Zadatak 161 (Roby, gimnazija)

U jednakokračnom trokutu osnovica je za 2 cm, a krak za 1 cm dulji od visine spuštene na osnovicu. Nađi površinu trokuta.

Rješenje 161

Ponovimo!

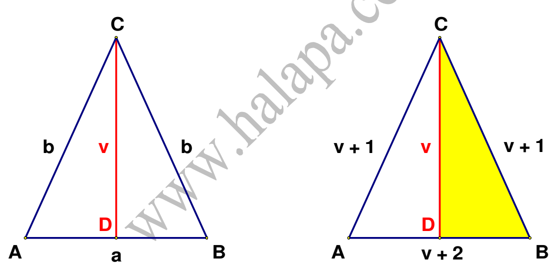
$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ili } y = 0 \text{ ili } x = y = 0.$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}.$$

Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kraci trokuta. Uočimo da su kutovi koji leže na trećoj stranici jednaki zbog činjenice da se nasuprot jednakim stranicama nalaze jednaki kutovi.
Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Budući da je osnovica a za 2 cm, a krak b za 1 cm dulji od visine v, vrijedi:

$$a = v + 2 \quad , \quad b = v + 1.$$

Konstrukcijom visine v iz vrha C na nasuprotnu stranicu AB trokut ABC podijelili smo na dva sukladna pravokutna trokuta ΔADC i ΔDBC.



Sa slike vidi se:

$$a = |AB| = v + 2 \ , \ b = |BC| = |AC| = v + 1 \ , \ |DC| = v \ , \ |DB| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \frac{v+2}{2}$$

Uočimo pravokutan trokut DBC. Uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$|BC|^2 = |DC|^2 + |DB|^2 \Rightarrow (v+1)^2 = v^2 + \left(\frac{v+2}{2}\right)^2 \Rightarrow v^2 + 2 \cdot v + 1 = v^2 + \frac{v^2 + 4 \cdot v + 4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 + 2 \cdot v + 1 = v^2 + \frac{v^2 + 4 \cdot v + 4}{4} \ / \cdot 4 \Rightarrow 4 \cdot v^2 + 8 \cdot v + 4 = 4 \cdot v^2 + v^2 + 4 \cdot v + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot v^2 + 8 \cdot v + 4 = 4 \cdot v^2 + v^2 + 4 \cdot v + 4 \Rightarrow 8 \cdot v = v^2 + 4 \cdot v \Rightarrow 8 \cdot v - v^2 - 4 \cdot v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -v^2 + 4 \cdot v = 0 \ / \cdot (-1) \Rightarrow v^2 - 4 \cdot v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{nepotpuna} \\ \text{kvadratna jednadžba} \end{bmatrix} \Rightarrow v \cdot (v - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} v = 0 \\ v - 4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = 0 \text{ nema smisla} \\ v_2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v = 4 \ cm \Rightarrow \left.\begin{matrix} v = 4 \\ a = v + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 4 + 2 \Rightarrow a = 6 \ cm.$$

Površina trokuta ABC iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 6\ cm\ \ ,\ \ v = 4\ cm \\ P = \dfrac{a \cdot v}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{6 \cdot 4}{2} \Rightarrow P = 12\ cm^2.$$

Vježba 161

U jednakokračnom trokutu osnovica je za 2 cm, a krak za 1 cm dulji od visine spuštene na osnovicu. Nađi opseg trokuta.

Rezultat: 16 cm.

Zadatak 162 (Mirjana, gimnazija)

Duljine stranica u trokutu su a = 8 cm, b = 6 cm. Za koliko je dulja visine v_b spuštena na stranicu b od visine v_a spuštene na stranicu a, ako je duljina visine $v_a = 4$ cm?

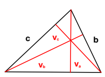
Rješenje 162

Ponovimo!

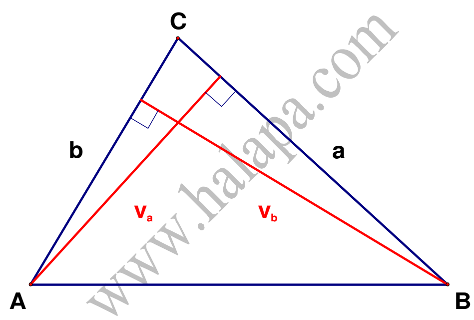
Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Površine trokuta



$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}\ \ ,\ \ P = \frac{b \cdot v_b}{2}\ \ ,\ \ P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$



Sa slike vidi se:

$$\left.\begin{array}{l} P_{ABC} = \dfrac{b \cdot v_b}{2} \\ P_{ABC} = \dfrac{a \cdot v_a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{a \cdot v_a}{2} \Rightarrow \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{a \cdot v_a}{2}\ /\cdot \frac{2}{b} \Rightarrow v_b = \frac{a \cdot v_a}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_b = \frac{8 \cdot 4}{6} \Rightarrow v_b = \frac{16}{3}\ cm.$$

Razlika visina v_b i v_a iznosi:

$$v_b - v_a = \frac{16}{3} - 4 = \frac{16 - 12}{3} = \frac{4}{3}\ cm.$$

Vježba 162

Duljine stranica u trokutu su a = 16 cm, b = 12 cm. Za koliko je dulja visina v_b spuštena na stranicu b od visine v_a spuštene na stranicu a, ako je duljina visine $v_a = 8$ cm?

Rezultat: $\frac{8}{3}\ cm.$

Zadatak 163 (Hrvoje, gimnazija)

U jednakokračnom trokutu je krak dva puta dulji od osnovice. Ako je α kut nasuprot osnovici, nađi sin α.

Rješenje 163

Ponovimo!

$$\sin 2\cdot x=2\cdot\sin x\cdot\cos x\ \Rightarrow\ \sin x=2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}.$$

Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kraci trokuta. Uočimo da su kutovi koji leže na trećoj stranici jednaki zbog činjenice da se nasuprot jednakim stranicama nalaze jednaki kutovi.

Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

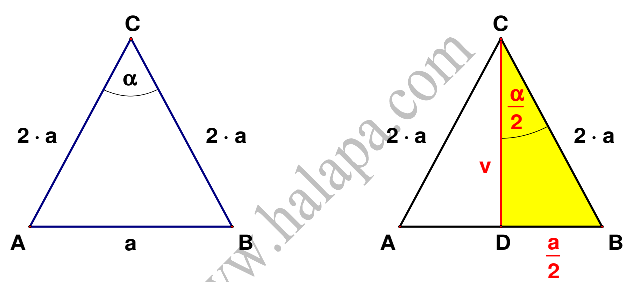
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta je omjer duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Budući da je osnovica a za 2 cm, a krak b za 1 cm dulji od visine v, vrijedi:

$$a=v+2\quad,\quad b=v+1.$$

Konstrukcijom visine v iz vrha C na nasuprotnu stranicu AB podijelili smo trokut ABC na dva sukladna pravokutna trokuta ΔADC i ΔDBC.



Sa slike vidi se:

$$\left|AB\right|=a\ ,\ \left|BC\right|=\left|AC\right|=2\cdot a\ ,\ \left|DC\right|=v\ ,\ \left|DB\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|AB\right|=\frac{a}{2}\ ,\ \angle BCD=\frac{\alpha}{2}$$

Uočimo pravokutan trokut DBC i uporabom Pitagorina poučka izračunamo duljinu visine:

$$\left|DC\right|^2=\left|BC\right|^2-\left|DB\right|^2\ \Rightarrow\ v^2=(2\cdot a)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\ \Rightarrow\ v^2=4\cdot a^2-\frac{a^2}{4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ v^2=\frac{16\cdot a^2-a^2}{4}\ \Rightarrow\ v^2=\frac{15\cdot a^2}{4}\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ v^2=\sqrt{\frac{15\cdot a^2}{4}}\ \Rightarrow\ v=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{15}.$$

Također vrijedi:

- $$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\left|DB\right|}{\left|BC\right|}\ \Rightarrow\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{2\cdot a}\ \Rightarrow\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{2\cdot a}\ \Rightarrow\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}.$$

- $$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\left|DC\right|}{\left|BC\right|}\ \Rightarrow\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{v}{2\cdot a}\ \Rightarrow\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{15}}{2\cdot a}\ \Rightarrow\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{15}}{2\cdot a}\ \Rightarrow\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Sada je:

$$\sin\alpha=2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}.$$

Vježba 163

U jednakokračnom trokutu je krak dva puta dulji od osnovice. Ako je α kut nasuprot osnovice, nađi sin α.

Rezultat: $\frac{\sqrt{35}}{18}.$

Zadatak 164 (Cazim, gimnazija)

Odredi stranicu b trokuta, ako je zadano: $a=\frac{\sqrt{151}}{2},\ c=\frac{9}{2},\ \alpha=60^{0}.$

Rješenje 164

Ponovimo!

Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

Podsjetimo se kako glasi kosinusov poučak (poučak o kosinusu).

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$.

Budući da su zadane duljine stranica a i c i kut α, možemo napisati sljedeći sinusov poučak

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Sada se lako izračuna kut γ.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow a\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\alpha\ /\cdot\frac{1}{a}\Rightarrow\sin\gamma=\frac{c\cdot\sin\alpha}{a}\Rightarrow\gamma=\sin^{-1}\left(\frac{c\cdot\sin\alpha}{a}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\gamma=\sin^{-1}\left(\frac{\frac{9}{2}\cdot\sin60^{0}}{\frac{\sqrt{151}}{2}}\right)\Rightarrow\gamma=\sin^{-1}\left(\frac{\frac{9}{2}\cdot\sin60^{0}}{\frac{\sqrt{151}}{2}}\right)\Rightarrow\gamma=\sin^{-1}\left(\frac{9\cdot\sin60^{0}}{\sqrt{151}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\gamma=39^{0}22^{'}1^{"}.$$

Tada je kut β jednak:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}\Rightarrow\beta=180^{0}-(\alpha+\gamma)\Rightarrow\beta=180^{0}-\left(60^{0}+39^{0}22^{'}1^{"}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\beta=180^{0}-99^{0}22^{'}1^{"}\Rightarrow\beta=179^{0}59^{'}60^{"}-99^{0}22^{'}1^{"}\Rightarrow\beta=80^{0}37^{'}59^{"}.$$

Duljinu stranice b možemo dobiti na dva načina.

1.inačica

Ponovno ćemo uporabiti sinusov poučak:

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow b\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\beta\ /\cdot\frac{1}{\sin\gamma}\Rightarrow b=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}\Rightarrow b=\frac{\frac{9}{2}\cdot\sin80^{0}37^{'}59^{"}}{\sin39^{0}22^{'}1^{"}}\Rightarrow b=7.$$

2.inačica

Budući da su poznate duljine dviju stranica a i c i kut među njima β, duljinu treće stranice b izračunat ćemo pomoću kosinusovog poučka.

Računamo:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \Rightarrow b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{151}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{151}}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \cos 80^0 37' 59''} \Rightarrow b = 7.$$

Vježba 164

Odredi stranicu a trokuta, ako je zadano: $b = \frac{\sqrt{151}}{2}$, $c = \frac{9}{2}$, $\beta = 60^0$.

Rezultat: a = 7.

Zadatak 165 (Vili, gimnazija)

Duljine težišnica iz vrhova dvaju šiljastih kutova pravokutnog trokuta jednake su 8 cm i 9 cm. Nađi duljinu hipotenuze tog trokuta.

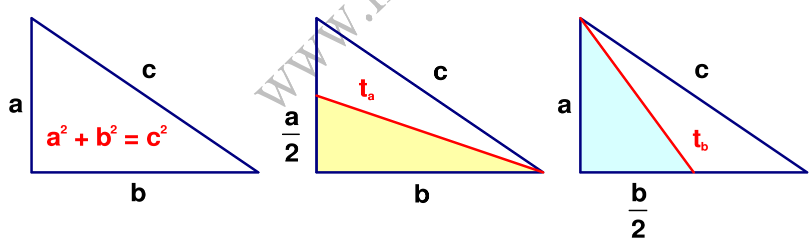
Rješenje 165

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.



Sa slika je:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad , \quad t_a = 8 \ cm \quad , \quad t_b = 9 \ cm$$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 &= t_a^2 \\ a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= t_b^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{a^2}{4} + b^2 &= 8^2 \\ a^2 + \frac{b^2}{4} &= 9^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{a^2}{4} + b^2 &= 64 \ / \cdot 4 \\ a^2 + \frac{b^2}{4} &= 81 \ / \cdot 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a^2 + 4 \cdot b^2 &= 256 \\ 4 \cdot a^2 + b^2 &= 324 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe}\end{matrix}\right] \Rightarrow 5 \cdot a^2 + 5 \cdot b^2 = 580 \ / : 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = 116 \Rightarrow \left[a^2 + b^2 = c^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 116 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow c = \sqrt{116} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje}\end{matrix}\right] \Rightarrow c = \sqrt{4 \cdot 29} \Rightarrow c = 2 \cdot \sqrt{29} \ cm.$$

Vježba 165

Duljine težišnica iz vrhova dvaju šiljastih kutova pravokutnog trokuta jednake su 4 cm i 3 cm. Nađi duljinu hipotenuze tog trokuta.

Rezultat: $2 \cdot \sqrt{5}\ cm.$

Zadatak 166 (Dario, tehnička škola)

U tupokutnom trokutu ABC zadana je stranica BC = 100 cm, stranica AB = 80 cm i kut $\gamma = 49° 27' 32''$ koji je nasuprot stranici AB. Odrediti treću stranicu i polumjer upisane kružnice.

Rješenje 166

Ponovimo!

Kosokutan trokut ABC:

a, b i c su stranice

α, β i γ su kutovi nasuprot stranica

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

s je polovica opsega trokuta, poluopseg:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

r je polumjer upisane kružnice trokutu ABC:

- $r = \sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}}$
- $r = s \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2} \cdot tg\frac{\gamma}{2}$
- $r = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2 \cdot s}$
- $r = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2 \cdot s}$
- $r = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2 \cdot s}$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).

Omjer duljine stranice trokuta i sinusa nasuprotnog kuta jednak je za sve stranice trokuta.

U trokutu ABC vrijedi

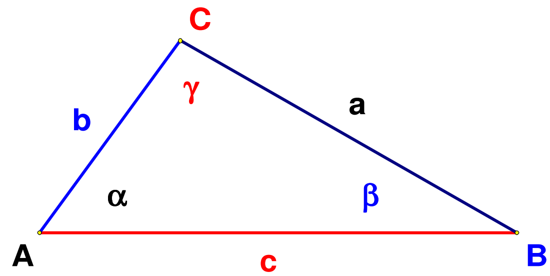
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

Podsjetimo se kako glasi kosinusov poučak (poučak o kosinusu).

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



Pomoću sinusovog poučka, najprije, izračunamo kut α:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma} \;/\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma \Rightarrow a\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\alpha \Rightarrow c\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\gamma \;/:c \Rightarrow \sin\alpha=\frac{a\cdot\sin\gamma}{c} \Rightarrow \alpha=\sin^{-1}\left(\frac{a\cdot\sin\gamma}{c}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\sin^{-1}\left(\frac{100\ cm\cdot\sin 49^0 27' 32''}{80\ cm}\right) \Rightarrow \alpha=71^0 47' 29''.$$

Budući da je zbroj kutova u trokutu 180°, slijedi:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0 \Rightarrow \beta=180^0-(\alpha+\gamma) \Rightarrow \beta=180^0-\left(71^0 47' 29''+49^0 27' 32''\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=180^0-120^0 74' 61'' \Rightarrow \left[60''=1'\right] \Rightarrow \beta=180^0-120^0 75' 1'' \Rightarrow \left[60'=1^0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=180^0-121^0 15' 1'' \Rightarrow \beta=179^0 59' 60''-121^0 15' 1'' \Rightarrow \beta=58^0 44' 59''.$$

Duljina stranice b iznosi:

1.inačica

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma} \;/\cdot\sin\beta \Rightarrow b=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{80\ cm\cdot\sin 58^0 44' 59''}{\sin 49^0 27' 32''} \Rightarrow b=90\ cm.$$

2.inačica

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \Rightarrow b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \;/\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{(100\ cm)^2+(80\ cm)^2-2\cdot 100\ cm\cdot 80\ cm\cdot\cos 58^0 44' 59''} \Rightarrow b=90\ cm.$$

Poluopseg trokuta je:

$$\left.\begin{array}{l} a=100\ cm\ ,\ b=90\ cm\ ,\ c=80\ cm \\ s=\dfrac{a+b+c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow s=\frac{100\ cm+90\ cm+80\ cm}{2} \Rightarrow s=135\ cm.$$

Polumjer upisane kružnice trokuta iznosi:

1.inačica

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}{s}} \Rightarrow r=\sqrt{\frac{(135\ cm-100\ cm)\cdot(135\ cm-90\ cm)\cdot(135\ cm-80\ cm)}{135\ cm}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{\frac{35\ cm\cdot 45\ cm\cdot 55\ cm}{135\ cm}} \Rightarrow r=25.33\ cm.$$

2.inačica

$$r=s\cdot tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2} \Rightarrow r=135\ cm\cdot tg\frac{71^0 47' 29''}{2}\cdot tg\frac{58^0 44' 59''}{2}\cdot tg\frac{49^0 27' 32''}{2} \Rightarrow r=25.33\ cm.$$

3.inačica

$$r=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2\cdot s} \Rightarrow r=\frac{100\ cm\cdot 90\ cm\cdot\sin 49^0 27' 32''}{2\cdot 135\ cm} \Rightarrow r=25.33\ cm.$$

Vježba 166

U tupokutnom trokutu ABC zadana je stranica BC = 50 cm, stranica AB = 40 cm i kut γ = 49° 27' 32" koji je nasuprot stranici AB. Odrediti treću stranicu.

Rezultat: 45 cm.

Zadatak 167 (YOYO, srednja škola)

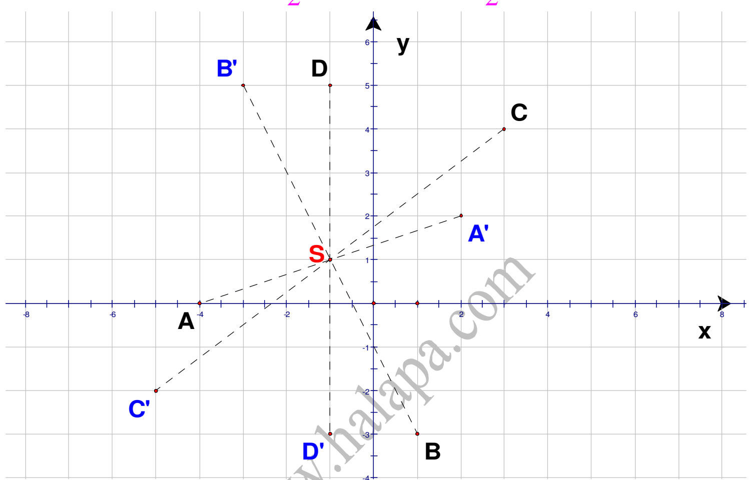
Odredi koordinate točaka koje su simetrične točkama A(– 4, 0) , B(1, – 3) , C(3, 4) i D(– 1, 5) s obzirom na točku S(– 1, 1).

Rješenje 167

Ponovimo!

Ako točka P(x, y) raspolavlja dužinu $\overline{AB}, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$ tada je:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Neka je točka A' simetrična točki A s obzirom na točku S. Dakle, točka S je polovište dužine $\overline{AA'}$ pa slijedi:

$$\left.\begin{aligned} A(x_1, y_1) &= A(-4, 0) \\ S(x, y) &= S(-1, 1) \\ A'(x_2, y_2) &= A'(?, ?) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} &= x \\ \frac{y_1 + y_2}{2} &= y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{-4 + x_2}{2} &= -1 \\ \frac{0 + y_2}{2} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{-4 + x_2}{2} &= -1 \;/\cdot 2 \\ \frac{0 + y_2}{2} &= 1 \;/\cdot 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -4 + x_2 &= -2 \\ y_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= -2 + 4 \\ y_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= 2 \\ y_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A'(2, 2).$$

Neka je točka B' simetrična točki B s obzirom na točku S. Dakle, točka S je polovište dužine $\overline{BB'}$ pa slijedi:

$$\left.\begin{aligned} B(x_1, y_1) &= B(1, -3) \\ S(x, y) &= S(-1, 1) \\ B'(x_2, y_2) &= B'(?, ?) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} &= x \\ \frac{y_1 + y_2}{2} &= y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1 + x_2}{2} &= -1 \\ \frac{-3 + y_2}{2} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{1 + x_2}{2} &= -1 \;/\cdot 2 \\ \frac{-3 + y_2}{2} &= 1 \;/\cdot 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 + x_2 &= -2 \\ -3 + y_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= -2 - 1 \\ y_2 &= 2 + 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= -3 \\ y_2 &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B'(-3, 5).$$

Neka je točka C' simetrična točki C s obzirom na točku S. Dakle, točka S je polovište dužine $\overline{CC'}$ pa slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} C(x_1, y_1) = C(3, 4) \\ S(x, y) = S(-1, 1) \\ C'(x_2, y_2) = C'(?, ?) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1 + x_2}{2} = x \\ \dfrac{y_1 + y_2}{2} = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{3 + x_2}{2} = -1 \\ \dfrac{4 + y_2}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{3 + x_2}{2} = -1 \ /\cdot 2 \\ \dfrac{4 + y_2}{2} = 1 \ /\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 + x_2 = -2 \\ 4 + y_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = -2 - 3 \\ y_2 = 2 - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = -5 \\ y_2 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow C'(-5, -2).$$

Neka je točka D' simetrična točki D s obzirom na točku S. Dakle, točka S je polovište dužine $\overline{DD'}$ pa slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} D(x_1, y_1) = D(-1, 5) \\ S(x, y) = S(-1, 1) \\ D'(x_2, y_2) = D'(?, ?) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1 + x_2}{2} = x \\ \dfrac{y_1 + y_2}{2} = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-1 + x_2}{2} = -1 \\ \dfrac{5 + y_2}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{-1 + x_2}{2} = -1 \ /\cdot 2 \\ \dfrac{5 + y_2}{2} = 1 \ /\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 + x_2 = -2 \\ 5 + y_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = -2 + 1 \\ y_2 = 2 - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = -1 \\ y_2 = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow D'(-1, -3).$$

Vježba 167

Odredi koordinate točke koja je simetrična točki A(2, 2) s obzirom na točku S(– 1, 1).

Rezultat: A' (– 4, 0).

Zadatak 168 (YOYO, srednja škola)

Kolike su duljine srednjica trokuta ABC ako su vrhovi trokuta točke: A(– 3, 1) , B(3, – 5) , C(5, 7)?

Rješenje 168

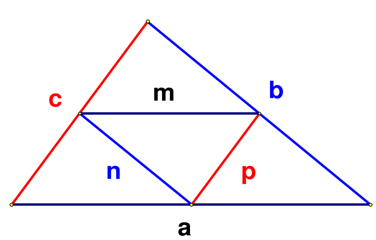
Ponovimo!

Ako točka P(x, y) raspolavlja dužinu $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, tada je:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Srednjice trokuta

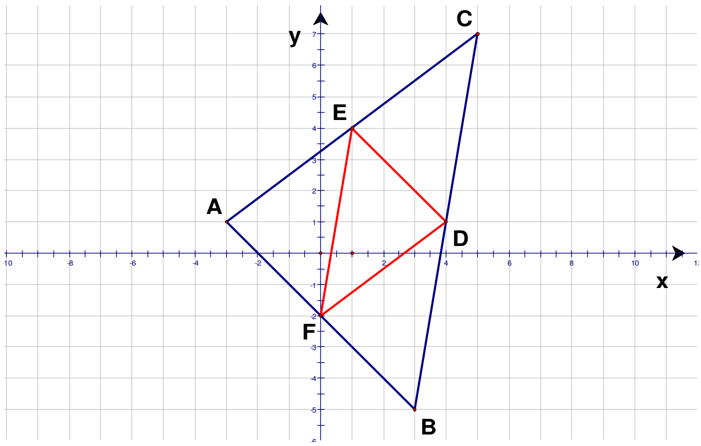
Dužine koje spajaju polovišta stranica trokuta zovu se srednjice trokuta. Svaki trokut ima tri srednjice. Svaka srednjica trokuta usporedna je sa suprotnom stranicom trokuta, a duljina joj je jednaka polovici duljine te stranice.



$$a \,||\, m \ , \ a = 2 \cdot m \quad , \quad b \,||\, n \ , \ b = 2 \cdot n \quad , \quad c \,||\, p \ , \ c = 2 \cdot p.$$

Udaljenost točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



1.inačica

Točka F je polovište dužine $\overline{AB}$ pa njezine koordinate glase:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(-3,\ 1) \\ F(x,\ y) \\ B(x_2,\ y_2)=B(3,\ -5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+3}{2} \\ y=\dfrac{1+(-5)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{0}{2} \\ y=\dfrac{1-5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{0}{2} \\ y=-\dfrac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow F(0,\ -2).$$

Točka D je polovište dužine $\overline{BC}$ pa njezine koordinate glase:

$$\left.\begin{array}{l} B(x_1,\ y_1)=B(3,\ -5) \\ D(x,\ y) \\ C(x_2,\ y_2)=C(5,\ 7) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{3+5}{2} \\ y=\dfrac{-5+7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{8}{2} \\ y=\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow D(4,\ 1).$$

Točka E je polovište dužine $\overline{CA}$ pa njezine koordinate glase:

$$\left.\begin{array}{l} C(x_1,\ y_1)=C(5,\ 7) \\ E(x,\ y) \\ A(x_2,\ y_2)=A(-3,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{5+(-3)}{2} \\ y=\dfrac{7+1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{5-3}{2} \\ y=\dfrac{8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{2} \\ y=\dfrac{8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow E(1,\ 4).$$

Duljine srednjica trokuta iznose:

$$\bullet\quad \left.\begin{array}{l} F(x_1,\ y_1)=F(0,\ -2) \\ D(x_2,\ y_2)=D(4,\ 1) \\ |FD|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |FD|=\sqrt{(4-0)^2+(1-(-2))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |FD|=\sqrt{(4-0)^2+(1+2)^2} \Rightarrow |FD|=\sqrt{4^2+3^2} \Rightarrow |FD|=\sqrt{16+9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |FD|=\sqrt{25} \Rightarrow |FD|=5.$$

$$\bullet\quad \left.\begin{array}{l} D(x_1,\ y_1)=D(4,\ 1) \\ E(x_2,\ y_2)=E(1,\ 4) \\ |DE|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |DE|=\sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |DE|=\sqrt{(-3)^2+3^2} \Rightarrow |DE|=\sqrt{9+9} \Rightarrow |DE|=\sqrt{18} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |DE|=\sqrt{9\cdot 2} \Rightarrow |DE|=3\cdot\sqrt{2}.$$

$$\bullet\quad \left.\begin{array}{l} E(x_1,\ y_1)=E(1,\ 4) \\ F(x_2,\ y_2)=F(0,\ -2) \\ |EF|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |EF|=\sqrt{(0-1)^2+(-2-4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |EF|=\sqrt{(-1)^2+(-6)^2} \Rightarrow |EF|=\sqrt{1+36} \Rightarrow |EF|=\sqrt{37}.$$

2.inačica

Budući da je duljina srednjice trokuta jednaka polovici duljine nasuprotne stranice trokuta, slijedi (gledaj sliku):

$$\bullet\quad \left.\begin{array}{l} C(x_1,\ y_1)=C(5,\ 7) \\ A(x_2,\ y_2)=A(-3,\ 1) \\ |FD|=\frac{1}{2}\cdot|CA| \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C(x_1,\ y_1)=C(5,\ 7) \\ A(x_2,\ y_2)=A(-3,\ 1) \\ |FD|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |FD|=\sqrt{(-3-5)^2+(1-7)^2} \Rightarrow |FD|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-8)^2+(-6)^2} \Rightarrow |FD|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{64+36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |FD|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{100} \Rightarrow |FD|=\frac{1}{2}\cdot 10 \Rightarrow |FD|=5.$$

- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-3, 1) \\ B(x_2, y_2) = B(3, -5) \\ |DE| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-3, 1) \\ B(x_2, y_2) = B(3, -5) \\ |DE| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |DE| = \sqrt{(3-(-3))^2 + (-5-1)^2} \Rightarrow |DE| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(3+3)^2 + (-6)^2} \Rightarrow |DE| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + (-6)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |DE| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36+36} \Rightarrow |DE| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{72} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow |DE| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36 \cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |DE| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow |DE| = 3 \cdot \sqrt{2}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(3, -5) \\ C(x_2, y_2) = C(5, 7) \\ |EF| = \frac{1}{2} \cdot |BC| \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(3, -5) \\ C(x_2, y_2) = C(5, 7) \\ |EF| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |EF| = \sqrt{(5-3)^2 + (7-(-5))^2} \Rightarrow |EF| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + (7+5)^2} \Rightarrow |EF| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 12^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |EF| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4+144} \Rightarrow |EF| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{148} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow |EF| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot 37} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |EF| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{37} \Rightarrow |EF| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{37} \Rightarrow |EF| = \sqrt{37}.$$

Vježba 168

Koliki je zbroj duljina srednjica trokuta ABC ako su vrhovi trokuta točke: A(– 3, 1) , B(3, – 5) , C(5, 7)?

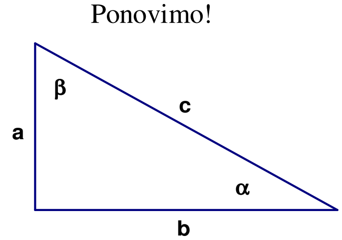
Rezultat: $5 + 3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{37}.$

Zadatak 169 (Petra, srednja škola)

Odredi preostale elemente pravokutnog trokuta ako je: α = 57° 30', P = 44.8 cm².

Rješenje 169

Ponovimo!



Pravokutan trokut

$$\alpha + \beta = 90^0 \quad , \quad P = \frac{1}{4} \cdot c^2 \cdot \sin 2\alpha.$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad , \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

$$O = a + b + c.$$

$\alpha = 57^0 \, 30'$

$P = 44.8 \ cm^2$

$\beta, a, b, c, O = ?$

Najprije izračunamo kut β:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=57^0 30' \\ \alpha+\beta=90^0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=57^0 30' \\ \beta=90^0-\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \beta=90^0-57^0 30' \Rightarrow \beta=89^0 60'-57^0 30' \Rightarrow \beta=32^0 30'.$$

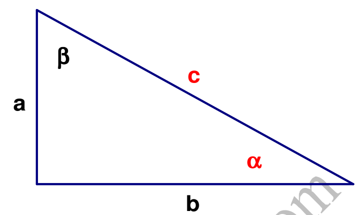
Iz formule za površinu pravokutnog trokuta dobije se duljina hipotenuze c:

$$P=\frac{1}{4}\cdot c^2\cdot\sin 2\alpha \Rightarrow P=\frac{1}{4}\cdot c^2\cdot\sin 2\alpha \;/\cdot\frac{4}{\sin 2\alpha} \Rightarrow c^2=\frac{4\cdot P}{\sin 2\alpha} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow c=\sqrt{\frac{4\cdot P}{\sin 2\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=57^0 30' \\ 2\cdot\alpha=2\cdot 57^0 30'\end{array}\right] \Rightarrow \left[2\cdot\alpha=114^0 60'\right] \Rightarrow \left[2\cdot\alpha=115^0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\sqrt{\frac{4\cdot 44.8\ cm^2}{\sin 115^0}} \Rightarrow c=14.06\ cm.$$

Računamo duljine kateta a i b pomoću funkcija sinus i kosinus:



$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{a}{c} \\ \cos\alpha=\frac{b}{c}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{a}{c}\;/\cdot c \\ \cos\alpha=\frac{b}{c}\;/\cdot c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=c\cdot\sin\alpha \\ b=c\cdot\cos\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=14.06\ cm\cdot\sin 57^0 30' \\ b=14.06\ cm\cdot\cos 57^0 30'\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=11.86\ cm \\ b=7.55\ cm\end{array}\right\}.$$

Opseg pravokutnog trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}a=11.86\ cm \\ b=7.55\ cm \\ c=14.06\ cm \\ O=a+b+c\end{array}\right\} \Rightarrow O=11.86\ cm+7.55\ cm+14.06\ cm \Rightarrow O=33.47\ cm.$$

Vježba 169

Odredi duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta ako je: α = 45°, P = 8 cm^2.

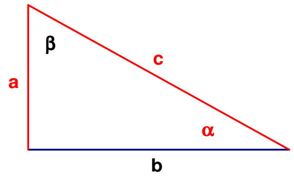
Rezultat: $4\cdot\sqrt{2}\ cm.$

Zadatak 170 (Petra, srednja škola)

Odredi duljinu visine na hipotenuzu pravokutnog trokuta ako je poznato: b = 223.5 cm, β = 38° 30'.

Rješenje 170

Ponovimo!



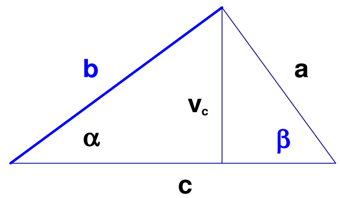
Pravokutan trokut
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.

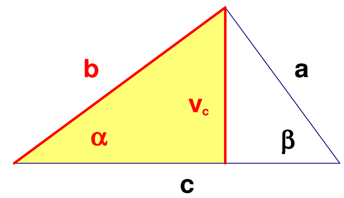
$$\sin\alpha=\frac{a}{c}\quad,\quad \alpha+\beta=90^0.$$

$\beta = 38^0 30'$

$b = 223.5\ cm$

$v_c = ?$





Nađemo kut α:

$$\left.\begin{array}{l} \beta = 38^0 30' \\ \alpha + \beta = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \beta = 38^0 30' \\ \alpha = 90^0 - \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 90^0 - 38^0 30' \Rightarrow \alpha = 89^0 60' - 38^0 30' \Rightarrow \alpha = 51^0 30'.$$

Sa slika vidi se:

$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{v_c}{b} \ / \cdot b \Rightarrow v_c = b \cdot \sin\alpha \Rightarrow v_c = 223.5\ cm \cdot \sin 51^0 30' \Rightarrow v_c = 174.91\ cm.$$

Vježba 170

Odredi duljinu visine na hipotenuzu pravokutnog trokuta ako je poznato: b = 40 cm, β = 60°.

Rezultat: 20 cm.

Zadatak 171 (Rency, strojarska tehnička škola)

Zadane su točke A(2, – 1), B(4, 3), C(– 2, 0).

a) Nacrtaj trokut.

b) Provjeri je li trokut pravokutan.

c) Nacrtaj trokut BCP gdje je P polovište stranice $\overline{AB}$.

Rješenje 171

Ponovimo!

Pitagorin poučak

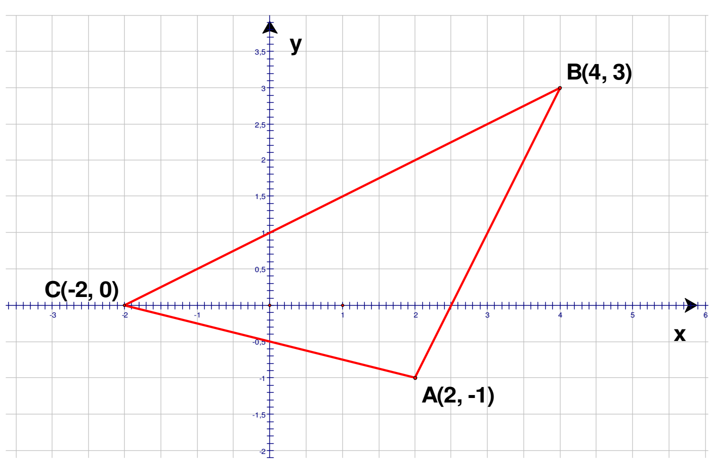
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Ako točka P(x, y) raspolavlja dužinu $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, tada je:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$



Duljine stranica trokuta ABC iznose:

- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, -1) \\ B(x_2, y_2) = B(4, 3) \\ |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (3-(-1))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (3+1)^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{2^2 + 4^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{4+16} \Rightarrow |AB| = \sqrt{20}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(4, 3) \\ C(x_2, y_2) = C(-2, 0) \\ |BC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |BC| = \sqrt{(-2-4)^2 + (0-3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BC| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} \Rightarrow |BC| = \sqrt{36+9} \Rightarrow |BC| = \sqrt{45}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, -1) \\ C(x_2, y_2) = C(-2, 0) \\ |AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-(-1))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{(-2-2)^2 + (0+1)^2} \Rightarrow |AC| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} \Rightarrow |AC| = \sqrt{16+1} \Rightarrow |AC| = \sqrt{17}.$$

Provjerimo je li trokut ABC pravokutan, tj. vrijedi li za njega Pitagorin poučak.

$$\left.\begin{array}{l} |AB| = \sqrt{20}\ ,\ |AC| = \sqrt{17}\ \text{katete} \\ |BC| = \sqrt{45}\ \text{hipotenuza} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{Pitagorin} \\ \text{poučak} \end{bmatrix} \Rightarrow |BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{45}\right)^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 + \left(\sqrt{17}\right)^2 \Rightarrow 45 = 20 + 17 \Rightarrow 45 = 37\ \text{netočno} \Rightarrow 45 \neq 37.$$

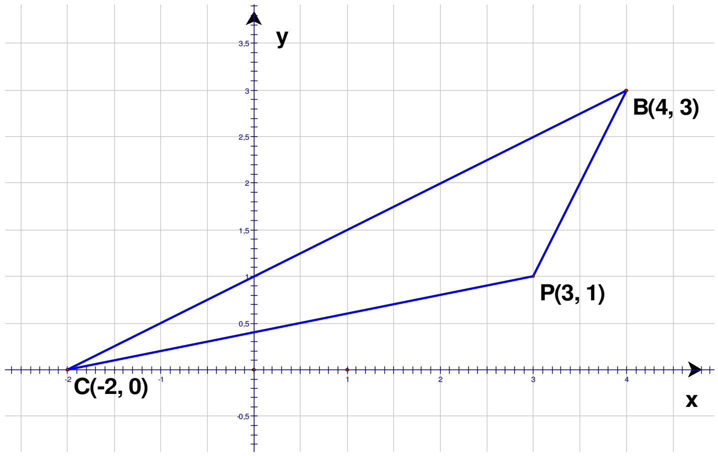
Trokut ABC nije pravokutan.

Sada tražimo koordinate točke P, polovišta stranice $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, -1) \\ P(x, y) = P(?, ?) \\ B(x_2, y_2) = B(4, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2}\right) \Rightarrow P(3, 1).$$

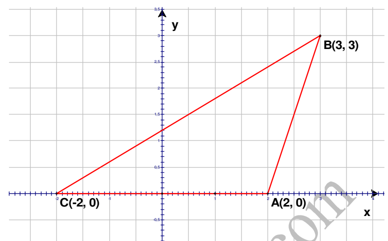
Crtamo trokut BCP.



Vježba 171

Zadane su točke A(2, 0), B(3, 3), C(– 2, 0). Nacrtaj trokut.

Rezultat:



Zadatak 172 (Rency, strojarska tehnička škola)

Na osi apcisa odredi točku koja je od točke A(3, 6) udaljena 10.

Rješenje 172

Ponovimo!

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Točka koja leži na apscisi ima ordinatu jednaku nula pa njezine koordinate glase:

$$B(x, 0).$$

Budući da udaljenost između točaka A i B mora biti 10, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(3, 6) \\ B(x_2, y_2) = B(x, 0) \\ |AB| = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(3, 6) \\ B(x_2, y_2) = B(x, 0) \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (0-6)^2} = 10 \Rightarrow$$

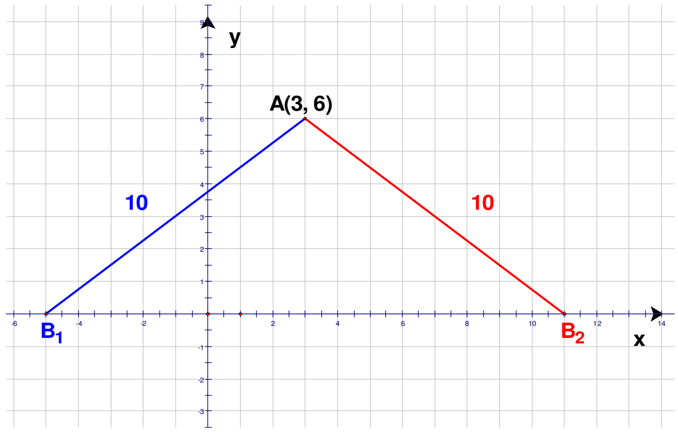
$$\Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (-6)^2} = 10 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 36} = 10 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednakost} \end{array}\right] \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 36} = 10 \; /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-3)^2 + 36}\right)^2 = 10^2 \Rightarrow (x-3)^2 + 36 = 100 \Rightarrow (x-3)^2 = 100 - 36 \Rightarrow (x-3)^2 = 64 \; /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{64} \Rightarrow x-3=\pm 8 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3=-8 \\ x-3=8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-8+3 \\ x=8+3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-5 \\ x_2=11 \end{matrix}\right\}.$$

Postoje dva rješenja. To su točke:

$$B_1(-5, 0) \ , \ B_2(11, 0).$$



Vježba 172

Na osi ordinata odredi točku koja je od točke A(6, 6) udaljena 10.

Rezultat: $B_1(0, 14) \ , \ B_2(0, -2).$

Zadatak 173 (Klara, gimnazija)

Točke E i F polovišta su stranica $\overline{BC}$ i $\overline{DC}$ kvadrata ABCD. Dužine $\overline{AE}$ i $\overline{BF}$ sijeku se u točki G. Dokaži da su trokuti ABE i BCF sukladni, a trokut BEG s njima sličan.

Rješenje 173

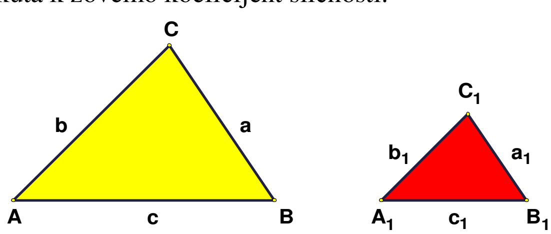
Ponovimo!

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1 \ , \ \beta=\beta_1 \ , \ \gamma=\gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.

Treći poučak sličnosti (S – S – S)

Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.

Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)

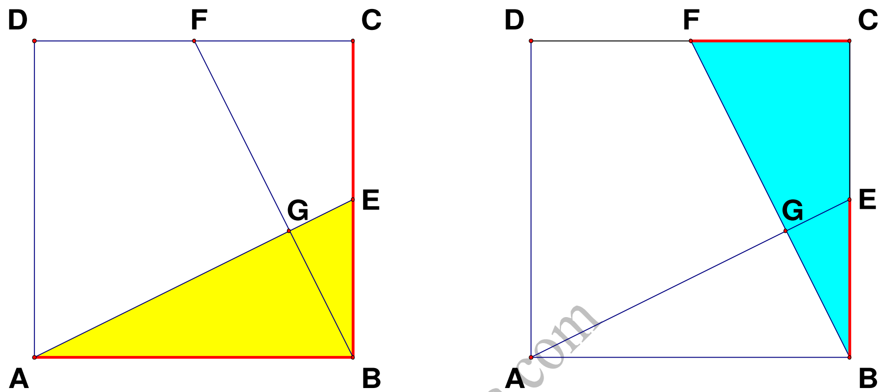
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.

Sukladnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta sukladna ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice jednakih duljina.

$$\alpha=\alpha_1 \ , \ \beta=\beta_1 \ , \ \gamma=\gamma_1 \quad , \quad a=a_1 \ , \ b=b_1 \ , \ c=c_1.$$

Prvi poučak sukladnosti (S – S – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice.
Drugi poučak sukladnosti (S – K – S)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih.
Treći poučak sukladnosti (K – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i oba kuta na toj stranici.
Četvrti poučak sukladnosti (S – S – K)
Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj stranici.

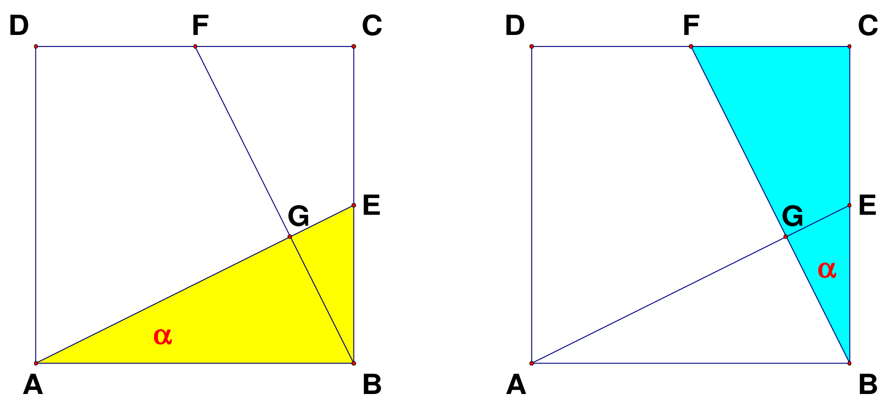


Sa slika vidi se:

$$|AB|=|BC| \quad , \quad |BE|=|CF| \quad , \quad \angle ABE=90^0=\angle BCF.$$

Dakle, trokuti ABE i BCF podudaraju se u dvije stranice i kutu između njih pa su prema drugom poučku o sukladnosti (S – K – S) sukladni i pišemo

$$\Delta ABE \cong \Delta BCF.$$

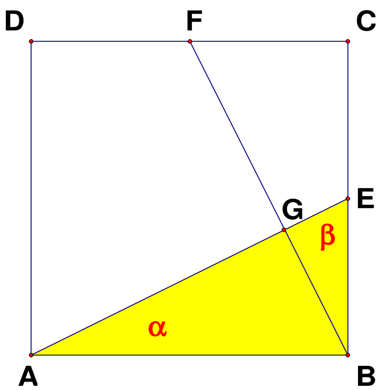


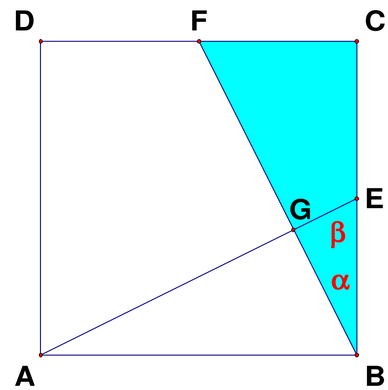
Budući da su trokuti ABE i BCF sukladni vrijedi:

$$\angle EAB=\alpha=\angle FBC.$$

Tada i za trokute ABE i BEG vrijedi:

$$\angle EAB=\alpha=\angle GBE.$$





Uočimo da je trokutima ABE i BEG kut β zajednički, tj. vrijedi:

$$\angle BEA = \beta = \angle BEG.$$

Dakle, trokuti ABE i BEG podudaraju se u dva kuta te su prema prvom poučku o sličnosti (K – K) slični i pišemo

$$\Delta ABE \sim \Delta BEG.$$

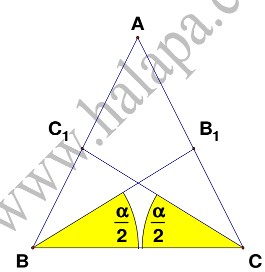
Budući da su trokuti ABE i BEG slični, a trokuti ABE i BCF sukladni, slijedi da su i trokuti BCF i BEG slični.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABE \sim \Delta BEG \\ \Delta ABE \cong \Delta BCF \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BCF \sim \Delta BEG.$$

Vježba 173

Dokaži da su u jednakokračnom trokutu simetrale kutova pri osnovici jednakih duljina.

Rezultat:



$$\Delta BCB_1 \cong \Delta BCC_1 \quad , \quad (K-S-K) \quad , \quad |BB_1| = |CC_1|.$$

Zadatak 174 (Megy, gimnazija)

Stranice pravokutnog trokuta čine geometrijski niz. Nađi tangens najmanjeg kuta u trokutu.

Rješenje 174

Ponovimo!

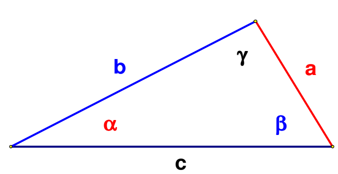
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član počevši od drugog jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \ , \ n \geq 1.$$

Opći član geometrijskog niza s prvim članom a_1 i kvocijentom $q \neq 0$ ima oblik

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ , \ n \geq 1.$$



$a < b \Rightarrow \alpha < \beta$

$a < c \Rightarrow \alpha < \gamma$

$b < c \Rightarrow \beta < \gamma$

Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut.
Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz kut.

Stranice pravokutnog trokuta koje čine geometrijski niz možemo zapisati na sljedeći način:

$$a \ , \ a \cdot q \ , \ a \cdot q^2 .$$

Uporabom Pitagorina poučka dobije se q.

$$\left(a \cdot q^2\right)^2 = a^2 + (a \cdot q)^2 \Rightarrow a^2 \cdot \left(q^2\right)^2 = a^2 + a^2 \cdot q^2 \Rightarrow a^2 \cdot q^4 = a^2 + a^2 \cdot q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot q^4 - a^2 \cdot q^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 \cdot q^4 - a^2 \cdot q^2 - a^2 = 0 \ / : a^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$$

Bikvadratnu jednadžbu riješimo metodom supstitucije.

$$q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{supstitucija} \\ t = q^2 \end{bmatrix} \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} t^2 - t - 1 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

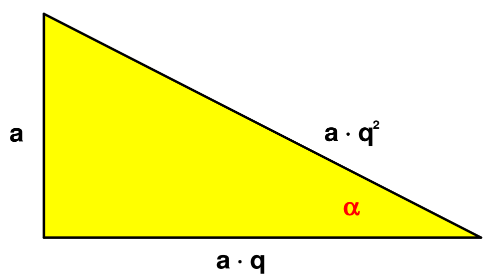
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = -1 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \ \text{nema smisla} \end{matrix}\right\} \Rightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vraćamo se supstituciji.

$$\left.\begin{matrix} t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t = q^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow q_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} q_1 = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ q_2 = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \ \text{nema smisla} \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$



Sa slike vidi se:

$$tg\,\alpha = \frac{a}{a \cdot q} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{a}{a \cdot q} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{q} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; tg\,\alpha = \frac{1}{q} \;\Rightarrow\; tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; tg\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \;\Rightarrow\; tg\,\alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \;\Rightarrow\; tg\,\alpha = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}.$$

Vježba 174

Stranice pravokutnog trokuta čine geometrijski niz. Nađi kotangens najmanjeg kuta u trokutu.

Rezultat: $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$

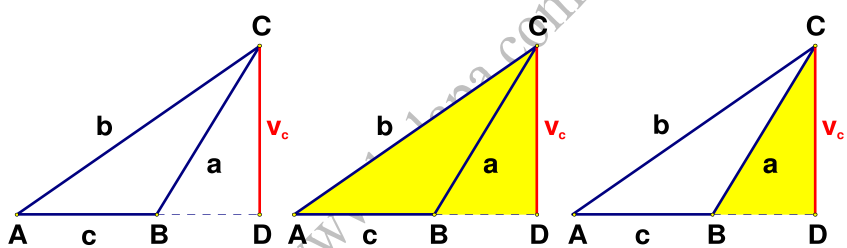
Zadatak 175 (Ana, ekonomska škola)

Duljine stranica trokuta iznose a = 25 cm i b = 30 cm, a visina spuštena na stranicu c ima duljinu v_c = 24 cm. Ako je kut nasuprot stranice b tup, nađi duljinu stranice c.

Rješenje 175

Ponovimo!

Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slika vidi se:

$$a = |BC| = 25\ cm \quad , \quad b = |CA| = 30\ cm \quad , \quad v_c = |DC| = 24\ cm \quad , \quad c = |AB| = |AD| - |BD|.$$

Uočimo pravokutan trokut ADC i pomoću Pitagorina poučka dobije se |AD|.

$$|AD|^2 = |CA|^2 - |DC|^2 \;\Rightarrow\; |AD|^2 = b^2 - v_c^2 \;\Rightarrow\; |AD|^2 = b^2 - v_c^2 \;/\sqrt{\ } \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; |AD| = \sqrt{b^2 - v_c^2} \;\Rightarrow\; |AD| = \sqrt{(30\ cm)^2 - (24\ cm)^2} \;\Rightarrow\; |AD| = 18\ cm.$$

Uočimo pravokutan trokut BDC i pomoću Pitagorina poučka dobije se |BD|.

$$|BD|^2 = |BC|^2 - |DC|^2 \;\Rightarrow\; |BD|^2 = a^2 - v_c^2 \;\Rightarrow\; |BD|^2 = a^2 - v_c^2 \;/\sqrt{\ } \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; |BD| = \sqrt{a^2 - v_c^2} \;\Rightarrow\; |BD| = \sqrt{(25\ cm)^2 - (24\ cm)^2} \;\Rightarrow\; |BD| = 7\ cm.$$

Duljina stranice c iznosi:

$$c = |AB| \;\Rightarrow\; c = |AD| - |BD| \;\Rightarrow\; c = 18\ cm - 7\ cm \;\Rightarrow\; c = 11\ cm.$$

Vježba 175

Duljine stranica trokuta iznose a = 100 cm i b = 120 cm, a visina spuštena na stranicu c ima duljinu v_c = 96 cm. Ako je kut nasuprot stranice b tup, nađi duljinu stranice c.

Rezultat: 44 cm.

Zadatak 176 (Cazim, gimnazija)

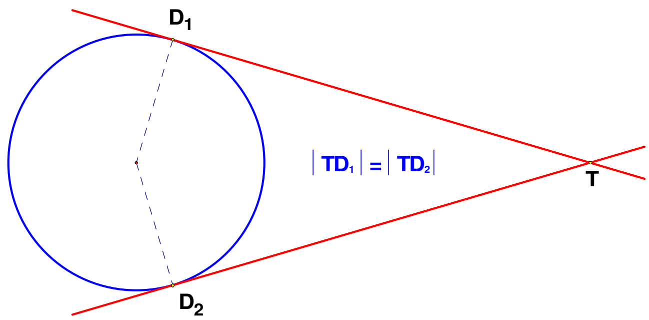
Izračunaj ploštinu i duljine kateta pravokutnog trokuta u kojem dodirna točka upisane kružnice na hipotenuzu dijeli hipotenuzu na odsječke od 3 cm i 10 cm.

Rješenje 176

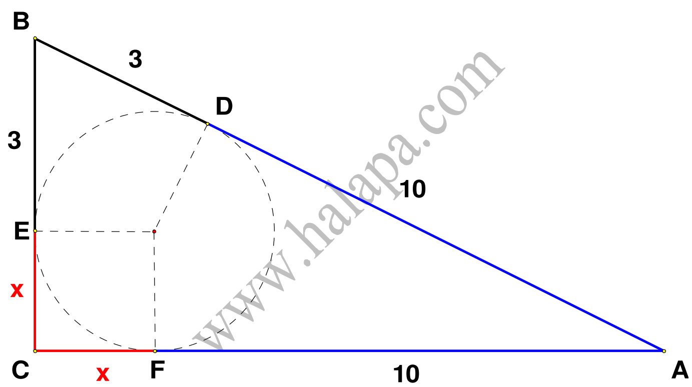
Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Iz točke izvan kružnice mogu se konstruirati dvije tangente na kružnicu za koje vrijedi:



Pitagorin poučak: Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se:

$$|AD| = |AF| = 10 \quad , \quad |BD| = |BE| = 3 \quad , \quad |CE| = |CF| = x$$

$$|AB| = |AD| + |BD| = 10 + 3 = 13 \quad , \quad |BC| = |BE| + |CE| = 3 + x \quad , \quad |CA| = |CF| + |AF| = x + 10.$$

Budući da je trokut ABC pravokutan, vrijedi Pitagorin poučak.

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 \Rightarrow 13^2 = (3+x)^2 + (x+10)^2 \Rightarrow 169 = 9 + 6 \cdot x + x^2 + x^2 + 20 \cdot x + 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 169 = 2 \cdot x^2 + 26 \cdot x + 109 \Rightarrow 2 \cdot x^2 + 26 \cdot x + 109 = 169 \Rightarrow 2 \cdot x^2 + 26 \cdot x + 109 - 169 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x^2 + 26 \cdot x - 60 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x^2 + 26 \cdot x - 60 = 0 \; /:2 \Rightarrow x^2 + 13 \cdot x - 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + 13 \cdot x - 30 = 0 \\ a = 1 \; , \; b = 13 \; , \; c = -30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \; , \; b = 13 \; , \; c = -30 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 120}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-13 \pm 17}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-13 + 17}{2} \\ x_2 = \dfrac{-13 - 17}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{4}{2} \\ x_2 = -\frac{30}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -15 \quad \text{nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \ cm.$$

Tada je:

$$\left|BC\right| = 3 \ cm + 2 \ cm = 5 \ cm \quad , \quad \left|CA\right| = 2 \ cm + 10 \ cm = 12 \ cm$$

pa ploština pravokutnog trokuta ABC iznosi:

$$P = \frac{\left|BC\right| \cdot \left|CA\right|}{2} \Rightarrow P = \frac{5 \ cm \cdot 12 \ cm}{2} \Rightarrow P = 30 \ cm^2.$$

Vježba 176

Izračunaj ploštinu pravokutnog trokuta u kojem dodirna točka upisane kružnice na hipotenuzu dijeli hipotenuzu na odsječke od 30 mm i 1 dm.

Rezultat: 30 cm^2.

Zadatak 177 (Cazim, gimnazija)

Zbroj duljina dviju stranica trokuta je 15 cm, a duljine visina koje njima odgovaraju su 4 cm i 6 cm. Izračunaj ploštinu trokuta.

Rješenje 177

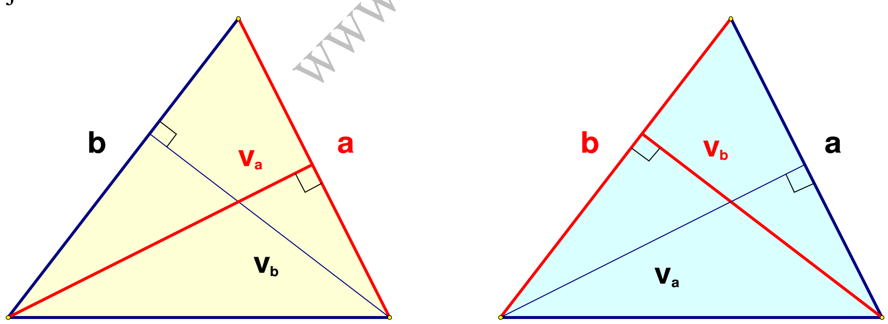
Ponovimo!

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad \text{ili} \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad \text{ili} \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.



Budući da je zadano a + b = 15 cm, v_a = 4 cm, v_b = 6 cm, iz formula za površinu trokuta dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{a \cdot v_a}{2} \\ P = \frac{b \cdot v_b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} \Rightarrow \frac{4 \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot b}{2} \Rightarrow 2 \cdot a = 3 \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a = 3 \cdot b \ /:2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \cdot b.$$

Računamo duljine stranica a i b.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 15 \\ a = \frac{3}{2} \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot b + b = 15 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot b + b = 15 \ / \cdot 2 \Rightarrow 3 \cdot b + 2 \cdot b = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5\cdot b=30\ \Rightarrow\ 5\cdot b=30\ /:5\ \Rightarrow\ b=6\ cm\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} b=6\ cm \\ a=\frac{3}{2}\cdot b \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ a=\frac{3}{2}\cdot 6\ cm\ \Rightarrow\ a=9\ cm.$$

Ploština trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a=9\ cm\ ,\ v_a=4\ cm \\ P=\frac{a\cdot v_a}{2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ P=\frac{9\ cm\cdot 4\ cm}{2}\ \Rightarrow\ P=18\ cm^2.$$

Ili

$$\left.\begin{array}{l} b=6\ cm\ ,\ v_b=6\ cm \\ P=\frac{b\cdot v_b}{2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ P=\frac{6\ cm\cdot 6\ cm}{2}\ \Rightarrow\ P=18\ cm^2.$$

Vježba 177

Zbroj duljina dviju stranica trokuta je 0.15 m, a duljine visina koje njima odgovaraju su 0.4 dm i 0.6 dm. Izračunaj ploštinu trokuta.

Rezultat: 18 cm^2.

Zadatak 178 (Matija, gimnazija)

Dva su vrha trokuta ABC u točkama A(4, – 1) i B(0, 5), a treći vrh je točka C(x, 2). Odredi apscisu točke C ako je površina trokuta P = 12. Prikaži trokut u koordinatnom sustavu.

Rješenje 178

Ponovimo!

Površina trokuta ABC zadanog vrhovima A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) računa se po formuli:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2-y_3\right)+x_2\cdot\left(y_3-y_1\right)+x_3\cdot\left(y_1-y_2\right)\right|.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Računamo apscisu točke C.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right)=A\left(4,\ -1\right) \\ B\left(x_2,\ y_2\right)=B\left(0,\ 5\right) \\ C\left(x_3,\ y_3\right)=C\left(x,\ 2\right) \\ P_{ABC}=12 \\ P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2-y_3\right)+x_2\cdot\left(y_3-y_1\right)+x_3\cdot\left(y_1-y_2\right)\right| \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

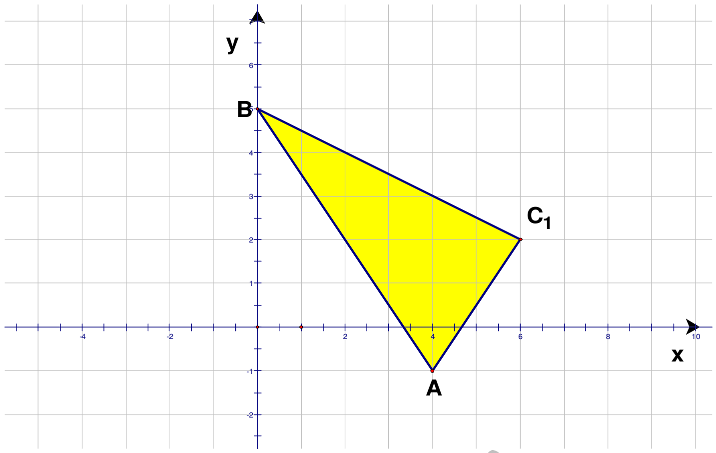
$$\Rightarrow\ 12=\frac{1}{2}\cdot\left|4\cdot(5-2)+0\cdot\left(2-(-1)\right)+x\cdot(-1-5)\right|\ \Rightarrow\ 12=\frac{1}{2}\cdot\left|4\cdot 3+0+x\cdot(-6)\right|\ \Rightarrow$$

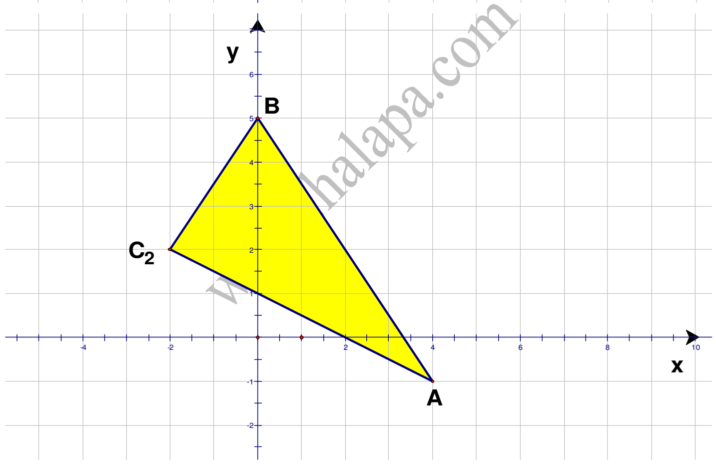
$$\Rightarrow\ 12=\frac{1}{2}\cdot\left|12-6\cdot x\right|\ \Rightarrow\ 12=\frac{1}{2}\cdot\left|12-6\cdot x\right|\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ 24=\left|12-6\cdot x\right|\ \Rightarrow\ \left|12-6\cdot x\right|=24\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednadžba ima} \\ \text{dva rješenja} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 12 - 6 \cdot x = -24 \\ 12 - 6 \cdot x = 24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -6 \cdot x = -24 - 12 \\ -6 \cdot x = 24 - 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -6 \cdot x = -36 \\ -6 \cdot x = 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -6 \cdot x = -36 \;/ : (-6) \\ -6 \cdot x = 12 \;/ : (-6) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} C_1(6,\ 2) \\ C_2(-2,\ 2) \end{matrix}\right\}.$$

Dakle, postoje dvije točke $C_1(6, 2)$ i $C_2(-2, 2)$ za koje trokut ABC ima površinu 12.





Vježba 178

Dva su vrha trokuta ABC u točkama A(– 1, 2) i B(4, – 2), a treći vrh je točka C(x, 0). Odredi apscisu točke C ako je površina trokuta P = 7.

Rezultat: $C_1(-2, 0)$, $C_2(5, 0)$.

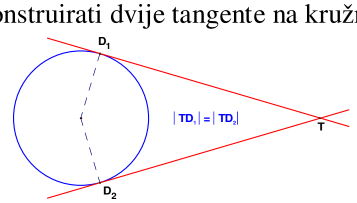
Zadatak 179 (Amazonka, gimnazija)

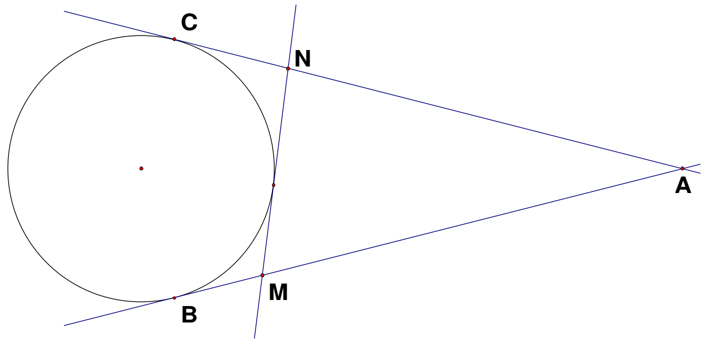
Iz točke A položene su tangente na kružnicu i one je diraju u točkama B i C. Tangenta na kraći luk kružnice što je određen točkama B i C siječe tangentu AB u točki M, a tangentu AC u točki N. Koliki je opseg trokuta AMN ako je $|AB| = 15$ cm?

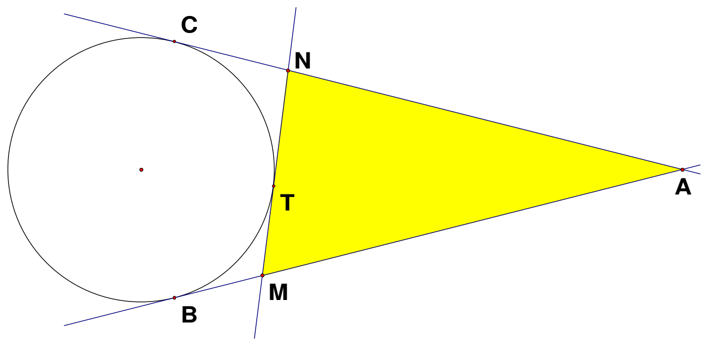
Rješenje 179

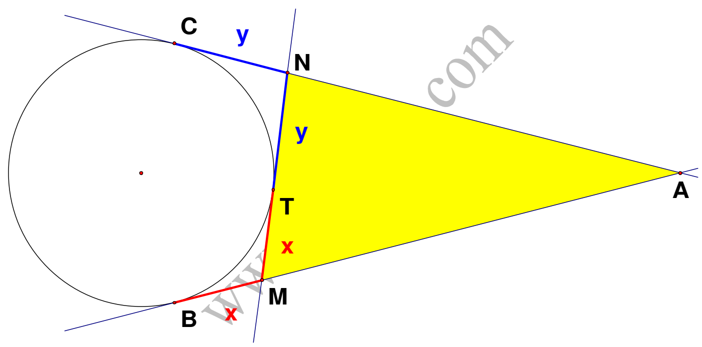
Ponovimo!

Iz točke izvan kružnice mogu se konstruirati dvije tangente na kružnicu za koje vrijedi:









Sa slika vidi se:

$$|AC| = |AB| = 15 \quad , \quad |NC| = |NT| = y \quad , \quad |MB| = |MT| = x$$

$$|AN| = |AC| - |NC| = 15 - y \quad , \quad |AM| = |AB| - |MB| = 15 - x \quad , \quad |MN| = |MT| + |NT| = x + y.$$

Opseg trokuta AMN iznosi:

$$O = |AM| + |AN| + |MN| = 15 - x + 15 - y + x + y = 15 - x + 15 - y + x + y = 30 \Rightarrow O = 30 \ cm.$$

Vježba 179

Iz točke A položene su tangente na kružnicu i one je diraju u točkama B i C. Tangenta na kraći luk kružnice što je određen točkama B i C siječe tangentu AB u točki M, a tangentu AC u točki N. Koliki je opseg trokuta AMN ako je $|AB|$ = 20 cm?

Rezultat: 40 cm.

Zadatak 180 (Matija, gimnazija)

Zadan je trokut s vrhovima A(1, – 1), B(– 3, 2), C(– 3, – 3). Izračunaj duljinu visine iz vrha C.

Rješenje 180

Ponovimo!

Površina trokuta ABC zadanog vrhovima A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) računa se po formuli:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \right|.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad \text{ili} \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad \text{ili} \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Računamo površinu trokuta ABC.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(1, -1) \\ B(x_2, y_2) = B(-3, 2) \\ C(x_3, y_3) = C(-3, -3) \\ P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \right| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| 1 \cdot (2 - (-3)) - 3 \cdot (-3 - (-1)) - 3 \cdot (-1 - 2) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| 1 \cdot (2 + 3) - 3 \cdot (-3 + 1) - 3 \cdot (-1 - 2) \right| \Rightarrow P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| 1 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |5 + 6 + 9| \Rightarrow P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |20| \Rightarrow P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 20 \Rightarrow P_{ABC} = 10 \text{ kvadratnih jedinica.}$$

Budući da je visina v_c iz vrha C okomita na stranicu $\overline{AB}$, moramo izračunati duljinu stranice $\overline{AB}$:

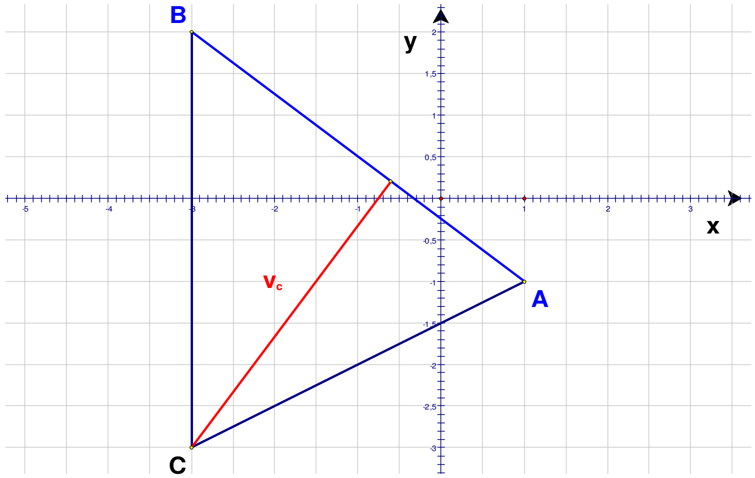
$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(1, -1) \\ B(x_2, y_2) = B(-3, 2) \\ |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (2 - (-1))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (2 + 1)^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{16 + 9} \Rightarrow |AB| = \sqrt{25} \Rightarrow |AB| = 5 \text{ jedinica duljine.}$$

Duljinu visine v_c iz vrha C trokuta ABC izračunat ćemo iz formule za površinu trokuta:

$$P=\frac{|AB|\cdot v_c}{2} \Rightarrow P=\frac{|AB|\cdot v_c}{2} \;/\cdot\frac{2}{|AB|} \Rightarrow v_c=\frac{2\cdot P}{|AB|} \Rightarrow v_c=\frac{2\cdot 10}{5} \Rightarrow v_c=4 \text{ jedinice duljine.}$$



Vježba 180

Zadan je trokut s vrhovima A(– 3, – 2), B(5, 4), C(1, 6). Izračunaj duljinu visine iz vrha C.

Rezultat: 4.