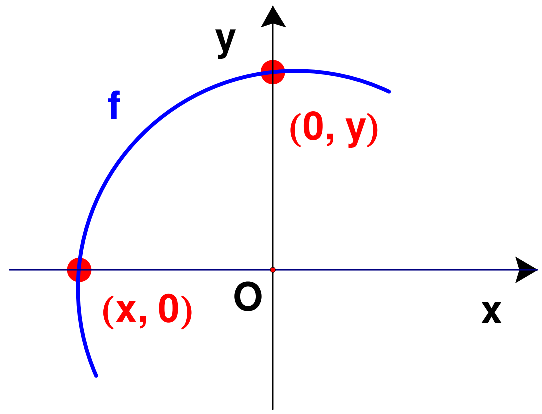
$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

- Kada graf funkcije f siječe os y tada je apscisa sjecišta S jednaka nuli.

$$x=0 \Rightarrow S(0,\,y).$$

- Kada graf funkcije f siječe os x tada je ordinata sjecišta S jednaka nuli.

$$y=0 \Rightarrow S(x,\,0).$$



Kada graf zadane funkcije f siječe os y vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=\log_2(x+2)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\log_2(0+2)+1 \Rightarrow f(0)=\log_2 2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0)=1+1 \Rightarrow f(0)=2 \Rightarrow y=2.$$

Koordinate sjecišta su:

$$S(0,\ 2).$$

Kada graf zadane funkcije f siječe os x vrijedi:

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow f(x)=0 \\ f(x)=\log_2(x+2)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \log_2(x+2)+1=0 \Rightarrow \log_2(x+2)=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x+2)=\log_2 2^{-1} \Rightarrow x+2=2^{-1} \Rightarrow x+2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}-2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}-\frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1-4}{2} \Rightarrow x=-\frac{3}{2}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow f(x)=0 \\ f(x)=\log_2(x+2)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \log_2(x+2)+1=0 \Rightarrow \log_2(x+2)=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2=2^{-1} \Rightarrow x+2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}-2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}-\frac{2}{1} \Rightarrow x=\frac{1-4}{2} \Rightarrow x=-\frac{3}{2}.$$

Koordinate sjecišta su:

$$S\left(-\frac{3}{2},\ 0\right).$$

Odgovor je pod B.

Vježba 211

Odredite koordinate točaka u kojima graf funkcije $f(x)=\log_2(x+1)+1$ siječe koordinatne osi.

$A.\ \left(-\frac{1}{2},\ 0\right),\ (0,\ 1)$ $\qquad B.\ \left(-\frac{1}{2},\ 0\right),\ (0,\ 2)$ $\qquad C.\ (2,\ 0),\ (0,\ 1)$ $\qquad D.\ (-2,\ 0),\ (0,\ 2)$

Rezultat: A.

Zadatak 212 (Leonbj, tehnička škola)

Koja od navedenih funkcija ima sliku $\left\langle 0, +\infty \right\rangle$:

$A.\ f\left(x\right) = x \qquad B.\ f\left(x\right) = 10^{\,x} \qquad C.\ f\left(x\right) = \log x \qquad D.\ f\left(x\right) = \sin x$

Rješenje 212

Ponovimo!

Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje svakom elementu $x \in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y \in B$.

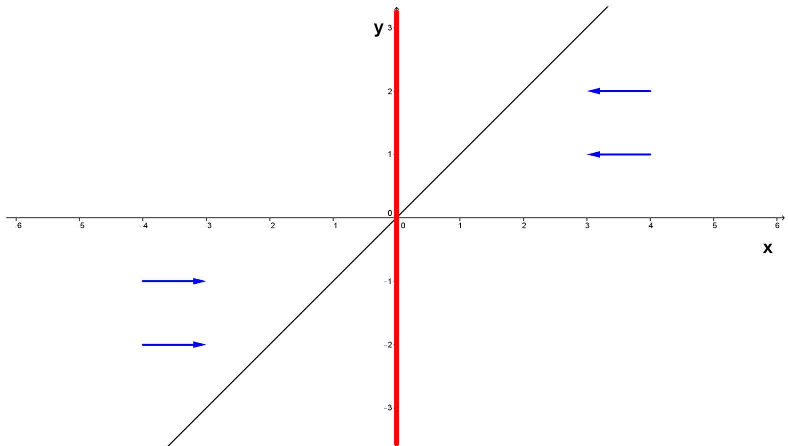
Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. S pojmom kodomene povezan je skup zvan slika funkcije. Sliku funkcije možemo shvatiti kao najmanju od svih mogućih kodomena funkcije.

Slika funkcije f sastoji se od svih $y \in B$ za koje postoji $x \in A$ takav da je f(x) = y.

Slika funkcije je skup na koji funkcija f preslikava svoju domenu.

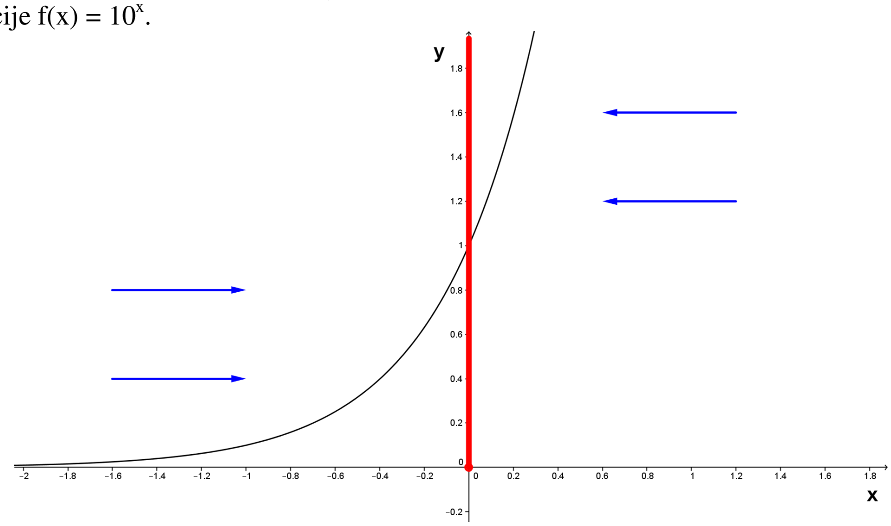
Skup vrijednosti (slika funkcije) R_f je projekcija grafa na os ordinata.

Graf funkcije f(x) = x



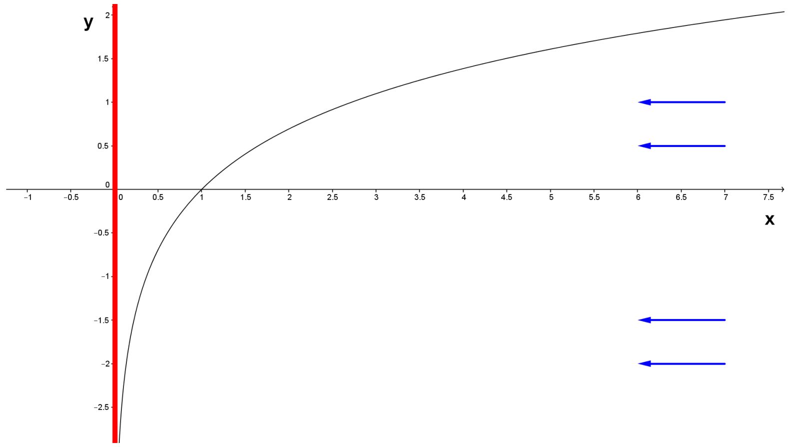
Slika funkcije f(x) = x je $\left\langle -\infty, +\infty \right\rangle$.

Graf funkcije f(x) = 10^x.

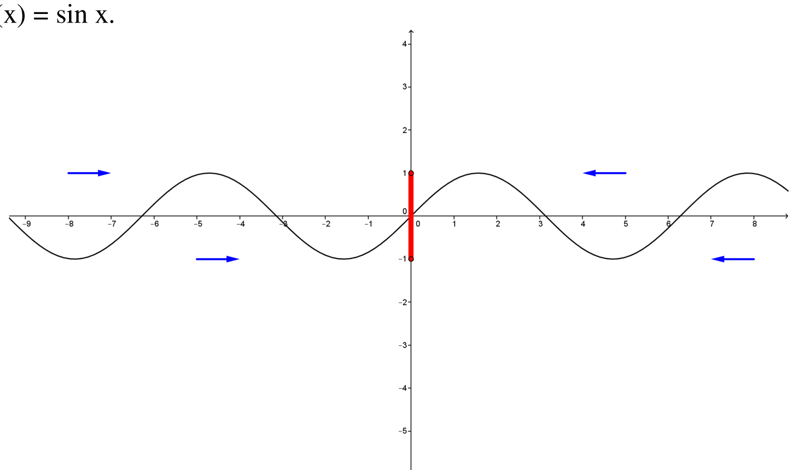


Slika funkcije f(x) = 10^x je $\left\langle 0, +\infty \right\rangle$.

Graf funkcije f(x) = log x.



Slika funkcije f(x) = log x je $\langle -\infty, +\infty \rangle$.
Graf funkcije f(x) = sin x.



Slika funkcije f(x) = sin x je $[-1, 1]$.
Odgovor je pod B.

Vježba 212

Koja od navedenih funkcija ima sliku $[-1, 1]$:

$A.\ f(x) = x \qquad B.\ f(x) = 10^{x} \qquad C.\ f(x) = \log x \qquad D.\ f(x) = \sin x$

Rezultat: D.

Zadatak 213 (Danijel, gimnazija)

Zadana je funkcija $f(x) = 2^{3 \cdot \sin 4x + 1}$. Koji je interval slika (skup svih vrijednosti) te funkcije?

$A.\ [0, +\infty\rangle \qquad B.\ \left[\frac{1}{4}, 16\right] \qquad C.\ \left[\frac{1}{2}, 4\right] \qquad D.\ [2, +\infty\rangle$

Rješenje 213

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}} \quad , \quad a \le b \le c \ , \ n > 0 \ \Rightarrow \ a \cdot n \le b \cdot n \le c \cdot n.$$
$$a \le b \le c \ , \ n \in R \ \Rightarrow \ a + n \le b + n \le c + n.$$

Eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$

Ako je a > 1, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi

$$a^{x_1} < a^{x_2} \quad (\textit{rastuća funkcija}).$$

Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje svakom elementu $x \in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y \in B$.

Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f.
S pojmom kodomene povezan je skup zvan slika funkcije. Sliku funkcije možemo shvatiti kao najmanju od svih mogućih kodomena funkcije.

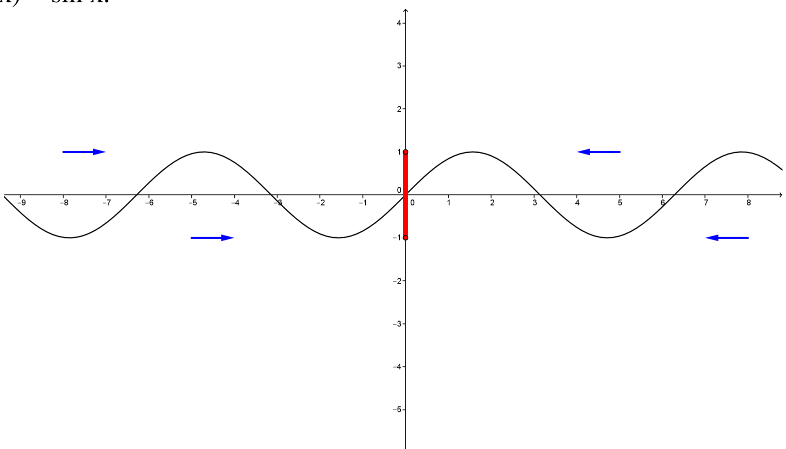
Slika funkcije f sastoji se od svih $y \in B$ za koje postoji $x \in A$ takav da je f(x) = y.

Slika funkcije je skup na koji funkcija f preslikava svoju domenu.

Skup vrijednosti (slika funkcije) R_f je projekcija grafa na os ordinata.

1.inačica

Graf funkcije f(x) = sin x.



Slika funkcije f(x) = sin x je $[-1, 1]$.

Funkcije sinus i kosinus definirane su na skupu R, a kodomena im je segment $[-1, 1]$.

$$-1 \le \sin x \le 1 \quad , \quad -1 \le \cos x \le 1.$$

Također je

$$-1 \le \sin(a \cdot x) \le 1 \quad , \quad -1 \le \cos(a \cdot x) \le 1 \ , \ a \in R.$$

Budući da je najmanja vrijednost funkcije sin (4 · x) jednaka – 1, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(4 \cdot x) = -1 \\ y = 2^{3 \cdot \sin 4x + 1} \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2^{3 \cdot (-1) + 1} \Rightarrow y = 2^{-3+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2^{-2} \Rightarrow y = \frac{1}{2^2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}.$$

To je najmanja vrijednost zadane funkcije $f(x) = 2^{3 \cdot \sin 4x + 1}$.

Budući da je najveća vrijednost funkcije sin (4 · x) jednaka 1, slijedi:

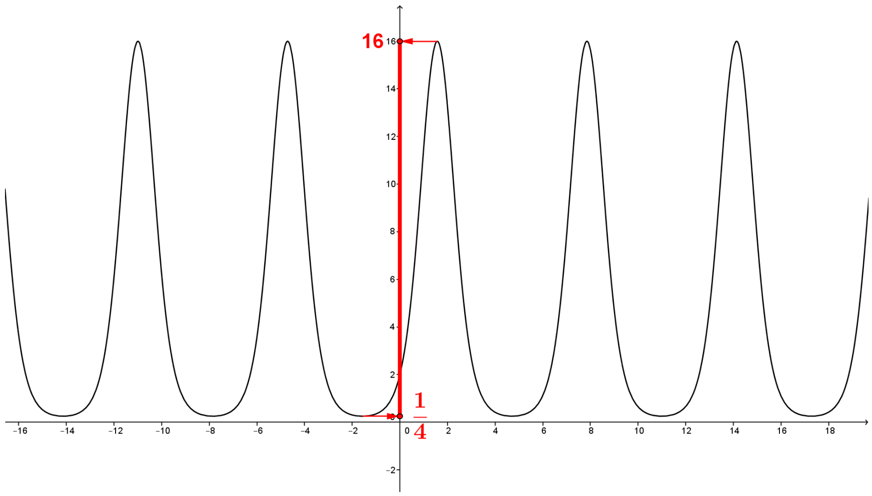
$$\left.\begin{array}{l} \sin(4 \cdot x) = 1 \\ y = 2^{3 \cdot \sin 4x + 1} \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2^{3 \cdot 1 + 1} \Rightarrow y = 2^{3+1} \Rightarrow y = 2^4 \Rightarrow y = 16.$$

To je najveća vrijednost zadane funkcije $f(x) = 2^{3 \cdot \sin 4x + 1}$.

Slika zadane funkcije je segment $\left[\frac{1}{4}, 16\right]$.

Odgovor je pod B.

Graf funkcije $f(x) = 2^{3 \cdot \sin 4x + 1}$



2.inačica

Uporabom svojstva nejednakosti dobije se:

$$-1 \le \sin(4 \cdot x) \le 1 \Rightarrow -1 \le \sin(4 \cdot x) \le 1 \;/ \cdot 3 \Rightarrow -3 \le 3 \cdot \sin(4 \cdot x) \le 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \le 3 \cdot \sin(4 \cdot x) \le 3 \;/ + 1 \Rightarrow -3 + 1 \le 3 \cdot \sin(4 \cdot x) + 1 \le 3 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \le 3 \cdot \sin(4 \cdot x) + 1 \le 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{potenciramo} \\ \text{baza je } 2 \end{array}\right] \Rightarrow -2 \le 3 \cdot \sin(4 \cdot x) + 1 \le 4 \;/ \; 2^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{-2} \le 2^{3 \cdot \sin 4x + 1} \le 2^{4} \Rightarrow \left[f(x) = 2^{3 \cdot \sin 4x + 1} \right] \Rightarrow 2^{-2} \le f(x) \le 2^{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{2}} \le f(x) \le 2^{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \le f(x) \le 16.$$

Slika zadane funkcije je segment $\left[\frac{1}{4}, 16\right]$.

Odgovor je pod B.

Vježba 213

Zadana je funkcija $f(x) = 2^{2 \cdot \cos 2x + 1}$. Koji je interval slika (skup svih vrijednosti) te funkcije?

$A. \left[0, +\infty\right\rangle \qquad B. \left[\frac{1}{2}, 8\right] \qquad C. \left[\frac{1}{2}, 4\right] \qquad D. \left[2, +\infty\right\rangle$

Rezultat: B.

Zadatak 214 (Paula. Nora, Gara ☺, srednja škola)

Zadana je funkcija $f(x) = 3^{x} + 2$. Odredite skup svih vrijednosti (sliku) funkcije.

Rješenje 214

Ponovimo!

$$a \le b \le c \;,\; n \in R \Rightarrow a + n \le b + n \le c + n \quad , \quad \infty + n = \infty.$$

Eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$

Za svaki a > 0, a ≠ 1

$$x \mapsto a^x,$$

je definirana za sve x i ima sljedeća svojstva:

- za sve x,

$$a^x > 0 \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad a^1 = a$$

Slika funkcije $f(x) = a^x$ je interval $\langle 0, +\infty \rangle$.

- za a > 0 funkcija a^x raste
- za 0 < a < 1 funkcija a^x pada.

Ako je a > 1, onda za $x_1 < x_2$ vrijedi

$$a^{x_1} < a^{x_2} \quad (rastuća \;\; funkcija).$$

Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje svakom elementu $x \in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y \in B$.

Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. S pojmom kodomene povezan je skup zvan slika funkcije. Sliku funkcije možemo shvatiti kao najmanju od svih mogućih kodomena funkcije.

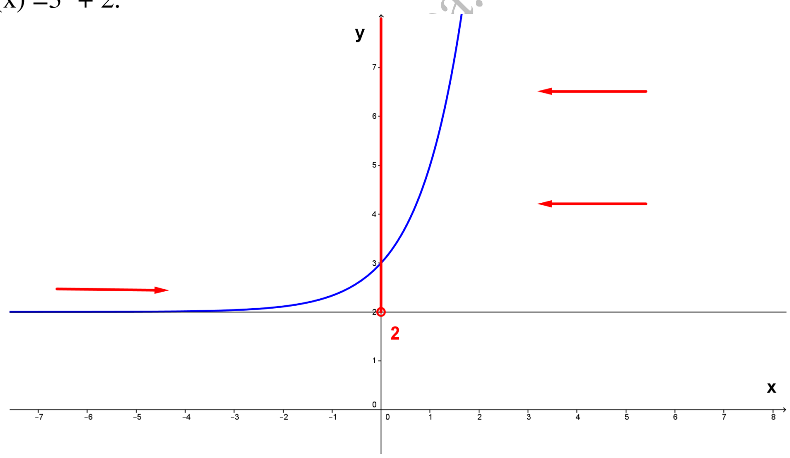
Slika funkcije f sastoji se od svih $y \in B$ za koje postoji $x \in A$ takav da je f(x) = y.

Slika funkcije je skup na koji funkcija f preslikava svoju domenu.

Skup vrijednosti (slika funkcije) R_f je projekcija grafa na os ordinata.

1.inačica

Graf funkcije $f(x) = 3^x + 2$.



Slika eksponencijalne funkcije je interval $\langle 0, +\infty \rangle$. Slika funkcije $f(x) = 3^x$ je interval $\langle 0, +\infty \rangle$, a slika funkcije $f(x) = 3^x + 2$ je interval $\langle 2, +\infty \rangle$.

2.inačica

Uporabom svojstva nejednakosti dobije se:

$$0 < 3^x < +\infty \;\Rightarrow\; 0 < 3^x < +\infty \;/ + 2 \;\Rightarrow\; 0 + 2 < 3^x + 2 < +\infty + 2 \;\Rightarrow\; 2 < 3^x + 2 < +\infty \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[f(x) = 3^x + 2 \right] \;\Rightarrow\; 2 < f(x) < +\infty.$$

Slika zadane funkcije je interval $\langle 2, +\infty \rangle$.

Vježba 214

Zadana je funkcija $f(x) = 5^x + 2$. Odredite skup svih vrijednosti (sliku) funkcije.

Rezultat: $\langle 2, +\infty \rangle$.

Zadatak 215 (Paula. Nora, Gara ☺, srednja škola)

Zadana je funkcija $f(x)=\sqrt{x-3}$. Za koje x iz domene funkcije f vrijedi $f(x)<2$? Rješenje zapišite pomoću intervala.

Rješenje 215

Ponovimo!

$$0<a<b \Rightarrow a^2<b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Neka su A i B dva skupa. Funkcija ili preslikavanje sa skupa A u skup B je pravilo (zakon) f koje svakom elementu $x \in A$ jednoznačno pridružuje neki element $y \in B$.

Skup A zove se područje definicije ili domena, a skup B područje vrijednosti ili kodomena funkcije f. Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ je $x \geq 0$ ili $x \in [0,+\infty\rangle$.

Moramo naći vrijednosti x za koje je radikand (izraz pod korijenom) veći ili jednak nuli.

Najprije odredimo domenu funkcije $f(x)=\sqrt{x-3}$.

$$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow x \in [\,3,+\infty\,\rangle.$$

Iz uvjeta f(x) < 2 dobije se

$$f(x)<2 \Rightarrow \sqrt{x-3}<2 \Rightarrow \sqrt{x-3}<2\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-3}\right)^2<2^2 \Rightarrow x-3<4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x<4+3 \Rightarrow x<7 \Rightarrow x \in \langle -\infty, 7\,\rangle.$$

Rješenje je presjek (zajednički dio) intervala $\langle -\infty, 7\,\rangle$ i $[\,3,+\infty\,\rangle$.

Rješenje glasi:

$$x \in [\,3, 7\,\rangle.$$

Vježba 215

Zadana je funkcija $f(x)=\sqrt{x-2}$. Za koje x iz domene funkcije f vrijedi $f(x)<2$? Rješenje zapišite pomoću intervala.

Rezultat: $x \in [\,2, 6\,\rangle.$

Zadatak 216 (Jele, gimnazija)

Funkcija f je linearna funkcija za koju vrijedi f(x + 1) – f(x – 1) = – 1, za svaki realni broj x. Nagib te funkcije jednak je:

$$A.\ -\frac{1}{2} \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -\frac{1}{4}$$

Rješenje 216

Ponovimo!

Linearna funkcija je realna funkcija zadana jednadžbom f(x) = a · x + b, a ≠ 0. Graf linearne funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu je pravac y = a · x + b. Koeficijent a zove se koeficijent smjera ili nagib pravca.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$f(x)=a\cdot x+b \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} f(x+1)=a\cdot(x+1)+b \\ f(x-1)=a\cdot(x-1)+b \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} f(x+1)=a\cdot x+a+b \\ f(x-1)=a\cdot x-a+b \end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$f(x+1)-f(x-1)=-1 \;\Rightarrow\; (a\cdot x+a+b)-(a\cdot x-a+b)=-1 \;\Rightarrow\; a\cdot x+a+b-a\cdot x+a-b=-1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a\cdot x+a+b-a\cdot x+a-b=-1 \;\Rightarrow\; a+a=-1 \;\Rightarrow\; 2\cdot a=-1 \;\Rightarrow\; 2\cdot a=-1\;/:2 \;\Rightarrow\; a=-\frac{1}{2}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 216

Funkcija f je linearna funkcija za koju vrijedi f(x + 1) – f(x – 1) = 2, za svaki realni broj x. Nagib te funkcije jednak je:

$$A.\ -\frac{1}{2} \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -\frac{1}{4}$$

Rezultat: C.

Zadatak 217 (Željko, gimnazija)

Ako je $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$, onda je $f(100)\cdot f(99)\cdot f(98)\cdot f(97)\cdot \ldots \cdot f(2)$ jednako:

$$A.\ \frac{200}{101} \qquad B.\ 2 \qquad C.\ \frac{100}{101} \qquad D.\ \frac{1}{101}$$

Rješenje 217

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$f(100)\cdot f(99)\cdot f(98)\cdot f(97)\cdot \ldots \cdot f(5)\cdot f(4)\cdot f(3)\cdot f(2)=\left[f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}\right]=$$

$$=\frac{100^2}{100^2-1}\cdot\frac{99^2}{99^2-1}\cdot\frac{98^2}{98^2-1}\cdot\frac{97^2}{97^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{4^2}{4^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{2^2}{2^2-1}=$$

$$=\frac{100^2}{(100-1)\cdot(100+1)}\cdot\frac{99^2}{(99-1)\cdot(99+1)}\cdot\frac{98^2}{(98-1)\cdot(98+1)}\cdot\frac{97^2}{(97-1)\cdot(97+1)}\cdot\ldots$$

$$\ldots\cdot\frac{5^2}{(5-1)\cdot(5+1)}\cdot\frac{4^2}{(4-1)\cdot(4+1)}\cdot\frac{3^2}{(3-1)\cdot(3+1)}\cdot\frac{2^2}{(2-1)\cdot(2+1)}=$$

$$=\frac{100^2}{99\cdot 101}\cdot\frac{99^2}{98\cdot 100}\cdot\frac{98^2}{97\cdot 99}\cdot\frac{97^2}{96\cdot 98}\cdot\ldots\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{2^2}{1\cdot 3}=$$

$$=\frac{100^2}{99\cdot 101}\cdot\frac{99^2}{98\cdot 100}\cdot\frac{98^2}{97\cdot 99}\cdot\frac{97^2}{96\cdot 98}\cdot\ldots\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{2^2}{1\cdot 3}=\frac{100}{101}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{200}{101}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 217

Ako je $f(x)=\frac{x}{x-1}$, onda je $f(100)\cdot f(99)\cdot f(98)\cdot f(97)\cdot\ ...\ \cdot f(2)$ jednako:

$A.\ 10\qquad B.\ 2\qquad C.\ 100\qquad D.\ 50$

Rezultat: C.

Zadatak 218 (Igor, gimnazija)

Za funkciju $f^{-1}(x)=\log_2(-x+2)-1$ izračunaj f(2).

Rješenje 218

Ponovimo!

Definicija:

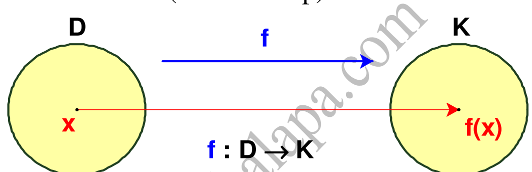
$$\log_b a=c \;\Leftrightarrow\; b^c=a.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=\underset{\rightarrow}{b^c} \qquad a=b^c$$

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Inverzna funkcija

Neka je $f: A\to B$ bijekcija. Tada postoji jedna i samo jedna bijekcija $g: B\to A$ takva da je

$$(g\circ f)(x)=x\ ,\ \forall x\in A$$
$$(f\circ g)(y)=y\ ,\ \forall y\in B.$$

Ta jedinstvena bijekcija g označava se sa f^{-1} i zove inverzna funkcija funkcije f.

Zapamtimo!

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=x\quad,\quad\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=x.$$

1.inačica

Odredimo funkciju f čija inverzna funkcija glasi $f^{-1}(x)=\log_2(-x+2)-1$.

$$f^{-1}(x)=\log_2(-x+2)-1\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{pišemo}\\ y=f^{-1}(x)\end{bmatrix}\Rightarrow y=\log_2(-x+2)-1\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{zamijenimo } y \text{ i } x\\ y\leftrightarrow x\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x = \log_2(-y+2) - 1 \;\Rightarrow\; \left[\text{računamo } y\right] \;\Rightarrow\; \log_2(-y+2) - 1 = x \;\Rightarrow\; \log_2(-y+2) = x+1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; -y+2 = 2^{x+1} \;\Rightarrow\; -y = 2^{x+1} - 2 \;\Rightarrow\; -y = 2^{x+1} - 2 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow\; y = -2^{x+1} + 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y = 2 - 2^{x+1} \;\Rightarrow\; \left[\begin{matrix}\text{pišemo} \\ y = f(x)\end{matrix}\right] \;\Rightarrow\; f(x) = 2 - 2^{x+1}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = 2 - 2^{x+1} \\ x = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow\; f(2) = 2 - 2^{2+1} \;\Rightarrow\; f(2) = 2 - 2^3 \;\Rightarrow\; f(2) = 2 - 8 \;\Rightarrow\; f(2) = -6.$$

2.inačica

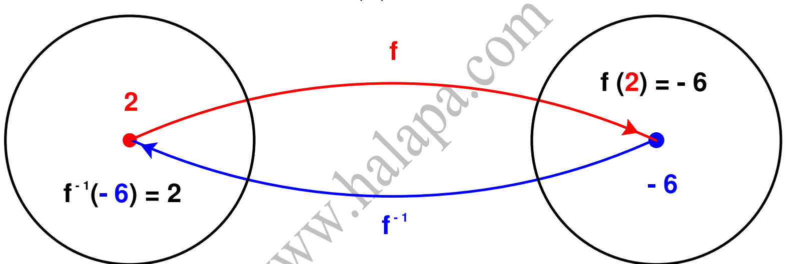
Zadana je inverzna funkcija $f^{-1}(x) = \log_2(-x+2) - 1,$ a treba izračunati f(2), tj. naći sliku f(x) za argument x = 2. Zato je:

$$f^{-1}(x) = 2 \;\Rightarrow\; \log_2(-x+2) - 1 = 2 \;\Rightarrow\; \log_2(-x+2) = 2+1 \;\Rightarrow\; \log_2(-x+2) = 3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; -x+2 = 2^3 \;\Rightarrow\; -x+2 = 8 \;\Rightarrow\; -x = 8-2 \;\Rightarrow\; -x = 6 \;\Rightarrow\; -x = 6 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow\; x = -6.$$

Dakle, vrijedi:

$$f(2) = -6.$$



Vježba 218

Za funkciju $f^{-1}(x) = \log_2(2-x) - 1$ izračunaj f(2).

Rezultat: $f(2) = -6.$

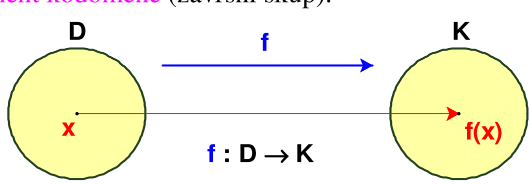
Zadatak 219 (Igor, gimnazija)

Za funkcije $f(x) = x^3 - 1$ i $g(x) = x \cdot (x+1) + 1$ izračunajte $\left(f^{-1} \circ g\right)(2).$

Rješenje 219

Ponovimo!

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

X – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f : A \to B,\ g : B \to C$ funkcije zadane na A, odnosno na B sa vrijednostima u B, odnosno u C. Tada je sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ , \ \forall x \in A$$

zadana funkcija $g \circ f : A \to C$ koja se zove kompozicija (složena funkcija) funkcija f i g.

Inverzna funkcija

Neka je $f : A \to B$ bijekcija. Tada postoji jedna i samo jedna bijekcija $g : B \to A$ takva da je

$$(g \circ f)(x) = x \ , \ \forall x \in A$$
$$(f \circ g)(y) = y \ , \ \forall y \in B.$$

Ta jedinstvena bijekcija g označava se sa f^{-1} i zove inverzna funkcija funkcije f.

Zapamtimo!

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x \quad , \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

1.inačica

Za funkciju $f(x) = x^3 - 1$ nađemo njezinu inverznu funkciju f^{-1}.

$$f(x) = x^3 - 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{pišemo} \\ y = f(x) \end{bmatrix} \Rightarrow y = x^3 - 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamijenimo } y \text{ i } x \\ y \leftrightarrow x \end{bmatrix} \Rightarrow x = y^3 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{računamo } y] \Rightarrow y^3 - 1 = x \Rightarrow y^3 = x + 1 \Rightarrow y^3 = x + 1 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{pišemo} \\ y = f^{-1}(x) \end{bmatrix} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}.$$

Sada je:

- $$\left(f^{-1} \circ g\right)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(2 \cdot (2+1) + 1) = f^{-1}(2 \cdot 3 + 1) =$$ $$= f^{-1}(7) = \sqrt[3]{7+1} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Ili ovako:

- $$\left(f^{-1} \circ g\right)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(g(2)) = \sqrt[3]{g(2)+1} = \sqrt[3]{2 \cdot (2+1) + 1 + 1} =$$ $$= \sqrt[3]{2 \cdot 3 + 1 + 1} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

2.inačica

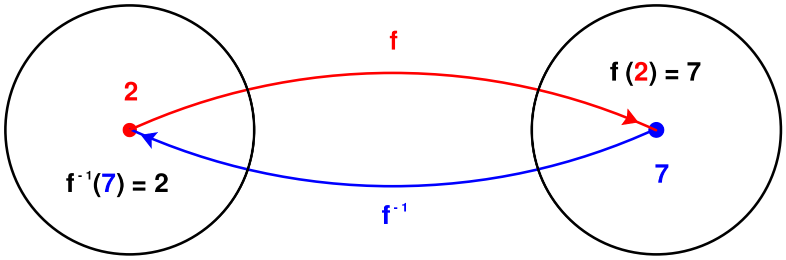
$$\left(f^{-1} \circ g\right)(2) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(2 \cdot (2+1) + 1) = f^{-1}(2 \cdot 3 + 1) = f^{-1}(7).$$

Treba naći argument x funkcije f, ako je $f(x) = 7$.

$$f(x) = 7 \Rightarrow x^3 - 1 = 7 \Rightarrow x^3 = 7 + 1 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \Rightarrow x = 2.$$

Dakle, vrijedi:

$$\left(f^{-1} \circ g\right)(2) = f^{-1}(7) = 2.$$



Vježba 219

Za funkcije $f(x)=x^3-1$ i $g(x)=x^2+x+1$ izračunajte $\left(f^{-1}\circ g\right)(2)$.

Rezultat: $\left(f^{-1}\circ g\right)(2)=f^{-1}(7)=2.$

Zadatak 220 (Zvonimir, gimnazija)

Nađite maksimum funkcije $f(x)=\sqrt{\sin^4 x+4\cdot\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\cdot\sin^2 x}.$

Rješenje 220

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}\quad,\quad \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\quad,\quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2\quad,\quad \sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

$$f(x)=\sqrt{\sin^4 x+4\cdot\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\cdot\sin^2 x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sqrt{\left(\sin^2 x\right)^2+4\cdot\cos^2 x}+\sqrt{\left(\cos^2 x\right)^2+4\cdot\sin^2 x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sqrt{\left(1-\cos^2 x\right)^2+4\cdot\cos^2 x}+\sqrt{\left(1-\sin^2 x\right)^2+4\cdot\sin^2 x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sqrt{1-2\cdot\cos^2 x+\left(\cos^2 x\right)^2+4\cdot\cos^2 x}+\sqrt{1-2\cdot\sin^2 x+\left(\sin^2 x\right)^2+4\cdot\sin^2 x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sqrt{1-2\cdot\cos^2 x+\cos^4 x+4\cdot\cos^2 x}+\sqrt{1-2\cdot\sin^2 x+\sin^4 x+4\cdot\sin^2 x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sqrt{1+2\cdot\cos^2 x+\cos^4 x}+\sqrt{1+2\cdot\sin^2 x+\sin^4 x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\sqrt{\left(1+\cos^2 x\right)^2}+\sqrt{\left(1+\sin^2 x\right)^2}\ \Rightarrow\ f(x)=1+\cos^2 x+1+\sin^2 x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x)=1+1+\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\ \Rightarrow\ f(x)=1+1+1\ \Rightarrow\ f(x)=3.$$

Vježba 220

Nađite maksimum funkcije $f(x)=\sqrt{\sin^4 x+4\cdot\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\cdot\sin^2 x}+1.$

Rezultat: 4.