Zadatak 081 (Mira, gimnazija)

Duljine stranica trokuta su tri uzastopna parna broja. Površina trokuta je 24 cm^2. Kolika je duljina najmanje stranice?

Rješenje 081

Ponovimo!

Poluopseg trokuta: $s=\frac{a+b+c}{2}$, Heronova formula: $P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$

razlika kvadrata: $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$, $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0$ ili $b=0$ ili $a=b=0$

1.inačica

$a = 2\cdot n$, $b = 2\cdot n + 2$, $c = 2\cdot n + 4$

Poluopseg trokuta iznosi:

$$s=\frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s=\frac{2\cdot n+2\cdot n+2+2\cdot n+4}{2} \Rightarrow s=\frac{6\cdot n+6}{2} \Rightarrow s=3\cdot n+3.$$

Iz Heronove formule izračunat ćemo n:

$$\left.\begin{array}{l} P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \\ s=3\cdot n+3 \quad , \quad P=24 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24=\sqrt{(3\cdot n+3)\cdot(3\cdot n+3-2\cdot n)\cdot(3\cdot n+3-2\cdot n-2)\cdot(3\cdot n+3-2\cdot n-4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24=\sqrt{(3\cdot n+3)\cdot(n+3)\cdot(n+1)\cdot(n-1)} \Rightarrow 24=\sqrt{(3\cdot n+3)\cdot(n+3)\cdot\left(n^2-1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24=\sqrt{\left(3\cdot n^2+9\cdot n+3\cdot n+9\right)\cdot\left(n^2-1\right)} \Rightarrow 24=\sqrt{\left(3\cdot n^2+12\cdot n+9\right)\cdot\left(n^2-1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24=\sqrt{3\cdot n^4-3\cdot n^2+12\cdot n^3-12\cdot n+9\cdot n^2-9} \Rightarrow 24=\sqrt{3\cdot n^4+12\cdot n^3+6\cdot n^2-12\cdot n-9} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 576=3\cdot n^4+12\cdot n^3+6\cdot n^2-12\cdot n-9 \;/:3 \Rightarrow 192=n^4+4\cdot n^3+2\cdot n^2-4\cdot n-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^4+4\cdot n^3+2\cdot n^2-4\cdot n-195=0.$$

Dobivenu jednadžbu rastavimo na faktore (faktoriziramo):

$$n^4+4\cdot n^3+2\cdot n^2-4\cdot n-195=0 \Rightarrow n^4+7\cdot n^3+23\cdot n^2+65\cdot n-3\cdot n^3-21\cdot n^2-69\cdot n-195=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(n^4+7\cdot n^3+23\cdot n^2+65\cdot n\right)+\left(-3\cdot n^3-21\cdot n^2-69\cdot n-195\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cdot\left(n^3+7\cdot n^2+23\cdot n+65\right)-3\cdot\left(n^3+7\cdot n^2+23\cdot n+65\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(n^3+7\cdot n^2+23\cdot n+65\right)\cdot(n-3)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n^3+7\cdot n^2+23\cdot n+65=0 \\ n-3=0 \end{array}\right\}.$$

Budući da je za $n\in N$ izraz $n^3+7\cdot n^2+23\cdot n+65>0$, tada je jedino n – 3 = 0. Zato je n = 3.

Najmanja stranica trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a=2\cdot n \\ n=3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=2\cdot 3=6\ cm.$$

2.inačica

$a = 2\cdot n - 2$, $b = 2\cdot n$, $c = 2\cdot n + 2$

Poluopseg trokuta iznosi:

$$s=\frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s=\frac{2\cdot n-2+2\cdot n+2\cdot n+2}{2} \Rightarrow s=\frac{6\cdot n}{2} \Rightarrow s=3\cdot n.$$

Iz Heronove formule izračunat ćemo n:

$$\left.\begin{array}{l} P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \\ s=3\cdot n \quad , \quad P=24 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24=\sqrt{3\cdot n\cdot(3\cdot n-2\cdot n+2)\cdot(3\cdot n-2\cdot n)\cdot(3\cdot n-2\cdot n-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24=\sqrt{3\cdot n\cdot(n+2)\cdot n\cdot(n-2)} \Rightarrow 24=\sqrt{3\cdot n^2\cdot(n+2)\cdot(n-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24=\sqrt{3\cdot n^2\cdot\left(n^2-4\right)} \Rightarrow 24=\sqrt{3\cdot n^4-12\cdot n^2} \Rightarrow 24=\sqrt{3\cdot n^4-12\cdot n^2} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 576=3\cdot n^4-12\cdot n^2 \Rightarrow 3\cdot n^4-12\cdot n^2-576=0 \;/:3 \Rightarrow n^4-4\cdot n^2-192=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{bikvadratna jednadžba} \\ t=n^2 \end{array}\right] \Rightarrow t^2-4\cdot t-192=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+4\cdot 1\cdot 192}}{2\cdot 1} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{784}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm 28}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\frac{4+28}{2}=\frac{32}{2}=16 \\ t_2=\frac{4-28}{2}=\frac{-24}{2}=-12 \;(\text{nema smisla}) \end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t=n^2 \\ t=16 \end{array}\right\} \Rightarrow n^2=16 \;/\sqrt{} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=4 \\ n_2=-4 \;(\text{nema smisla}) \end{array}\right\}.$$

Najmanja stranica trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a=2\cdot n-2 \\ n=4 \end{array}\right\} \Rightarrow a=2\cdot 4-2=6\ cm.$$

Vježba 081

Duljine stranica trokuta su tri uzastopna parna broja. Površina trokuta je 24 cm^2. Kolika je duljina najveće stranice?

Rezultat: 10 cm.

Zadatak 082 (Krešo, gimnazija)

Duljine su dviju stranica raznostraničnog trokuta 4 i 6, a njima nasuprotni kutovi odnose se kao 1 : 2. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

Rješenje 082

Ponovimo!

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0 \quad , \quad \text{kosinusov poučak}: c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$$

$$\text{sinusov poučak: } a:b=\sin\alpha:\sin\beta \quad , \quad \sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad , \quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \quad , \quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \quad , \quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha=4\cdot\cos^3\alpha-3\cdot\cos\alpha \quad , \quad a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

1.inačica

Pretpostavimo da je a = 4, b = 6, α : β = 1 : 2.

Kut γ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha:\beta=1:2\\ \alpha+\beta+\gamma=180^0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=2\cdot\alpha\\ \gamma=180^0-(\alpha+\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow\gamma=180^0-3\cdot\alpha.$$

Duljinu stranice c odredimo pomoću kosinusovog poučka:

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\Rightarrow c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\left(180^0-3\cdot\alpha\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\cdot\cos 3\alpha.$$

Sada računamo cos 3α uporabom sinusovog poučka i osnovnih trigonometrijskih relacija:

$$a:b=\sin\alpha:\sin\beta\Rightarrow a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha\Rightarrow a\cdot\sin 2\alpha=b\cdot\sin\alpha\Rightarrow a\cdot 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha-b\cdot\sin\alpha=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin\alpha\cdot(2\cdot a\cdot\cos\alpha-b)=0\Rightarrow[\sin\alpha\neq 0]\Rightarrow 2\cdot a\cdot\cos\alpha-b=0\Rightarrow 2\cdot a\cdot\cos\alpha=b\ /\cdot\frac{1}{2\cdot a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{b}{2\cdot a}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{6}{2\cdot 4}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{4}.$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\frac{9}{16}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{7}{16}\ /\sqrt{\ }\Rightarrow\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\Rightarrow\sin 2\alpha=2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3}{4}\Rightarrow\sin 2\alpha=\frac{3\cdot\sqrt{7}}{8}.$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\Rightarrow\cos 2\alpha=\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2\Rightarrow\cos 2\alpha=\frac{9}{16}-\frac{7}{16}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos 2\alpha=\frac{2}{16}\Rightarrow\cos 2\alpha=\frac{1}{8}.$$

$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha\Rightarrow\cos 3\alpha=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4}-\frac{3\cdot\sqrt{7}}{8}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos 3\alpha=\frac{3}{32}-\frac{21}{32}\Rightarrow\cos 3\alpha=-\frac{18}{32}\Rightarrow\cos 3\alpha=-\frac{9}{16}.$$

Duljina stranice c iznosi:

$$c^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\cdot\cos 3\alpha\Rightarrow c^2=4^2+6^2+2\cdot 4\cdot 6\cdot\left(-\frac{9}{16}\right)\Rightarrow c^2=16+36-2\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{9}{16}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=52-27\Rightarrow c^2=25\ /\sqrt{\ }\Rightarrow c=5.$$

2.inačica

Pretpostavimo da je a = 4, b = 6, α : β = 1 : 2.

Kut γ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha:\beta=1:2\\ \alpha+\beta+\gamma=180^0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=2\cdot\alpha\\ \gamma=180^0-(\alpha+\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow\gamma=180^0-3\cdot\alpha.$$

Duljinu stranice c odredimo uporabom kosinusovog poučka:

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\Rightarrow c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\left(180^0-3\cdot\alpha\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\cdot\cos 3\alpha.$$

Sada računamo cos 3α pomoću sinusovog poučka:

$$a:b=\sin\alpha:\sin\beta \Rightarrow a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha \Rightarrow a\cdot\sin2\alpha=b\cdot\sin\alpha \Rightarrow a\cdot2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha-b\cdot\sin\alpha=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cdot(2\cdot a\cdot\cos\alpha-b)=0 \Rightarrow [\sin\alpha\neq0] \Rightarrow 2\cdot a\cdot\cos\alpha-b=0 \Rightarrow 2\cdot a\cdot\cos\alpha=b \;/\cdot\frac{1}{2\cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{b}{2\cdot a} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{6}{2\cdot4} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{3}{4}.$$

$$\cos3\alpha=4\cdot\cos^3\alpha-3\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos3\alpha=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3-3\cdot\frac{3}{4} \Rightarrow \cos3\alpha=4\cdot\frac{27}{64}-\frac{9}{4} \Rightarrow \cos3\alpha=\frac{27}{16}-\frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos3\alpha=\frac{27-36}{16} \Rightarrow \cos3\alpha=-\frac{9}{16}.$$

Duljina stranice c ima vrijednost:

$$c^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\cdot\cos3\alpha \Rightarrow c^2=4^2+6^2+2\cdot4\cdot6\cdot\left(-\frac{9}{16}\right) \Rightarrow c^2=16+36-2\cdot4\cdot6\cdot\frac{9}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=52-27 \Rightarrow c^2=25 \;/\sqrt{} \Rightarrow c=5.$$

Vježba 082

Duljine su dviju stranica raznostraničnog trokuta 4 i 6, a njima nasuprotni kutovi odnose se kao 1 : 2. Koliki je opseg trokuta?

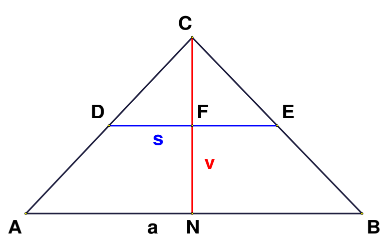
Rezultat: 15.

Zadatak 083 (Mira, gimnazija)

Srednjica trokuta ABC dijeli ga na manji trokut i na trapez kojima se površine odnose kao:

A. ovisi o početnom trokutu *B.* 1 : 3 *C.* 1 : 2 *D.* 1 : 4 *E.* 2 : 3

Rješenje 083



$$|AB|=a,\; s=|DE|=\frac{a}{2},\; |NC|=v,\; |NF|=|FC|=\frac{v}{2}$$

$$P_{DEC}=\frac{|DE|\cdot|FC|}{2} \Rightarrow P_{DEC}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{v}{2}}{2} \Rightarrow P_{DEC}=\frac{a\cdot v}{8}.$$

$$P_{ABED}=\frac{|AB|+|DE|}{2}\cdot|NF| \Rightarrow P_{ABED}=\frac{a+\frac{a}{2}}{2}\cdot\frac{v}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABED}=\frac{\frac{3\cdot a}{2}}{2}\cdot\frac{v}{2} \Rightarrow P_{ABED}=\frac{3\cdot a}{4}\cdot\frac{v}{2} \Rightarrow P_{ABED}=\frac{3\cdot a\cdot v}{8}.$$

Računamo omjer:

$$\frac{P_{DEC}}{P_{ABED}}=\frac{\frac{a\cdot v}{8}}{\frac{3\cdot a\cdot v}{8}} \Rightarrow \frac{P_{DEC}}{P_{ABED}}=\frac{1}{3} \Rightarrow P_{DEC}:P_{ABED}=1:3.$$

Vježba 083

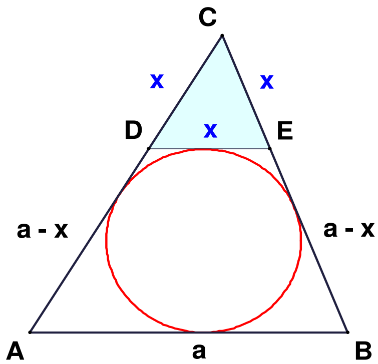
Srednjica trokuta ABC dijeli ga na manji trokut i na trapez. Kako se odnose površine većeg trokuta i trapeza?

Rezultat: 4 : 3.

Zadatak 084 (Kety, gimnazija)

Točke D i E nalaze se redom na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednakostraničnog trokuta ABC sa stranicom duljine a. Ako vrijedi | CD | = | CE | i ako se u četverokut ABED može upisati kružnica, koliko iznosi │CD│?

Rješenje 084



$$|AB| = |BC| = |CA| = a \quad , \quad |CE| = |CD| = x$$

$$|AD| = |BE| = a - x.$$

Zbog uvjeta │CD│ = │CE│ slijedi da je trokut DEC jednakostraničan:

$$|DE| = |CE| = |CD| = x.$$

Budući da se četverokutu ABED može upisati kružnica, on je tangencijalan pa vrijedi:

$$|AB| + |DE| = |AD| + |BE| \Rightarrow a + x = a - x + a - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = a \; /:3 \Rightarrow x = \frac{a}{3} \Rightarrow |CD| = \frac{a}{3}.$$

Vježba 084

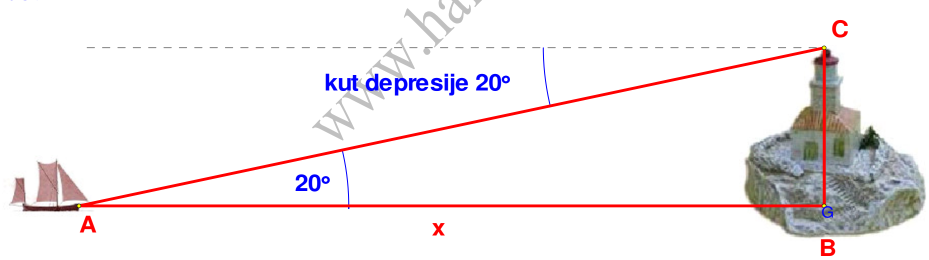
Točke D i E nalaze se redom na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednakostraničnog trokuta ABC sa stranicom duljine a. Ako vrijedi │CD│ = │CE│ i ako se u četverokut ABED može upisati kružnica, koliko iznosi │AD│?

Rezultat: $\frac{2 \cdot a}{3}.$

Zadatak 085 (Anamarija, gimnazija)

S vrha svjetionika visokog 30 m vidi se brod pod kutom depresije od 20°. Koliko je brod udaljen od svjetionika?

Rješenje 085



Sa slike vidi se:

$$|BC| = 30\ m, \quad \angle CAB = 20^0, \quad |AB| = x.$$

Budući da su kutovi uz transverzalu jednaki, vrijedi:

$$\angle CAB = 20^0.$$

Udaljenost broda od svjetionika dobije se iz pravokutnog trokuta ABC:

$$ctg\ 20^0 = \frac{|AB|}{|BC|} \Rightarrow ctg\ 20^0 = \frac{x}{30} \Rightarrow x = 30 \cdot ctg\ 20^0 = 30 \cdot 2.74747742 \approx 82.4\ m.$$

Vježba 085

S vrha svjetionika visokog 30 m vidi se brod pod kutom depresije od 15°. Koliko je brod udaljen od svjetionika?

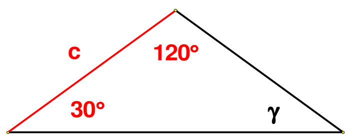
Rezultat: 111.96 m.

Zadatak 086 (Frenky, tehnička škola)

Stranica trokuta ima duljinu 8, a kutovi uz tu stranicu jednaki su 30° i 120°. Nađite površinu trokuta.

Rješenje 086

c = 8, α = 120°, β = 30°



$$\alpha+\beta+\gamma=180^0 \Rightarrow \gamma=180^0-(\alpha+\beta) \Rightarrow \gamma=30^0.$$

$$P_\Delta=\frac{c^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin\gamma} \Rightarrow P_\Delta=\frac{8^2\cdot\sin 30^0\cdot\sin 120^0}{2\cdot\sin 30^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_\Delta=\frac{64\cdot\sin 120^0}{2} \Rightarrow \left[\sin 120^0=\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow P_\Delta=\frac{64\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow P_\Delta=\frac{64\cdot\sqrt{3}}{4}=16\cdot\sqrt{3}.$$

Vježba 086

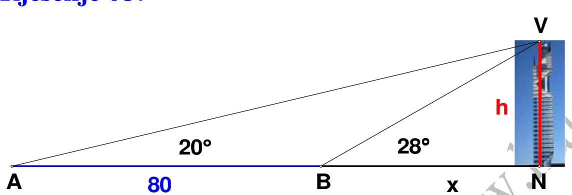
Stranica trokuta ima duljinu 4, a kutovi uz tu stranicu jednaki su 30° i 120°. Nađite površinu trokuta.

Rezultat: $4\cdot\sqrt{3}.$

Zadatak 087 (Frenky, tehnička škola)

Vrh nebodera V vidi se iz točaka A i B, koje su međusobno udaljene 80 m, pod kutovima elevacije od 20°, odnosno 28°. Koliko je visok neboder?

Rješenje 087



Neka je h visina nebodera, a x udaljenost $|BN|$:

$$h=|VN|\ ,\ x=|BN|\ ,\ |AB|=80$$

$$|AN|=|AB|+|BN|=80+x.$$

Iz pravokutnog trokuta ANV slijedi:

$$tg\,20^0=\frac{|VN|}{|AN|} \Rightarrow |VN|=|AN|\cdot tg\,20^0 \Rightarrow h=(80+x)\cdot tg\,20^0.$$

Iz pravokutnog trokuta BNV dobije se:

$$tg\,28^0=\frac{|VN|}{|BN|} \Rightarrow |VN|=|BN|\cdot tg\,28^0 \Rightarrow h=x\cdot tg\,28^0.$$

Iz sustava jednadžbi metodom supstitucije izračuna se visina h:

$$\left.\begin{array}{l} h=(80+x)\cdot tg\,20^0 \\ h=x\cdot tg\,28^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h=80\cdot tg\,20^0+x\cdot tg\,20^0 \\ x=\dfrac{h}{tg\,28^0} \end{array}\right\} \Rightarrow h=80\cdot tg\,20^0+\frac{h}{tg\,28^0}\cdot tg\,20^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h-\frac{h}{tg\,28^0}\cdot tg\,20^0=80\cdot tg\,20^0 \Rightarrow h\cdot\left(1-\frac{tg\,20^0}{tg\,28^0}\right)=80\cdot tg\,20^0 \Rightarrow h=\frac{80\cdot tg\,20^0}{1-\dfrac{tg\,20^0}{tg\,28^0}}=92.3\ m.$$

Vježba 087

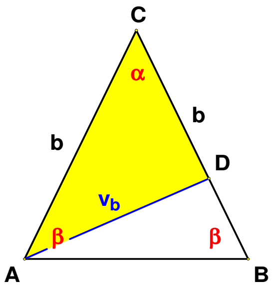
Vrh nebodera V vidi se iz točaka A i B, koje su međusobno udaljene 160 m, pod kutovima elevacije od 20°, odnosno 28°. Koliko je visok neboder?

Rezultat: 184.6 m.

Zadatak 088 (Gimnazijalka, gimnazija)

Odredite kutove jednakokračnog trokuta ako visina na krak dijeli krak u omjeru 3 : 5.

Rješenje 088



$$|BC| = |AC| \quad , \quad |BD| : |DC| = 3 : 5.$$

Iz zadanog omjera dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} |BD| = 3 \cdot k \\ |DC| = 5 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow |AC| = |BC| = |BD| + |DC| = 3 \cdot k + 5 \cdot k = 8 \cdot k.$$

Uočimo pravokutan trokut ADC:

$$\cos\alpha = \frac{|DC|}{|AC|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5 \cdot k}{8 \cdot k} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{5}{8} \Rightarrow \alpha = 51^0 19'.$$

Kut β iznosi:

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^0 \Rightarrow 2 \cdot \beta = 180^0 - \alpha \; /:2 \Rightarrow \beta = 90^0 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \beta = 90^0 - \frac{51^0 19'}{2} \Rightarrow \beta = 90^0 - \frac{50^0 79'}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 90^0 - \frac{50^0 78'60"}{2} \Rightarrow \beta = 90^0 - 25^0 39'30" \Rightarrow \beta = 89^0 59'60" - 25^0 39'30" \Rightarrow \beta = 64^0 20'30".$$

Vježba 088

Odredite kutove jednakokračnog trokuta ako visina na krak dijeli krak u omjeru 1 : 3.

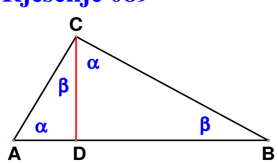
Rezultat: $\alpha = 41^0 24'35" \quad , \quad \beta = 69^0 17'42.5".$

Zadatak 089 (Marija, studentica PA)

Zadan je pravokutan trokut ABC. Točka D je nožište visine iz vrha C na hipotenuzu. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{|AC|^2}{|AD|} = \frac{|BC|^2}{|BD|}.$$

Rješenje 089



Uočimo da su pravokutni trokuti ΔADC, ΔDBC i ΔABC slični jer imaju iste kutove. To znači da su im odgovarajuće (homologne) stranice proporcionalne. Iz sličnosti trokuta ΔADC i ΔDBC dobije se:

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DC|}. \qquad (1)$$

Iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔDBC slijedi:

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|BD|}. \qquad (2)$$

Množenjem (1) i (2) dobijemo traženu jednakost:

$$\frac{|AC|}{|AD|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|DC|} \cdot \frac{|DC|}{|BD|} \Rightarrow \frac{|AC|^2}{|AD| \cdot |BC|} = \frac{|BC|}{|BD|} \; / \cdot |BC| \Rightarrow \frac{|AC|^2}{|AD|} = \frac{|BC|^2}{|BD|}. \left.\begin{array}{l}\text{Tvrdnja je}\\ \text{dokazana.}\end{array}\right\}$$

Vježba 089

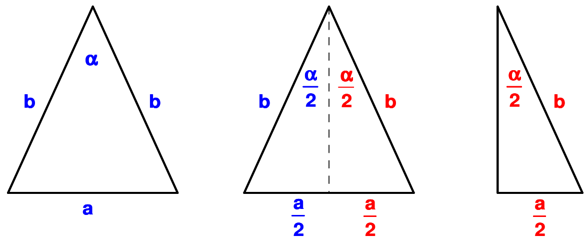
Zadan je pravokutan trokut ABC. Točka D je nožište visine iz vrha C na hipotenuzu. Dokažite da vrijedi: $|DC|^2 = |AD| \cdot |BD|.$

Rezultat: Analogan dokaz.

Zadatak 090 (Rene, Jovanka, Matija, TUPŠ)

Omjer duljina osnovice i kraka jednakokračnog trokuta je $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Koliki je kut između krakova tog trokuta?

Rješenje 090



$$\frac{a}{b}=\sqrt{2-\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{b} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2\cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{b} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2}=\sin^{-1}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=22.5^{0} \Rightarrow \alpha=45^{0}.$$

Vježba 090

Omjer duljina osnovice i kraka jednakokračnog trokuta je $\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Koliki je kut između osnovice i kraka tog trokuta?

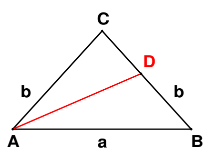
Rezultat: $\beta=67^{0}\,30^{'}$.

Zadatak 091 (Maturant, gimnazija)

U jednakokračnom trokutu s osnovicom a = 6 i krakom duljine b = 8 povučena je simetrala kuta uz osnovicu. Sjecište simetrale s krakom dijeli krak u dva dijela, duljine kojih se odnose kao:

A. 5 : 4 *B.* 7 : 5 *C.* 3 : 2 *D.* 8 : 5 *E.* 4 : 3

Rješenje 091



Simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostale dvije stranice:

$$\frac{|CD|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{|CD|}{|DB|}=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{|CD|}{|DB|}=\frac{8}{6} \Rightarrow \frac{|CD|}{|DB|}=\frac{4}{3}.$$

Odgovor je pod E.

Vježba 091

U jednakokračnom trokutu s osnovicom a = 8 i krakom duljine b = 10 povučena je simetrala kuta uz osnovicu. Sjecište simetrale s krakom dijeli krak u dva dijela, duljine kojih se odnose kao:

A. 5 : 4 *B.* 7 : 5 *C.* 3 : 2 *D.* 8 : 5 *E.* 4 : 3

Rezultat: Odgovor je pod A.

Zadatak 092 (Alex, gimnazija)

Trokutu ABC s kutom β = 60° opisana je kružnica polumjera r = 2 cm. Koliku duljinu ima stranica b?

Rješenje 092

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot r} \\ P=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot r}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta \;/\cdot\frac{4\cdot r}{a\cdot c} \Rightarrow b=2\cdot r\cdot\sin\beta \Rightarrow b=2\cdot 2\cdot\sin 60^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b=2\cdot\sqrt{3}\ cm.$$

Vježba 092

Trokutu ABC s kutom β = 30° opisana je kružnica polumjera r = 2 cm. Koliku duljinu ima stranica b?

Rezultat: 2 cm.

Zadatak 093 (Alex, gimnazija)

Ako pravac m · x – y – 2 = 0 prolazi težištem trokuta čiji su vrhovi A(0, 0), B(2, 1) i C(4, 8), nađite vrijednost parametra m.

Rješenje 093

Težište trokuta ABC ima koordinate:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right)=A(0,0) \\ B\left(x_2, y_2\right)=B(2,1) \\ C\left(x_3, y_3\right)=C(4,8) \end{array}\right\} \Rightarrow T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \Rightarrow T\left(\frac{0+2+4}{3}, \frac{0+1+8}{3}\right) \Rightarrow T(2,3).$$

Budući da točka T pripada zadanom pravcu, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T(x, y)=T(2,3) \\ m \cdot x-y-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow m \cdot 2-3-2=0 \Rightarrow 2 \cdot m=5 \Rightarrow m=\frac{5}{2}.$$

Vježba 093

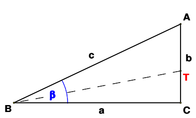
Ako pravac m · x – 2 · y – 2 = 0 prolazi težištem trokuta čiji su vrhovi A(0, 0), B(2, 1) i C(4, 8), nađite vrijednost parametra m.

Rezultat: m = 4.

Zadatak 094 (Robert, srednja škola)

U pravokutnom trokutu je kateta $b=3 \cdot \sqrt{3}$, a simetrala kuta β dijeli katetu u omjeru 1 : 2 od vrha C. Nađite duljine drugih dviju stranica.

Rješenje 094



Poučak o simetrali unutarnjeg kuta glasi: Simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu u omjeru preostale dvije stranice.

$a : c=|CT|:|TA| \Rightarrow a : c=1 : 2 \Rightarrow c=2 \cdot a.$ Po Pitagorinom poučku dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} b=3 \cdot \sqrt{3}\ ,\ c=2 \cdot a \\ c^2=a^2+b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (2 \cdot a)^2=a^2+(3 \cdot \sqrt{3})^2 \Rightarrow 4 \cdot a^2=a^2+27 \Rightarrow 3 \cdot a^2=27 \ /:3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=9 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow a=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ c=2 \cdot a \end{array}\right] \Rightarrow c=6.$$

Vježba 094

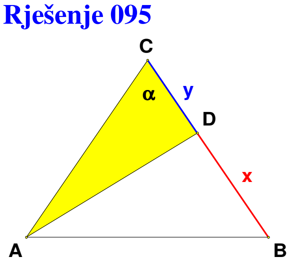
U pravokutnom trokutu je kateta $b=3 \cdot \sqrt{3}$, a simetrala kuta β dijeli katetu u omjeru 1 : 2 od vrha C. Nađite opseg trokuta.

Rezultat: $9+3 \cdot \sqrt{3}.$

Zadatak 095 (Los-Habanos, gimnazija)

Visina spuštena iz jednog vrha osnovice na krak jednakokračnog trokuta dijeli taj krak u omjeru 4 : 3, računajući od vrha na osnovici. Koliki je kosinus kuta između krakova trokuta?

Rješenje 095



Neka je:

$$|BD|=x\ ,\ |DC|=y.$$

Tada je:

$$|BD|:|DC|=4:3 \Rightarrow x : y=4:3 \Rightarrow 3 \cdot x=4 \cdot y \Rightarrow x=\frac{4}{3} \cdot y.$$

Budući da je trokut ABC jednakokračan, slijedi:

$$|AC| = |BC| \Rightarrow |AC| = |BD| + |DC| \Rightarrow |AC| = x + y \Rightarrow |AC| = \frac{4}{3} \cdot y + y \Rightarrow |AC| = \frac{7}{3} \cdot y.$$

Uočimo pravokutan trokut ADC:

$$\cos\alpha = \frac{|DC|}{|AC|} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{y}{\frac{7}{3} \cdot y} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{7}.$$

Vježba 095

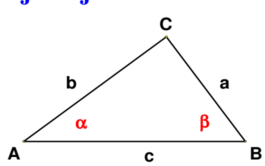
Visina spuštena iz jednog vrha osnovice na krak jednakokračnog trokuta dijeli taj krak u omjeru 2 : 3, računajući od vrha na osnovici. Koliki je kosinus kuta između krakova trokuta?

Rezultat: $\cos\alpha = \frac{3}{5}.$

Zadatak 096 (Los-Habanos, gimnazija)

U trokutu ABC je $\left|\overline{BC}\right| = 15\ cm, \left|\overline{CA}\right| = 24\ cm,$ a veličina kuta α pri vrhu A pola je veličine kuta β pri vrhu B. Izračunajte sin α.

Rješenje 096



$$a = |BC| = 15\ ,\ b = |AC| = 24\ ,\ \alpha = \frac{1}{2} \cdot \beta \Rightarrow \beta = 2 \cdot \alpha.$$

Iz sinusovog poučka dobije se traženo rješenje:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \Rightarrow a \cdot \sin 2\alpha = b \cdot \sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = b \cdot \sin\alpha \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot a \cdot \sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b \cdot \sin\alpha}{2 \cdot a \cdot \sin\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b}{2 \cdot a} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{24}{2 \cdot 15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{24}{30} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos^2\alpha + \sin^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{25} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Vježba 096

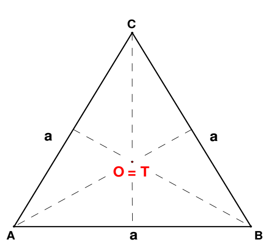
U trokutu ABC je $\left|\overline{BC}\right| = 15\ cm, \left|\overline{CA}\right| = 24\ cm,$ a veličina kuta α pri vrhu A pola je veličine kuta β pri vrhu B. Izračunajte tg α.

Rezultat: $tg\,\alpha = \frac{3}{4}.$

Zadatak 097 (Anamarija, gimnazija)

Udaljenost ortocentra od vrha jednakostraničnog trokuta je $\sqrt{3}.$ Kolika je duljina stranice trokuta?

Rješenje 097



Budući da je ortocentar (sjecište visina) u težištu (sjecište težišnica) jednakostraničnog trokuta, njegova udaljenost od vrha jednaka je $\frac{2}{3}$ duljine visine jednakostraničnog trokuta:

$$\left.\begin{array}{l} d = \sqrt{3} \\ d = \frac{2}{3} \cdot v\ ,\ v = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d = \sqrt{3} \\ d = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d=\sqrt{3} \\ d=\dfrac{a\cdot\sqrt{3}}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3} \quad / \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow a=3.$$

Vježba 097

Udaljenost ortocentra od vrha jednakostraničnog trokuta je $\sqrt{27}$. Kolika je duljina stranice trokuta?

Rezultat: a = 9.

Zadatak 098 (Los-Habalos, gimnazija)

Stranica trokuta duga je $a=4\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}$, a kutovi su mu veličina β = 30° i γ = 45°. Kolika je površina trokuta?

Rješenje 098

Ponovimo!

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0 \quad , \quad \sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Računamo kut α:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0 \Rightarrow \alpha=180^0-(\beta+\gamma) \Rightarrow \alpha=180^0-\left(30^0+45^0\right) \Rightarrow \alpha=180^0-75^0 \Rightarrow \alpha=105^0.$$

Površina trokuta iznosi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left(4\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}\right)^2\cdot\frac{\sin 30^0\cdot\sin 45^0}{\sin 105^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\left(60^0+45^0\right)} \Rightarrow P=8\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^0\cdot\cos 45^0+\cos 60^0\cdot\sin 45^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=8\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow P=8\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow P=8\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=8\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \Rightarrow P=8\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow P=8.$$

Vježba 098

Stranica trokuta duga je $a=4\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}$, a kutovi su mu veličina β = 45° i γ = 30°. Kolika je površina trokuta?

Rezultat: 8.

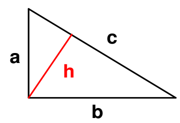
Zadatak 099 (Nina, gimnazija)

Neka je h visina pravokutnog trokuta i a, b, c, njegove stranice. Je li trokut sa stranicama h, a + b, h + c pravokutan?

Rješenje 099

Iz formula za površinu pravokutnog trokuta dobije se:

$$\left.P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b \ , \ P=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h\right\} \Rightarrow a\cdot b=c\cdot h.$$



Pomoću Pitagorina poučka dokazujemo da je trokut sa stranicama h, a + b, h + c pravokutan:

$$(h+c)^2=h^2+(a+b)^2 \Rightarrow h^2+2\cdot h\cdot c+c^2=h^2+a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot h\cdot c+c^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} c^2=a^2+b^2 \\ h\cdot c=a\cdot b \end{bmatrix} \Rightarrow 2\cdot h\cdot c+c^2=c^2+2\cdot a\cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot h\cdot c=2\cdot a\cdot b\ /:2 \Rightarrow h\cdot c=a\cdot b \Rightarrow a\cdot b=a\cdot b.$$

Trokut je pravokutan.

Vježba 099

Neka je h visina pravokutnog trokuta i a, b, c, njegove stranice. Je li trokut sa stranicama h, a – b, h – c pravokutan?

Rezultat: Trokut je pravokutan.

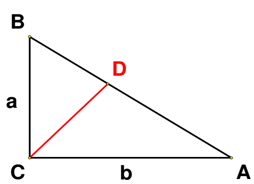
Zadatak 100 (Ante, strojarska škola)

U pravokutnom trokutu simetrala pravog kuta dijeli hipotenuzu na dijelove koji iznose $2\frac{1}{7}$ i $2\frac{6}{7}$. Odredite katete tog trokuta.

Rješenje 100

Ponovimo!

Poučak o simetrali kuta u trokutu: simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica.



Sa slike vidi se:

$$a=|CB| \quad , \quad b=|CA| \quad , \quad |AD|=2\frac{6}{7}=\frac{20}{7} \quad , \quad |DB|=2\frac{1}{7}=\frac{15}{7}$$

$$c=|AB|=|AD|+|DB|=\frac{20}{7}+\frac{15}{7}=\frac{35}{7}=5.$$

Pomoću zadanog omjera (poučak o simetrali kuta u trokutu) i Pitagorina poučka dobije se sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} |AC|:|CB|=|AD|:|DB| \\ |AB|^2=|AC|^2+|CB|^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b:a=\frac{20}{7}:\frac{15}{7} \\ c^2=b^2+a^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{15}{7}\cdot b=\frac{20}{7}\cdot a\ /\cdot\frac{7}{15} \\ 5^2=b^2+a^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b=\frac{4}{3}\cdot a \\ 25=b^2+a^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25=\left(\frac{4}{3}\cdot a\right)^2+a^2 \Rightarrow 25=\frac{16}{9}\cdot a^2+a^2 \Rightarrow 25=\frac{25}{9}\cdot a^2\ /\cdot\frac{9}{25} \Rightarrow a^2=9\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=3 \\ b=\frac{4}{3}\cdot a \end{matrix}\right\} \Rightarrow b=\frac{4}{3}\cdot 3 \Rightarrow b=4.$$

Vježba 100

U pravokutnom trokutu simetrala pravog kuta dijeli hipotenuzu na dijelove koji iznose $2\frac{1}{7}$ i $2\frac{6}{7}$. Odredite opseg tog trokuta.

Rezultat: 12.