Zadatak 221 (Luka, gimnazija)

Nađi maksimum funkcije $y = 5 - |2 - x|$.

Rješenje 221

Ponovimo!

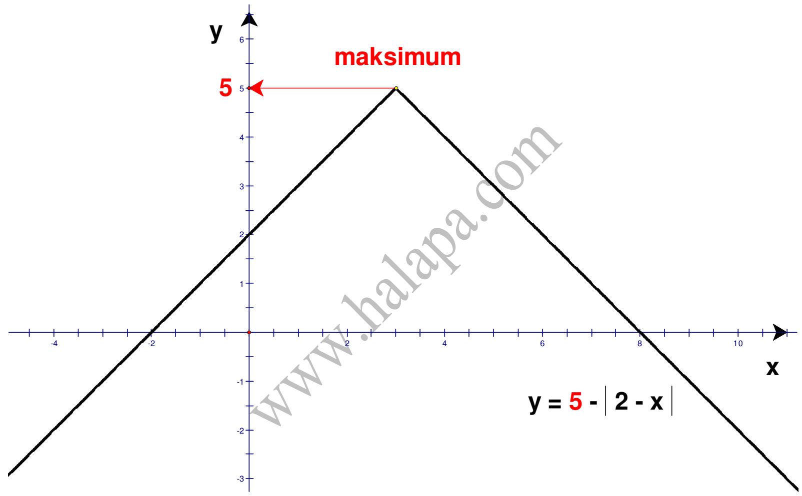
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| \geq 0 \text{ za svaki realan broj } x.$$

Uočimo da je za stalan broj a razlika brojeva a – b sve veća, ako je broj b sve manji. Maksimalna vrijednost funkcije bit će ako je apsolutna vrijednost (modul) $|2 - x|$ minimalna, a to je 0. Stoga je najveća vrijednost zadane funkcije 5. Pogledajte sliku!



Vježba 221

Nađi maksimum funkcije $y = 3 - |2 - x|$.

Rezultat: 3.

Zadatak 222 (Luka, gimnazija)

Nađi minimum funkcije $y = 5 + |2 - x|$.

Rješenje 222

Ponovimo!

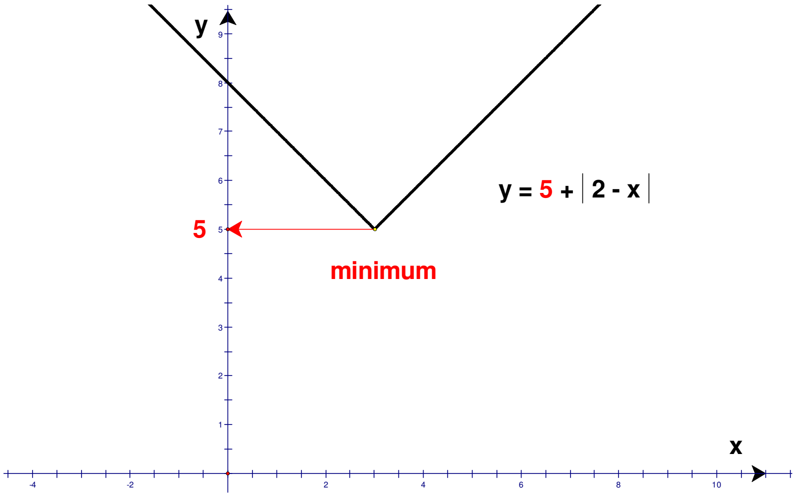
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| \geq 0 \text{ za svaki realan broj } x.$$

Uočimo da je za stalan broj a zbroj brojeva a + b sve manji, ako je broj b sve manji. Minimalna vrijednost funkcije bit će ako je apsolutna vrijednost (modul) $|2-x|$ minimalna, a to je 0. Stoga je najmanja vrijednost zadane funkcije 5. Pogledajte sliku!



Vježba 222

Nađi minimum funkcije $y=3+|2-x|$.

Rezultat: 3.

Zadatak 223 (Maturantica, gimnazija)

Ako je $f(x)=\frac{x(x-1)}{2}$, onda je $f(x+2)$ jednako:

$A.\ (x+2)\cdot f(x)$ $\quad B.\ \frac{(x+2)\cdot f(x+1)}{x}$ $\quad C.\ \frac{x\cdot f(x)}{x+2}$ $\quad D.\ x\cdot f(x)$

Rješenje 223

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Ako je $f(x)=\frac{x(x-1)}{2}$, onda vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x+1)=\frac{(x+1)\cdot((x+1)-1)}{2} \\ f(x+2)=\frac{(x+2)\cdot((x+2)-1)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x+1)=\frac{(x+1)\cdot(x+1-1)}{2} \\ f(x+2)=\frac{(x+2)\cdot(x+2-1)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x+1)=\frac{(x+1)\cdot(x+1-1)}{2} \\ f(x+2)=\frac{(x+2)\cdot(x+1)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x+1)=\frac{(x+1)\cdot x}{2} \\ f(x+2)=\frac{(x+2)\cdot(x+1)}{2} \end{array}\right\}.$$

Preoblikujemo f(x+2).

$$f(x+2)=\frac{(x+2)\cdot(x+1)}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{proširimo} \\ \text{razlomak sa } x \end{bmatrix} \Rightarrow f(x+2)=\frac{(x+2)\cdot(x+1)}{2}\cdot\frac{x}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+2)=\frac{(x+2)\cdot(x+1)\cdot x}{2\cdot x} \Rightarrow f(x+2)=\frac{x+2}{x}\cdot\frac{(x+1)\cdot x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[f(x+1)=\frac{(x+1)\cdot x}{2} \right] \Rightarrow f(x+2)=\frac{x+2}{x}\cdot f(x+1) \Rightarrow f(x+2)=\frac{(x+2)\cdot f(x+1)}{x}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 223

Ako je $f(x)=\frac{x-1}{x}$, onda je $f(x+2)$ jednako:

$A.\ \frac{x}{(x+2)\cdot f(x+1)}$ $\qquad B.\ \frac{(x+1)\cdot f(x+1)}{x}$ $\qquad C.\ \frac{(x+2)\cdot f(x)}{x+2}$ $\qquad D.\ x\cdot f(x+2)$

Rezultat: A.

Zadatak 224 (4A, TUPŠ)

Zadane su funkcije $f(x)=3\cdot x-2$ i $g(x)=\log\left(x^2+1\right)$. Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $(f\circ g)(x)=1$?

$A.\ 0 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ 9 \qquad D.\ 18$

Rješenje 224

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$a^1 = a \quad , \quad \log 10 = 1 \quad , \quad \log f(x)=\log g(x) \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f: A\to B$, $g: B\to C$ funkcije zadane na A, odnosno na B sa vrijednostima u B, odnosno u C. Tada je sa

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)) \ , \ \forall x\in A$$

zadana funkcija $g\circ f: A\to C$ koja se zove kompozicija (složena funkcija) funkcija f i g.

1.inačica

$$(f\circ g)(x)=1 \Rightarrow f(g(x))=1 \Rightarrow f(g(x))=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} f(x)=3\cdot x-2 \\ g(x)=\log\left(x^2+1\right) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot g(x)-2=1 \Rightarrow 3\cdot g(x)-2=1 \Rightarrow 3\cdot\log\left(x^2+1\right)-2=1 \Rightarrow 3\cdot\log\left(x^2+1\right)=1+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\log\left(x^2+1\right)=3 \Rightarrow 3\cdot\log\left(x^2+1\right)=3 \ /:3 \Rightarrow \log\left(x^2+1\right)=1 \Rightarrow x^2+1=10^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+1=10 \Rightarrow x^2=10-1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x^2=9 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{9} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{matrix}\right\}.$$

Sada je:

$$x_1+x_2=3+(-3) \Rightarrow x_1+x_2=3-3 \Rightarrow x_1+x_2=0.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$(f\circ g)(x)=1 \Rightarrow f(g(x))=1 \Rightarrow f(g(x))=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} f(x)=3\cdot x-2 \\ g(x)=\log\left(x^2+1\right) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\log\left(x^2+1\right)\right)=1 \Rightarrow f\left(\log\left(x^2+1\right)\right)=1 \Rightarrow 3\cdot\log\left(x^2+1\right)-2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\log\left(x^2+1\right)=1+2 \Rightarrow 3\cdot\log\left(x^2+1\right)=3 \Rightarrow 3\cdot\log\left(x^2+1\right)=3 \;/:3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(x^2+1\right)=1 \Rightarrow \log\left(x^2+1\right)=\log 10 \Rightarrow x^2+1=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=10-1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x^2=9 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{9} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=3 \\ x_2=-3 \end{matrix}\right\}.$$

Sada je:

$$x_1+x_2=3+(-3) \Rightarrow x_1+x_2=3-3 \Rightarrow x_1+x_2=0.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 224

Zadane su funkcije $f(x)=3\cdot x-2$ i $g(x)=\log\left(x^2+1\right)$. Koliki je umnožak rješenja jednadžbe $(f\circ g)(x)=1$?

A. 0 *B.* −9 *C.* 9 *D.* −6

Rezultat: C.

Zadatak 225 (Petra, gimnazija)

Neprekidna funkcija definirana za sve realne brojeve ima točno dvije točke lokalnoga minimuma A(– 1, 2) i B(4, – 3) i samo jednu točku lokalnoga maksimuma C(1, 3). Odredite interval / intervale **rasta** funkcije na cijeloj domeni.

Rješenje 225

Ponovimo!

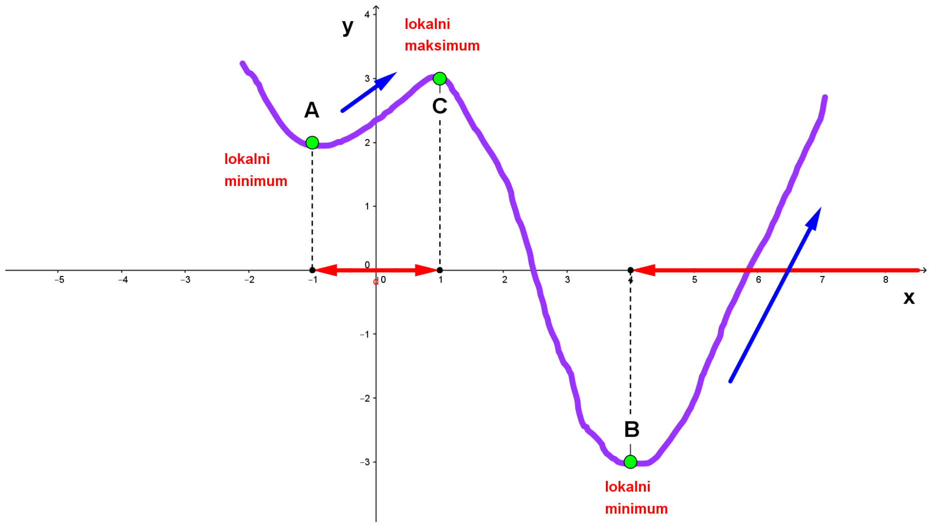
Funkcija f ima lokalni minimum u točki x_0 ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ koji sadrži x_0 tako da vrijedi

$f(x_0)<f(x)$, za svaki $x\in\langle a, b\rangle$, $x_0\neq x$.

Funkcija f ima lokalni maksimum u točki x_0 ako postoji interval $\langle a, b\rangle$ koji sadrži x_0 tako da vrijedi

$f(x_0)>f(x)$, za svaki $x\in\langle a, b\rangle$, $x_0\neq x$.

Ako funkcija f ima lokalni minimum ili lokalni maksimum u točki x_0 kažemo da funkcija f ima lokalni ekstrem u x_0.



Rast funkcije je na intervalima: $\langle -1, 1 \rangle$, $\langle 4, +\infty \rangle$

Vježba 225

Neprekidna funkcija definirana za sve realne brojeve ima točno dvije točke lokalnoga minimuma A(– 1, 2) i B(4, – 3) i samo jednu točku lokalnoga maksimuma C(1, 3). Odredite interval / intervale **pada** funkcije na cijeloj domeni.

Rezultat: $\langle -\infty, -1 \rangle$, $\langle 1, 4 \rangle$.

Zadatak 226 (Tijana, ekonomska škola)

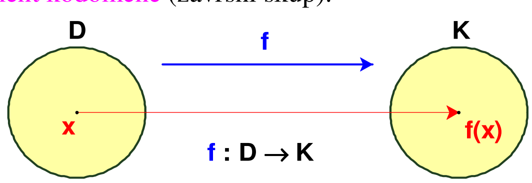
Odredi inverznu funkciju funkcije $f(x) = 2 - 3\sqrt{\frac{2 \cdot x - 1}{4}}$.

Rješenje 226

Ponovimo!

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} \quad , \quad (a+b) : n = a : n + b : n.$$

Funkcija je postupak (pravilo, zakon, preslikavanje) kojim se svakom elementu domene (početni skup) pridružuje samo jedan element kodomene (završni skup).



D – domena, početni skup, ulazni skup, područje definicije funkcije

K – kodomena, antidomena, završni skup, izlazni skup, područje vrijednosti funkcije

x – original, praslika, argument funkcije, varijabla, nezavisna varijabla

f(x) – slika, vrijednost funkcije, zavisna varijabla

Ako je realna funkcija zadana formulom, onda je njezina prirodna domena skup svih realnih brojeva za koje formula ima smisla.

Inverzna funkcija

Neka je $f : A \to B$ bijekcija. Tada postoji jedna i samo jedna bijekcija $g : B \to A$ takva da je

$$(g \circ f)(x) = x \ , \ \forall x \in A$$
$$(f \circ g)(y) = y \ , \ \forall y \in B.$$

Ta jedinstvena bijekcija g označava se sa f^{-1} i zove inverzna funkcija funkcije f.
Zapamtimo!

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x \quad , \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x.$$

Napišimo zadanu funkciju tako da umjesto f(x) pišemo y:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ f(x) = 2 - \sqrt[3]{\dfrac{2 \cdot x - 1}{4}} \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 - \sqrt[3]{\frac{2 \cdot x - 1}{4}}.$$

Sada u funkciji zamijenimo slova x i y:

$$x \leftrightarrow y,$$

$$x = 2 - \sqrt[3]{\frac{2 \cdot y - 1}{4}}..$$

Iz dobivene funkcije trebamo izračunati nepoznanicu y.

$$x = 2 - \sqrt[3]{\frac{2 \cdot y - 1}{4}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{2 \cdot y - 1}{4}} = 2 - x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kubiramo cijelu} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{2 \cdot y - 1}{4}} = 2 - x \ /^{3} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{2 \cdot y - 1}{4}}\right)^3 = (2 - x)^3 \Rightarrow \frac{2 \cdot y - 1}{4} = (2 - x)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot y - 1}{4} = (2 - x)^3 \ / \cdot 4 \Rightarrow 2 \cdot y - 1 = 4 \cdot (2 - x)^3 \Rightarrow 2 \cdot y = 4 \cdot (2 - x)^3 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot y = 4 \cdot (2 - x)^3 + 1 \ /: 2 \Rightarrow y = 2 \cdot (2 - x)^3 + \frac{1}{2}.$$

Na kraju ponovno umjesto y napišemo $f^{-1}(x)$ pa rješenje glasi:

$$f^{-1}(x) = 2 \cdot (2 - x)^3 + \frac{1}{2}.$$

Vježba 226

Odredi inverznu funkciju funkcije $f(x) = 2 - \sqrt[3]{\dfrac{2 \cdot x + 1}{4}}$.

Rezultat: $f^{-1}(x) = 2 \cdot (2 - x)^3 - \dfrac{1}{2}.$

Zadatak 227 (Martin, srednja škola)

Je li funkcija $f(x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$ parna ili neparna?

Rješenje 227

Ponovimo!

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području $-a \le x \le a$ nazivamo:

- parnom, ako je $f(-x) = f(x)$
- neparnom, ako je $f(-x) = -f(x)$.
- Funkcija f(x) = sin x je neparna:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

- Funkcija f(x) = cos x je parna:

$$\cos(-x) = \cos x.$$

$$f(-x) = \cos(\sin(-x)) - \sin(\cos(-x)) \Rightarrow f(-x) = \cos(-\sin x) - \sin(\cos x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-x) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x) \Rightarrow f(-x) = f(x).$$

Funkcija je parna.

Vježba 227

Je li funkcija $f(x) = \cos(\cos x) - \sin(\cos x)$ parna ili neparna?

Rezultat: Parna je.

Zadatak 228 (Martin, srednja škola)

Ako je $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ te $f(a) = b$, koliko je a?

Rješenje 228

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$f(a) = b \Rightarrow \left[f(x) = \frac{x-1}{x+1} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(a) = \frac{a-1}{a+1} \ , \ a \neq -1 \\ f(a) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = b \ / \cdot (a+1) \Rightarrow a - 1 = b \cdot (a+1) \Rightarrow a - 1 = b \cdot a + b \Rightarrow a - b \cdot a = b + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot (1-b) = b + 1 \Rightarrow a \cdot (1-b) = b + 1 \ / \cdot \frac{1}{1-b} \Rightarrow a = \frac{b+1}{1-b} \ , \ b \neq 1.$$

Vježba 228

Ako je $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ te $f(a) = 2$, koliko je a?

Rezultat: -3.

Zadatak 229 (Mario, srednja škola)

Nađite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \log_2 x + \log_4 x$.

Rješenje 229

Ponovimo!

Inverzna funkcija

Neka je $f : A \to B$ bijekcija. Tada postoji jedna i samo jedna bijekcija $g : B \to A$ takva da je

$$(g \circ f)(x) = x \ , \ \forall x \in A$$
$$(f \circ g)(y) = y \ , \ \forall y \in B.$$

Ta jedinstvena bijekcija g označava se sa f^{-1} i zove inverzna funkcija funkcije f.

Zapamtimo!

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x \quad , \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Definicija:

$$\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$
$$\rightarrow$$

$$\log_{b^n} a=\frac{1}{n}\cdot\log_b a \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b} \quad , \quad \log_b a^n=n\cdot\log_b a.$$

$$\log_b b=1 \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x)=\log_2 x+\log_4 x \Rightarrow f(x)=\log_2 x+\log_{2^2} x \Rightarrow f(x)=\log_2 x+\frac{1}{2}\cdot\log_2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\log_2 x}{1}+\frac{\log_2 x}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{2\cdot\log_2 x+\log_2 x}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{3\cdot\log_2 x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}\cdot\log_2 x.$$

Sada tražimo inverznu funkciju.

$$f(x)=\frac{3}{2}\cdot\log_2 x \Rightarrow \left[y=f(x)\right] \Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot\log_2 x \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zamjena}\\ x\leftrightarrow y\end{bmatrix} \Rightarrow x=\frac{3}{2}\cdot\log_2 y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\log_2 y=x \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\log_2 y=x \ /\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \log_2 y=\frac{2}{3}\cdot x \Rightarrow y=2^{\frac{2}{3}\cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\left(2^2\right)^{\frac{x}{3}} \Rightarrow y=4^{\frac{x}{3}} \Rightarrow f^{-1}(x)=4^{\frac{x}{3}}.$$

Ili ovako:

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x \Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right)=x \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\log_2 f^{-1}(x)=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\log_2 f^{-1}(x)=x \ /\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \log_2 f^{-1}(x)=\frac{2}{3}\cdot x \Rightarrow f^{-1}(x)=2^{\frac{2}{3}\cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\left(2^2\right)^{\frac{x}{3}} \Rightarrow f^{-1}(x)=4^{\frac{x}{3}}.$$

2.inačica

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x)=\log_2 x+\log_4 x \Rightarrow f(x)=\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 4} \Rightarrow f(x)=\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\log_2 x+\frac{\log_2 x}{2\cdot\log_2 2} \Rightarrow f(x)=\log_2 x+\frac{\log_2 x}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\log_2 x}{1}+\frac{\log_2 x}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{2\cdot\log_2 x+\log_2 x}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{3\cdot\log_2 x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}\cdot\log_2 x.$$

Sada tražimo inverznu funkciju.

$$f(x)=\frac{3}{2}\cdot\log_2 x \Rightarrow \left[y=f(x)\right] \Rightarrow y=\frac{3}{2}\cdot\log_2 x \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zamjena}\\ x\leftrightarrow y\end{bmatrix} \Rightarrow x=\frac{3}{2}\cdot\log_2 y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\log_2 y = x \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\log_2 y = x \;/\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \log_2 y = \frac{2}{3}\cdot x \Rightarrow y = 2^{\frac{2}{3}\cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \left(2^2\right)^{\frac{x}{3}} \Rightarrow y = 4^{\frac{x}{3}} \Rightarrow f^{-1}(x) = 4^{\frac{x}{3}}.$$

Ili ovako:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x \Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = x \Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = x \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\log_2 f^{-1}(x) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\log_2 f^{-1}(x) = x \;/\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow \log_2 f^{-1}(x) = \frac{2}{3}\cdot x \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^{\frac{2}{3}\cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \left(2^2\right)^{\frac{x}{3}} \Rightarrow f^{-1}(x) = 4^{\frac{x}{3}}.$$

Vježba 229

Nađite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \log_4 x + \log_2 x.$

Rezultat: $f^{-1}(x) = 4^{\frac{x}{3}}.$

Zadatak 230 (2B, TUPŠ)

Broj riba u ribnjaku raste u skladu s eksponencijalnim zakonom $f(x) = 400\cdot 10^{0.02\cdot x}$ gdje je x broj mjeseci proteklih od početka promatranja.
a) Koliki je bio broj riba na početku promatranja?
b) Koliki je bio broj riba u ribnjaku nakon godinu dana?
c) Za koliko će se vremena broj riba udvostručiti?

Rješenje 230

Ponovimo!

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \;\rightarrow \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam
Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log 10 = 1 \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad \log a^n = n\cdot\log a.$$

a)
Na početku promatranja broj riba iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 400\cdot 10^{0.02\cdot x} \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = 400\cdot 10^{0.02\cdot 0} \Rightarrow f(0) = 400\cdot 10^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) = 400\cdot 1 \Rightarrow f(0) = 400 \text{ riba}.$$

b)
Nakon godinu dana, tj. 12 mjeseci broj riba iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x = 12 \\ f(x) = 400 \cdot 10^{0.02 \cdot x} \end{array}\right\} \Rightarrow f(12) = 400 \cdot 10^{0.02 \cdot 12} \Rightarrow f(12) = 400 \cdot 10^{0.24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{bmatrix} \Rightarrow f(12) = 695 \text{ riba}.$$

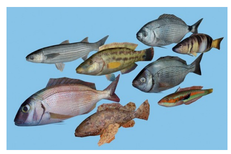
c)
Na početku promatranja bilo je 400 riba.
Budući da se broj riba udvostručio, radi se o jednadžbi:

$$400 \cdot 10^{0.02 \cdot x} = 800 \Rightarrow 400 \cdot 10^{0.02 \cdot x} = 800 \;/ : 400 \Rightarrow 10^{0.02 \cdot x} = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{0.02 \cdot x} = 2 \;/ \log \Rightarrow \log 10^{0.02 \cdot x} = \log 2 \Rightarrow 0.02 \cdot x \cdot \log 10 = \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.02 \cdot x \cdot 1 = \log 2 \Rightarrow 0.02 \cdot x = \log 2 \Rightarrow 0.02 \cdot x = \log 2 \;/ : 0.02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log 2}{0.02} \Rightarrow x = 15.05 \text{ mjeseci}.$$



Vježba 230

Broj riba u ribnjaku raste u skladu s eksponencijalnim zakonom $f(x) = 600 \cdot 10^{0.03 \cdot x}$ gdje je x broj mjeseci proteklih od početka promatranja. Koliki je bio broj riba na početku promatranja?

Rezultat: 600 riba.

Zadatak 231 (4A, TUPŠ)

Zadane su funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = 2 \cdot x - 3$. Riješite jednadžbu $(f \circ g)(x) = 2$.

$$A.\ \frac{3}{2} \qquad B.\ \frac{5}{2} \qquad C.\ \frac{7}{2} \qquad D.\ \frac{9}{2}$$

Rješenje 231

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f : A \to B$, $g : B \to C$ funkcije zadane na A, odnosno na B sa vrijednostima u B, odnosno u C. Tada je sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \;,\; \forall x \in A$$

zadana funkcija $g \circ f : A \to C$ koja se zove kompozicija (složena funkcija) funkcija f i g.

Iracionalna jednadžba je jednadžba u kojoj se nepoznanica pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Uobičajna metoda rješavanja:
Kvadriramo jednadžbu kako bismo je sveli na jednadžbu bez korijena. Često je potrebno i više puta kvadrirati.
Pozor! **Vrijednost izraza (radikanda) pod drugim korijenom mora biti nenegativan broj (broj veći ili jednak nuli).**
Dobivene rezultate uvijek moramo uvrstiti u početnu jednadžbu kako bismo provjerili zadovoljavaju li oni zadanu jednadžbu. Ako ne zadovoljavaju, odbacuju se.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i

jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

1.inačica

$$(f\circ g)(x)=2\ \Rightarrow\ f(g(x))=2\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} f(x)=\sqrt{x} \\ g(x)=2\cdot x-3 \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ f(g(x))=2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{g(x)}=2\ \Rightarrow\ \sqrt{g(x)}=2\ /^{2}\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{g(x)}\right)^{2}=2^{2}\ \Rightarrow\ g(x)=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ g(x)=4\ \Rightarrow\ 2\cdot x-3=4\ \Rightarrow\ 2\cdot x=4+3\ \Rightarrow\ 2\cdot x=7\ \Rightarrow\ 2\cdot x=7\ /:2\ \Rightarrow\ x=\frac{7}{2}.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$(f\circ g)(x)=2\ \Rightarrow\ f(g(x))=2\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} f(x)=\sqrt{x} \\ g(x)=2\cdot x-3 \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ f(g(x))=2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(2\cdot x-3)=2\ \Rightarrow\ f(2\cdot x-3)=2\ \Rightarrow\ \sqrt{2\cdot x-3}=2\ \Rightarrow\ \sqrt{2\cdot x-3}=2\ /^{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\sqrt{2\cdot x-3}\right)^{2}=2^{2}\ \Rightarrow\ 2\cdot x-3=4\ \Rightarrow\ 2\cdot x=4+3\ \Rightarrow\ 2\cdot x=7\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x=7\ /:2\ \Rightarrow\ x=\frac{7}{2}.$$

Provjera!
Ovaj rezultat mora se uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo je li on njezino rješenje.

$$\sqrt{2\cdot x-3}=2$$

$\sqrt{2\cdot x-3}=2$ $x=\frac{7}{2}$
$\sqrt{2\cdot\frac{7}{2}-3}=2$ $\sqrt{2\cdot\frac{7}{2}-3}=2$ $\sqrt{7-3}=2$ $\sqrt{4}=2$ $2=2$ x jest rješenje

Odgovor je pod C.

Vježba 231

Zadane su funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ i $g(x)=2\cdot x-3.$ Riješite jednadžbu $(f\circ g)(x)-2=0.$

$$A.\ \frac{3}{2}\qquad B.\ \frac{5}{2}\qquad C.\ \frac{7}{2}\qquad D.\ \frac{9}{2}$$

Rezultat: C.

Zadatak 232 (4A, 4B, TUPŠ)

Koji je skup domena funkcije $f(x)=\log\left(\frac{x-3}{x}\right)-\log(x+2)$?

$$A.\ \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 0, 3\rangle \qquad B.\ \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$$

$$C.\ \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle \qquad D.\ \langle -2, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$$

Rješenje 232

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}\right\} \text{ ili } \left.\begin{matrix} a<0 \\ b<0 \end{matrix}\right\}.$$

Broj koji dijelimo naziva se **djeljenik** (dividend), broj kojim dijelimo **djelitelj** (divizor). Rezultat dijeljenja zove se **količnik** (kvocijent).

U razlomku $\frac{a}{b}$ broj a zovemo **brojnik**, a broj b **nazivnik**.

Skup zadajemo nabrajanjem njegovih elemenata ili opisom karakterističnih svojstava koja posjeduju njegovi elementi. Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga $A \cap B$.

Unija skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A i sve elemente koji se nalaze u skupu B. Označavamo ga $A \cup B$.

Neka su D i K dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in D$ pridružen točno jedan element $f(x) \in K$, kažemo da je definirana funkcija f sa skupa D u skup K i pišemo

$$f : D \rightarrow K.$$

Skup D je domena funkcije ili područje definicije, a K kodomena funkcije ili područje vrijednosti funkcije. Ako je f funkcija iz R u R i ako je zadana formulom, podrazumijeva se da njezina domena obuhvaća sve realne brojeve za koje analitički izraz (formula) ima smisla. Ta domena zove se prirodno područje definicije ili prirodna domena funkcije f.

Područje definicije (domena) funkcije $f(x)=\log_b x$ je interval realnih brojeva

$$D(f)=\langle 0, +\infty\rangle.$$

Uočimo da iz $\log x$ slijedi x > 0.

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \; \rightarrow \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log *x* zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

Zadana funkcija f bit će definirana ako oba logaritmanda (izraza pod znakom logaritma) budu strogo pozitivni realni brojevi. To znači da istodobno moraju vrijediti sljedeće nejednakosti.

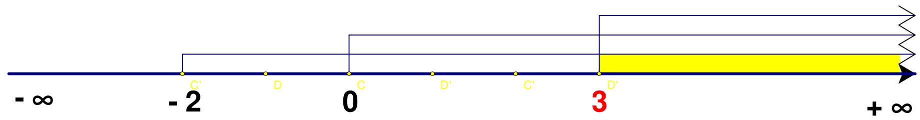
$$f(x)=\log\left(\frac{x-3}{x}\right)-\log(x+2) \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x-3}{x}>0 \\ x+2>0 \end{matrix}\right\}.$$

Uočimo da je kvocijent (razlomak) dvaju realnih brojeva strogo pozitivan realan broj ako i samo ako su djeljenik i djelitelj (brojnik i nazivnik) istodobno ili strogo pozitivni ili strogo negativni realni brojevi. Stoga su moguća sljedeća dva slučaja:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x-3}{x}>0\\&x+2>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\text{1. slučaj}\\&x-3>0\\&x>0\\&x+2>0\end{aligned}\right\}\quad\text{i}\quad\left.\begin{aligned}&\text{2. slučaj}\\&x-3<0\\&x<0\\&x+2>0\end{aligned}\right\}.$$

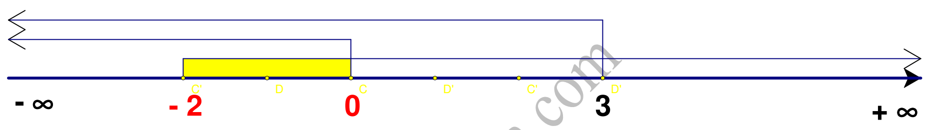
Promotrimo 1. slučaj.

$$\left.\begin{aligned}&x-3>0\\&x>0\\&x+2>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&x>3\\&x>0\\&x>-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left[\begin{aligned}&\text{tražimo presjek}\\&\text{zajednički dio}\end{aligned}\right]\Rightarrow x>3\Rightarrow x\in\left\langle 3,+\infty\right\rangle.$$



Promotrimo 2. slučaj.

$$\left.\begin{aligned}&x-3<0\\&x<0\\&x+2>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&x<3\\&x<0\\&x>-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left[\begin{aligned}&\text{tražimo presjek}\\&\text{zajednički dio}\end{aligned}\right]\Rightarrow -2<x<0\Rightarrow x\in\left\langle -2,0\right\rangle.$$



Budući da može nastupiti ili prvi ili drugi slučaj, domena zadane funkcije je unija skupova dobivenih kao rješenja svakoga pojedinog slučaja. Dakle,

$$x\in\left\langle -2,0\right\rangle\cup\left\langle 3,+\infty\right\rangle.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 232

Koji je skup domena funkcije $f(x)=\log\left(\frac{x-3}{x}\right)+\log(x+2)$?

$A.\ \left\langle -\infty,-2\right\rangle\cup\left\langle 0,3\right\rangle$ $\qquad B.\ \left\langle -\infty,0\right\rangle\cup\left\langle 3,+\infty\right\rangle$

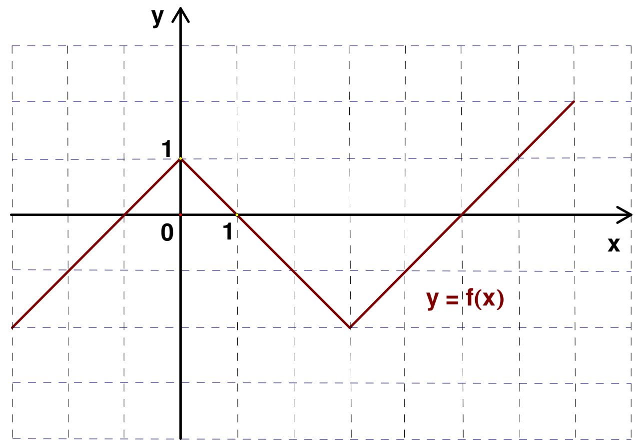
$C.\ \left\langle -\infty,-2\right\rangle\cup\left\langle 0,+\infty\right\rangle$ $\qquad D.\ \left\langle -2,0\right\rangle\cup\left\langle 3,+\infty\right\rangle$

Rezultat: D.

Zadatak 233 (4A, 4B, TUPŠ)

Na slici je graf funkcije f.

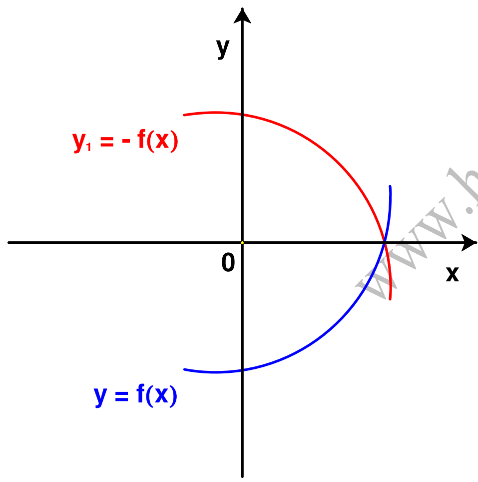
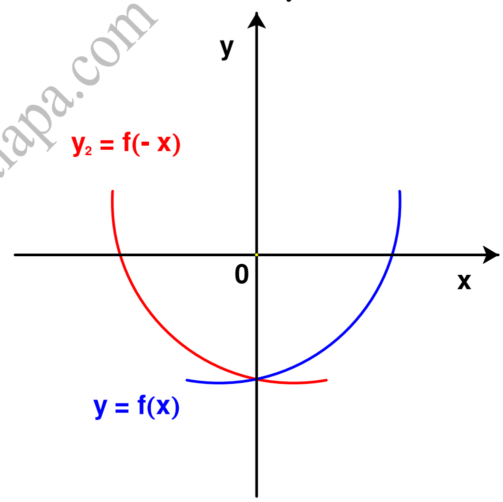
U istome koordinatnome sustavu nacrtajte graf funkcije g takve da je g(x) = f(x) + 1.

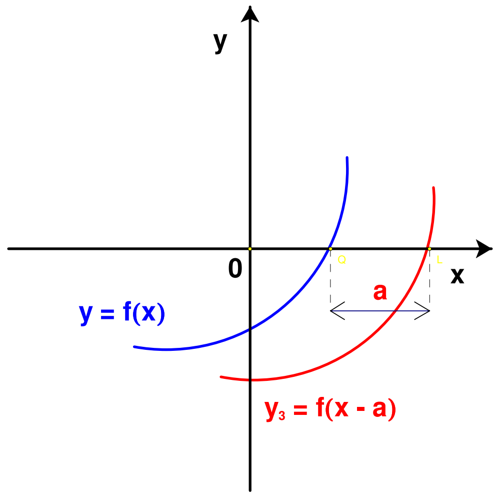
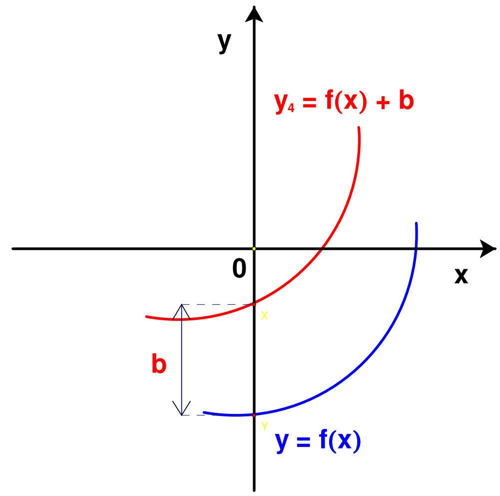


Rješenje 233

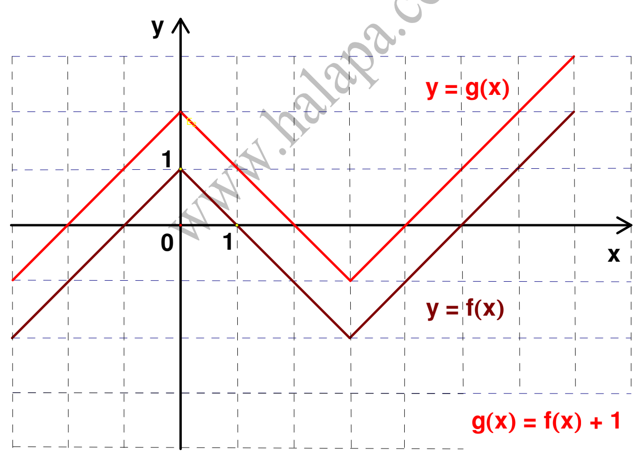
Ponovimo!

Polazeći od grafa y = f(x) pomoću jednostavnih geometrijskih konstrukcija dobivamo ove grafove funkcija:

$y_1 = -f(x)$	$y_2 = f(-x)$
zrcaljenje grafa funkcije y = f(x) na osi x	zrcaljenje grafa funkcije y = f(x) na osi y
	

$y_3 = f\left(x - a\right)$	$y_4 = f\left(x\right) + b$
graf funkcije y = f(x) pomaknut je u pozitivnom smjeru na osi x (+ x) za veličinu a, a > 0	graf funkcije y = f(x) pomaknut je u pozitivnom smjeru na osi y (+ y) za veličinu b, b > 0
	

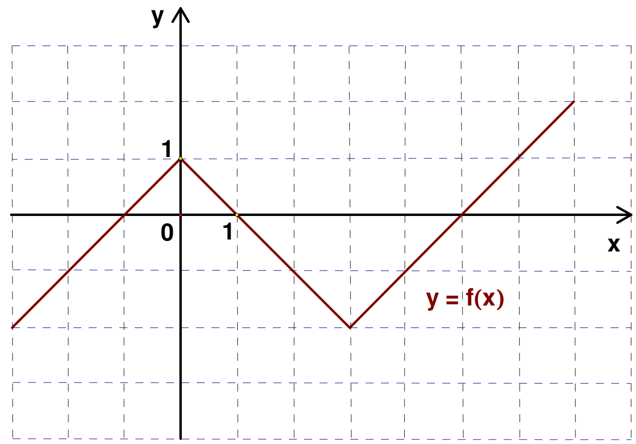
Uočimo da se svaka točka traženog grafa funkcije g dobije tako da svaku točku polaznog grafa funkcije f pomaknemo usporedno s osi y za jednu mjernu jedinicu prema gore, u pozitivnom smjeru y osi.



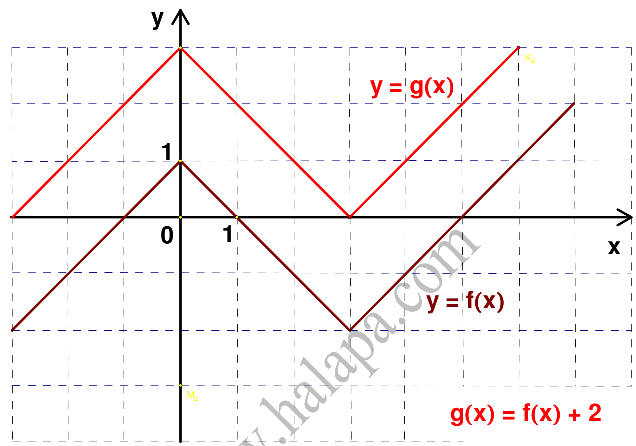
Vježba 233

Na slici je graf funkcije f.

U istome koordinatnome sustavu nacrtajte graf funkcije g takve da je g(x) = f(x) + 2.



Rezultat:



Zadatak 234 (Sanja, ekonomska škola)

Ako je $f(x) = -0.1 \cdot x + b$ linearna funkcija koji je od brojeva f(– 10), f(0), f(10), f(11) najmanji.

$A.\ f(-10) \qquad B.\ f(0) \qquad C.\ f(10) \qquad D.\ f(11)$

Rješenje 234

Ponovimo!

Linearna funkcija je realna funkcija zadana jednadžbom f(x) = a · x + b, a ≠ 0. Graf linearne funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu je pravac y = a · x + b. Koeficijent a zove se koeficijent smjera ili nagib pravca.

$$f(x) = -0.1 \cdot x + b \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(-10) = -0.1 \cdot (-10) + b \\ f(0) = -0.1 \cdot 0 + b \\ f(10) = -0.1 \cdot 10 + b \\ f(11) = -0.1 \cdot 11 + b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(-10) = 1 + b \\ f(0) = b \\ f(10) = -1 + b \\ f(11) = -1.1 + b \ \text{najmanja vrijednost} \end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod D

Vježba 234

Ako je $f(x) = -0.1 \cdot x + b$ linearna funkcija koji je od brojeva f(– 10), f(0), f(10), f(11) najveći?

$A.\ f(-10) \qquad B.\ f(0) \qquad C.\ f(10) \qquad D.\ f(11)$

Rezultat: A.

Zadatak 235 (Martina, gimnazija)

Dokaži da za funkciju $f(x) = 2^x + 1$ vrijedi $f(x+1) = 2 \cdot f(x) - 1$.

Rješenje 235

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1.inačica

$$\left[f(x) = 2^x + 1 \right] \Rightarrow f(x+1) = 2^{x+1} + 1 \Rightarrow f(x+1) = 2^x \cdot 2^1 + 1 \Rightarrow f(x+1) = 2^x \cdot 2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+1) = 2 \cdot 2^x + 1 \Rightarrow f(x+1) = 2 \cdot 2^x + 2 - 1 \Rightarrow f(x+1) = \left(2 \cdot 2^x + 2\right) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+1) = 2 \cdot \left(2^x + 1\right) - 1 \Rightarrow f(x+1) = 2 \cdot f(x) - 1.$$

2.inačica

$$f(x+1) = 2 \cdot f(x) - 1 \Rightarrow f(x+1) - 2 \cdot f(x) + 1 = 0 \Rightarrow \left[f(x) = 2^x + 1 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x+1} + 1 - 2 \cdot \left(2^x + 1\right) + 1 = 0 \Rightarrow 2^{x+1} + 1 - 2 \cdot 2^x - 2 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x+1} + 1 - 2^{x+1} - 2 + 1 = 0 \Rightarrow \cancel{2^{x+1}} \cancel{+1} \cancel{-2^{x+1}} \cancel{-2} \cancel{+1} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

Vježba 235

Dokaži da za funkciju $f(x) = 2^x + 1$ vrijedi $f(x+1) + 1 = 2 \cdot f(x)$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 236 (Davor, gimnazija)

Dana je linearna funkcija f(x) = 2 · x – 5. Ako je prirast Δx varijable x jednak c, prirast Δf funkcije jednak je:

$A.\ 2 \cdot c \qquad B.\ 5 \cdot c \qquad C.\ -2 \cdot c \qquad D.\ -5 \cdot c$

Rješenje 236

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Linearna funkcija je realna funkcija zadana jednadžbom f(x) = a · x + b, a ≠ 0.
Ako su x_1 i x_2 vrijednosti varijable x ($x_1 < x_2$) njezin prirast Δx iznosi:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Prirast Δf funkcije f je:

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1).$$

Prirast Δx varijable x jednak je c.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta x = c\end{array}\right\} \Rightarrow x_2 - x_1 = c.$$

Računamo prirast Δf funkcije f.

$$\left.\begin{array}{l}f(x_1) = 2 \cdot x_1 - 5 \\ f(x_2) = 2 \cdot x_2 - 5\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\Delta f = f(x_2) - f(x_1)\right] \Rightarrow \Delta f = 2 \cdot x_2 - 5 - (2 \cdot x_1 - 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta f = 2 \cdot x_2 - 5 - 2 \cdot x_1 + 5 \Rightarrow \Delta f = 2 \cdot x_2 - 5 - 2 \cdot x_1 + 5 \Rightarrow \Delta f = 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta f = 2 \cdot (x_2 - x_1) \Rightarrow \Delta f = 2 \cdot \Delta x \Rightarrow [\Delta x = c] \Rightarrow \Delta f = 2 \cdot c.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 236

Dana je linearna funkcija f(x) = 5 · x – 3. Ako je prirast Δx varijable x jednak c, prirast Δf funkcije jednak je:

$$A.\ 2 \cdot c \qquad B.\ 5 \cdot c \qquad C.\ -2 \cdot c \qquad D.\ -5 \cdot c$$

Rezultat: B.

Zadatak 237 (Davor, gimnazija)

Nultočka linearne funkcije $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + b$ je x = – 4. Tada je:

$$A.\ b = 0 \qquad B.\ b = 1 \qquad C.\ b = -2 \qquad D.\ b = 3$$

Rješenje 237

Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

Linearna funkcija je realna funkcija zadana jednadžbom f(x) = a · x + b, a ≠ 0.
Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_\circ) = 0.$$

Budući da je x = – 4 nultočka funkcije f vrijedi:

$$f(-4) = 0.$$

Dalje imamo:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + b \Rightarrow f(-4) = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + b \Rightarrow f(-4) = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-4) = 2 + b \Rightarrow [f(-4) = 0] \Rightarrow 0 = 2 + b \Rightarrow 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 237

Nultočka linearne funkcije $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + b$ je x = 2. Tada je:

$$A.\ b = 0 \qquad B.\ b = 1 \qquad C.\ b = -2 \qquad D.\ b = 3$$

Rezultat: B.

Zadatak 238 (Sandra, maturantica)

Zadane su funkcije $f(x)=2\cdot x$ i $g(x)=\log_5 x.$ Riješite jednadžbu $(f\circ g)(x)=7.$

Rješenje 238

Ponovimo!

Neka su A, B i C neprazni skupovi i $f: A\to B,\ g: B\to C$ funkcije zadane na A, odnosno na B sa vrijednostima u B, odnosno u C. Tada je sa

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))\ ,\ \forall x\in A$$

zadana funkcija $g\circ f: A\to C$ koja se zove kompozicija (složena funkcija) funkcija f i g.

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \ \rightarrow \qquad a=b^c$$

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad,\quad \sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}}=\sqrt[n]{a^m}\quad,\quad a^1=a\quad,\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

1.inačica

$$(f\circ g)(x)=7\ \Rightarrow\ f(g(x))=7\ \Rightarrow\ f(g(x))=7\ \Rightarrow\ 2\cdot g(x)=7\ \Rightarrow\ 2\cdot g(x)=7\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\log_5 x=7\ \Rightarrow\ 2\cdot\log_5 x=7\ /:2\ \Rightarrow\ \log_5 x=\frac{7}{2}\ \Rightarrow\ x=5^{\frac{7}{2}}\ \Rightarrow\ x=\sqrt{5^7}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\sqrt{5^6\cdot 5^1}\ \Rightarrow\ x=\sqrt{5^6}\cdot\sqrt{5^1}\ \Rightarrow\ x=5^3\cdot\sqrt{5}\ \Rightarrow\ x=125\cdot\sqrt{5}\ \Rightarrow\ x=279.508.$$

2.inačica

$$(f\circ g)(x)=7\ \Rightarrow\ f(g(x))=7\ \Rightarrow\ f(g(x))=7\ \Rightarrow\ f(log_5 x)=7\ \Rightarrow\ f(log_5 x)=7\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\log_5 x=7\ \Rightarrow\ 2\cdot\log_5 x=7\ /:2\ \Rightarrow\ \log_5 x=\frac{7}{2}\ \Rightarrow\ x=5^{\frac{7}{2}}\ \Rightarrow\ x=\sqrt{5^7}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\sqrt{5^6\cdot 5^1}\ \Rightarrow\ x=\sqrt{5^6}\cdot\sqrt{5^1}\ \Rightarrow\ x=5^3\cdot\sqrt{5}\ \Rightarrow\ x=125\cdot\sqrt{5}\ \Rightarrow\ x=279.508.$$

Vježba 238

Zadane su funkcije $f(x)=2\cdot x$ i $g(x)=\log_5 x.$ Riješite jednadžbu $(f\circ g)(x)=2.$

Rezultat: x = 5.

Zadatak 239 (Vedran, tehnička škola)

Tablicom

x	2	– 2
f(x)	– 2	4

prikazane su vrijednosti funkcije:

$A.\ f(x)=2\cdot x+8 \qquad B.\ f(x)=-2\cdot x+8$

$C.\ f(x)=-1.5\cdot x+1 \qquad D.\ f(x)=-\frac{2}{3}\cdot x-\frac{2}{3}$

Rješenje 239

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot b = 1.$$

Funkcija

$$f(x) = a \cdot x + b$$

zove se linearna funkcija. Brojevi a i b su racionalni brojevi i $a \neq 0$.
Linearnu funkciju

$$f(x) = a \cdot x + b$$

određuje skup uređenih parova (x, y) koje možemo prikazati u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini.
Graf linearne funkcije

$$f(x) = a \cdot x + b$$

je pravac čija jednadžba glasi

$$y = a \cdot x + b.$$

Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima jednadžbu:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Razlomak pretvaramo u decimalni broj tako da brojnik podijelimo nazivnikom.

1.inačica

U ponuđenim odgovorima dane su linearne funkcije, a njihovi su grafovi pravci. Dakle, jedan od ponuđenih odgovora je pravac koji prolazi točkama A(2, – 2) i B(– 2, 4). Pomoću formule za jednadžbu pravca kroz dvije točke odredit ćemo točan odgovor.

$$\left. \begin{aligned} A(x_1, y_1) &= A(2, -2) \\ B(x_2, y_2) &= B(-2, 4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - (-2) = \frac{4 - (-2)}{-2 - 2} \cdot (x - 2) \Rightarrow y + 2 = \frac{4 + 2}{-4} \cdot (x - 2) \Rightarrow y + 2 = -\frac{6}{4} \cdot (x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 2 = -\frac{6}{4} \cdot (x - 2) \Rightarrow y + 2 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 2) \Rightarrow y + 2 = -\frac{3}{2} \cdot x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x + 3 - 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x + 1 \Rightarrow y = -1.5 \cdot x + 1.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

U ponuđenim odgovorima dana je linearna funkcija

$$f(x) = a \cdot x + b.$$

Budući da su tablicom zadane vrijednosti funkcije, uvrstit ćemo zadane brojeve u formulu.

$$f(x)=a\cdot x+b \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(2)=a\cdot 2+b \\ f(-2)=a\cdot(-2)+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f(2)=2\cdot a+b \\ f(-2)=-2\cdot a+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{iz tablice} \\ f(2)=-2 \\ f(-2)=4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -2=2\cdot a+b \\ 4=-2\cdot a+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot a+b=-2 \\ -2\cdot a+b=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow 2\cdot b=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot b=2 \;/:2 \Rightarrow b=1.$$

Računamo a.

$$\left.\begin{matrix} 2\cdot a+b=-2 \\ b=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\cdot a+1=-2 \Rightarrow 2\cdot a=-2-1 \Rightarrow 2\cdot a=-3 \Rightarrow 2\cdot a=-3 \;/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=-\frac{3}{2} \Rightarrow a=-1.5.$$

Funkcija je dana izrazom:

$$f(x)=a\cdot x+b \Rightarrow \begin{bmatrix} a=-1.5 \\ b=1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(x)=-1.5\cdot x+1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 239

Tablicom

x	2	3
f(x)	1	4

prikazane su vrijednosti funkcije:

$$A.\ f(x)=2\cdot x-3 \qquad B.\ f(x)=2\cdot x+2$$
$$C.\ f(x)=3\cdot x+5 \qquad D.\ f(x)=3\cdot x-5$$

Rezultat: D.

Zadatak 240 (4A, 4B, TUPŠ)

Zadana je funkcija $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x$. Odredite amplitudu i temeljnu periodu.

Rješenje 240

Ponovimo!

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y..$$

Za funkciju

$$f(x)=a\cdot\sin(b\cdot x+c)$$

je:

- $|a|$ amplituda
- $P=\frac{2\cdot\pi}{|b|}$ temeljna perioda
- c fazni pomak.

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\geq 0$, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.
Ako je zadana funkcija

$$f(x) = a_1 \cdot \cos(b \cdot x) + a_2 \cdot \sin(b \cdot x),$$

tada vrijede formule za:

- amplitudu

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

- periodu

$$P = \frac{2 \cdot \pi}{|b|}.$$

Ako su a i b prirodni brojevi, onda broj koji je djeljiv i brojem a i brojem b zovemo zajedničkim višekratnikom brojeva a i b. Svaka dva prirodna broja imaju beskonačno puno zajedničkih višekratnika. Najmanji od njih zovemo najmanjim zajedničkim višekratnikom tih brojeva.

$$\frac{n}{1} = n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Trigonometrijska funkcija sinus periodična je funkcija sa temeljnom periodom 360° (ili 2 · π rad).

$$\sin\left(\alpha + k \cdot 360^0\right) = \sin\alpha \quad , \quad \sin(\alpha + k \cdot 2 \cdot \pi) = \sin\alpha \;,\; k \in Z.$$

Trigonometrijska funkcija kosinus periodična je funkcija sa temeljnom periodom 360° (ili 2 · π rad).

$$\cos\left(\alpha + k \cdot 360^0\right) = \cos\alpha \quad , \quad \cos(\alpha + k \cdot 2 \cdot \pi) = \cos\alpha \;,\; k \in Z.$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu funkciju.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x \;\Rightarrow\; f(x) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \sin x + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x) = \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \;\Rightarrow\; f(x) = 1 \cdot \sin\left(1 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \text{ amplituda} \\ b = 1 \\ c = \frac{\pi}{3} \text{ fazni pomak} \end{array}\right\}.$$

Temeljna perioda je

$$\left.\begin{array}{l} b = 1 \\ P = \frac{2 \cdot \pi}{b} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; P = \frac{2 \cdot \pi}{1} \;\Rightarrow\; P = 2 \cdot \pi.$$

2.inačica

Temeljna perioda zadane funkcije

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x$$

jednaka je najmanjem zajedničkom višekratniku temeljnih perioda pojedinih funkcija (sin x i cos x). Ovo pravilo vrijedi samo za zbroj i razliku pojedinih funkcija. Budući da funkcije sin x i cox x imaju temeljne periode 2 · π, temeljna perioda zadane funkcije je najmanji zajednički višekratnih tih brojeva.

$$P=2\cdot\pi.$$

Amplituda funkcije f iznosi:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1&=\frac{1}{2} \\ a_2&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\; a=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}} \;\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2^2}} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{1+3}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{\frac{4}{4}} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{4}{4}} \Rightarrow a=\sqrt{1} \Rightarrow a=1.$$

Vježba 240

Zadana je funkcija $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x+\frac{1}{2}\cdot\sin x.$ Odredite amplitudu i temeljnu periodu.

Rezultat: $a=1\ ,\ \ P=2\cdot\pi.$