Zadatak 181 (Branko, srednja škola)

Postoji li trokut sa stranicama a, b i c za koje vrijedi a + b = 12, b + c = 26 i a + c = 32?

Rješenje 181

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Svaka stranica trokuta manja je od zbroja preostalih dviju stranica.

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

Zbrajanjem sve tri jednakosti dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=12 \\ b+c=26 \\ a+c=32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow a+b+b+c+a+c=70 \Rightarrow 2\cdot a+2\cdot b+2\cdot c=70 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a+2\cdot b+2\cdot c=70 \;/:2 \Rightarrow a+b+c=35.$$

Računamo stranicu a.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=35 \\ b+c=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+(b+c)=35 \\ b+c=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow a+26=35 \Rightarrow a=35-26 \Rightarrow a=9.$$

Računamo stranicu b.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=35 \\ a+c=32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a+c)+b=35 \\ a+c=32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 32+b=35 \Rightarrow b=35-32 \Rightarrow b=3.$$

Računamo stranicu c.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=35 \\ a=9 \;,\; b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 9+3+c=35 \Rightarrow c=35-9-3 \Rightarrow c=23.$$

Uočimo da je

$$c > a + b \quad , \quad 23 > 9 + 3$$

pa prema tome takav trokut ne postoji.

Vježba 181

Postoji li trokut sa stranicama a, b i c za koje vrijedi a + b = 14, b + c = 28 i a + c = 34?

Rezultat: Ne postoji takav trokut.

Zadatak 182 (Vedran, srednja škola)

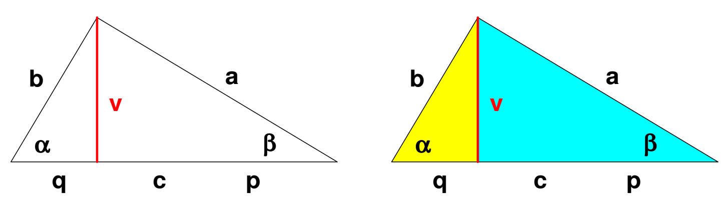
Odredi nepoznate elemente pravokutnog trokuta ako je q = 24, v = 7.

Rješenje 182

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutan trokut



$$p+q=c \quad , \quad \alpha+\beta=90^0 \quad , \quad c^2=a^2+b^2 \quad , \quad v^2=p\cdot q.$$

$$a^2=p\cdot c \quad , \quad b^2=q\cdot c \quad , \quad c\cdot v=a\cdot b.$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Računamo p.

$$v^2 = p \cdot q \Rightarrow v^2 = p \cdot q \; / \cdot \frac{1}{q} \Rightarrow p = \frac{v^2}{q} \Rightarrow p = \frac{7^2}{24} \Rightarrow p = \frac{49}{24}.$$

Računamo c.

$$c = p + q \Rightarrow c = \frac{49}{24} + 24 \Rightarrow c = \frac{49 + 24 \cdot 24}{24} \Rightarrow c = \frac{625}{24}.$$

Računamo a.

1.inačica

$$a^2 = p \cdot c \Rightarrow a^2 = \frac{49}{24} \cdot \frac{625}{24} \Rightarrow a^2 = \frac{7^2 \cdot 25^2}{24^2} \Rightarrow a^2 = \frac{7^2 \cdot 25^2}{24^2} \; / \sqrt{} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{7^2 \cdot 25^2}{24^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{7 \cdot 25}{24} \Rightarrow a = \frac{175}{24}.$$

2.inačica

Uočimo pravokutan trokut kojemu su katete p i v, a hipotenuza je a. Uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$a^2 = v^2 + p^2 \Rightarrow a^2 = 7^2 + \left(\frac{49}{24}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 49 + \frac{2\,401}{576} \Rightarrow a^2 = \frac{28\,224 + 2\,401}{576} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{30\,625}{576} \Rightarrow a^2 = \frac{30\,625}{576} \; / \sqrt{} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{30\,625}{576}} \Rightarrow a = \frac{175}{24}.$$

Računamo b.

1.inačica

$$b^2 = q \cdot c \Rightarrow b^2 = 24 \cdot \frac{625}{24} \Rightarrow b^2 = 24 \cdot \frac{625}{24} \Rightarrow b^2 = 625 \Rightarrow b^2 = 625 \; / \sqrt{} \Rightarrow b = \sqrt{625} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 25.$$

2.inačica

Uočimo pravokutan trokut kojemu su katete q i v, a hipotenuza je b. Uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$b^2 = q^2 + p^2 \Rightarrow b^2 = 24^2 + 7^2 \Rightarrow b^2 = 576 + 49 \Rightarrow b^2 = 625 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 625 \; / \sqrt{} \Rightarrow b = \sqrt{625} \Rightarrow b = 25.$$

3.inačica

$$c \cdot v = a \cdot b \Rightarrow c \cdot v = a \cdot b \; / \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow b = \frac{c \cdot v}{a} \Rightarrow b = \frac{\frac{625}{24} \cdot 7}{\frac{175}{24}} \Rightarrow b = \frac{\frac{625}{24} \cdot 7}{\frac{175}{24}} \Rightarrow b = \frac{625 \cdot 7}{175} \Rightarrow b = 25.$$

Računamo kut α.

1.inačica

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{175}{24}}{\frac{625}{24}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{175}{24}}{\frac{625}{24}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{175}{625} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{kratimo} \\ \text{razlomak s } 25 \end{bmatrix} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{7}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right) \Rightarrow \alpha = 16^0 15'37''.$$

2.inačica

$$\sin\alpha = \frac{v}{b} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{7}{25} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right) \Rightarrow \alpha = 16^0 15'37''.$$

Računamo kut β.

1.inačica

$$\sin\beta=\frac{b}{c}\Rightarrow\sin\beta=\frac{25}{\frac{625}{24}}\Rightarrow\sin\beta=\frac{\frac{25}{1}}{\frac{625}{24}}\Rightarrow\sin\beta=\frac{\frac{25}{1}}{\frac{625}{24}}\Rightarrow\sin\beta=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{25}{24}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin\beta=\frac{24}{25}\Rightarrow\beta=\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)\Rightarrow\beta=73^{0}44'23".$$

2.inačica

$$\sin\beta=\frac{v}{a}\Rightarrow\sin\beta=\frac{7}{\frac{175}{24}}\Rightarrow\sin\beta=\frac{\frac{7}{1}}{\frac{175}{24}}\Rightarrow\sin\beta=\frac{\frac{7}{1}}{\frac{175}{24}}\Rightarrow\sin\beta=\frac{24}{25}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\beta=\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)\Rightarrow\beta=73^{0}44'23".$$

3.inačica

$$\alpha+\beta=90^{0}\Rightarrow\beta=90^{0}-\alpha\Rightarrow\beta=89^{0}59'60"-16^{0}15'37"\Rightarrow\beta=73^{0}44'23".$$

Vježba 182

Odredi nepoznate elemente pravokutnog trokuta ako je b = 25, v = 7.

Rezultat: Rezultati su isti onima iz zadatka.

Zadatak 183 (Katarina, srednja škola)

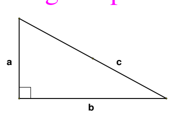
Kraci jednakokračnog trokuta su 14 m, a visina na osnovicu 11 m. Koliki su kut i osnovica trokuta?

Rješenje 183

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pitagorin poučak

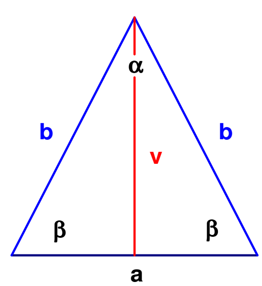


Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2=a^2+b^2\quad,\quad a^2=c^2-b^2\quad,\quad b^2=c^2-a^2.$$

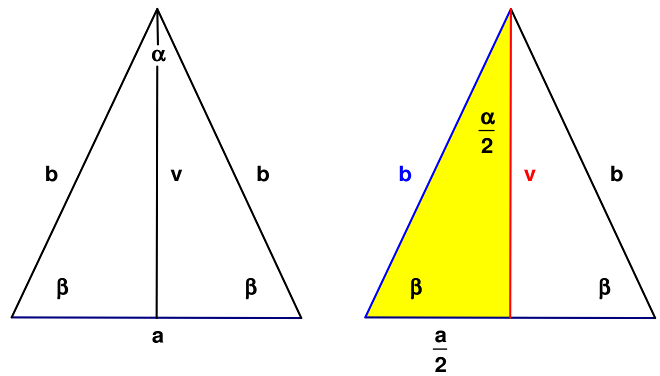
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.



Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta. Uočimo da su kutovi koji leže na trećoj stranici jednaki zbog činjenice da se nasuprot jednakim stranicama nalaze jednaki kutovi. Zbroj kutova u trokutu iznosi:

$$\alpha+2\cdot\beta=180^{0}.$$



Uočimo pravokutan trokut kojemu su katete visina v, polovica osnovice $\frac{a}{2}$, a hipotenuza krak b.

Tada je:

$$\sin\beta=\frac{v}{b} \Rightarrow \beta=\sin^{-1}\left(\frac{v}{b}\right) \Rightarrow \beta=\sin^{-1}\left(\frac{11}{14}\right) \Rightarrow \beta=51^{0}47'12".$$

Računamo kut α.

$$\alpha+2\cdot\beta=180^{0} \Rightarrow \alpha=180^{0}-2\cdot\beta \Rightarrow \alpha=180^{0}-2\cdot51^{0}47'12" \Rightarrow \alpha=180^{0}-102^{0}94'24" \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[1^{0}=60'\right] \Rightarrow \alpha=180^{0}-102^{0}[60+34]'24" \Rightarrow \alpha=180^{0}-103^{0}34'24" \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=179^{0}59'60"-103^{0}34'24" \Rightarrow \alpha=76^{0}25'36".$$

Računamo duljinu osnovice trokuta.

1.inačica

Uočimo pravokutan trokut kojemu su katete visina v, polovica osnovice $\frac{a}{2}$, a hipotenuza krak b.

Pomoću funkcije kosinus dobije se:

$$\cos\beta=\frac{\frac{a}{2}}{b} \Rightarrow \cos\beta=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{1}} \Rightarrow \cos\beta=\frac{a}{2\cdot b} \Rightarrow \cos\beta=\frac{a}{2\cdot b}\ /\cdot 2\cdot b \Rightarrow a=2\cdot b\cdot\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=2\cdot14\cdot\cos51^{0}47'12" \Rightarrow a=17.3 \Rightarrow a=17.3\ m.$$

2.inačica

Uočimo pravokutan trokut kojemu su katete visina v, polovica osnovice $\frac{a}{2}$, a hipotenuza krak b.

Pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^{2}=b^{2}-v^{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^{2}=14^{2}-11^{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^{2}=196-121 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^{2}=75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^{2}=75\ /\sqrt{\ } \Rightarrow \frac{a}{2}=\sqrt{75} \Rightarrow \frac{a}{2}=\sqrt{75}\ /\cdot 2 \Rightarrow a=2\cdot\sqrt{75} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=2\cdot\sqrt{25\cdot3} \Rightarrow a=2\cdot5\cdot\sqrt{3} \Rightarrow a=10\cdot\sqrt{3} \Rightarrow a=10\cdot1.73 \Rightarrow a=17.3\ m.$$

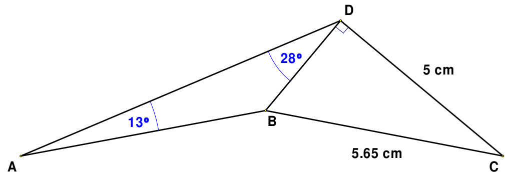
Vježba 183

Krakovi jednakokračnog trokuta su 28 m, a visina na osnovicu 22 m. Kolika je osnovica trokuta?

Rezultat: 34.6 m.

Zadatak 184 (Karolina, srednja škola)

Odredite duljine dužina $\overline{BD}$ i $\overline{AB}$ sa slike.



Rješenje 184

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

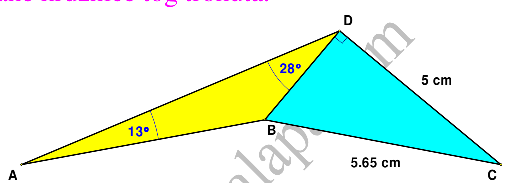
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad , \quad a^2 = c^2 - b^2 \quad , \quad b^2 = c^2 - a^2 .$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.



Budući da je trokut BCD pravokutan, uporabom Pitagorina poučka dobije se duljina $|BD|$.

$$|BD|^2 = |BC|^2 - |CD|^2 \Rightarrow |BD|^2 = |BC|^2 - |CD|^2 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow |BD| = \sqrt{|BC|^2 - |CD|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BD| = \sqrt{5.65^2 - 5^2} \Rightarrow |BD| = 2.63\ cm.$$

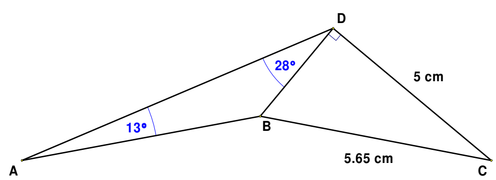
Uočimo trokut ABD. Poznata su njegova dva kuta i duljina jedne stranice pa duljinu druge stranice izračunamo pomoću sinusovog poučka.

$$\frac{|AB|}{\sin 28^0} = \frac{|BD|}{\sin 13^0} \Rightarrow \frac{|AB|}{\sin 28^0} = \frac{|BD|}{\sin 13^0} \;/\cdot \sin 28^0 \Rightarrow |AB| = |BD| \cdot \frac{\sin 28^0}{\sin 13^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = 2.63\ cm \cdot \frac{\sin 28^0}{\sin 13^0} \Rightarrow |AB| = 5.49\ cm.$$

Vježba 184

Odredite duljinu dužine $\overline{AD}$ sa slike.



Rezultat: 7.67 cm.

Zadatak 185 (Goran, srednja škola)

Kakav je trokut za čije šiljaste kutove vrijedi jednakost: $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$?

Rješenje 185

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Pravokutan trokut ima jedan pravi kut (90º).

$$\sin\left(90^0-x\right)=\cos x \quad , \quad \cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \;,\; a\ge 0.$$

Za šiljasti kut x (0º < x < 90º) vrijedi

$$\sin x>0 \quad , \quad \cos x>0.$$

Transformiramo zadani izraz.

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1 \;\Rightarrow\; \sin^2\alpha=1-\sin^2\beta \;\Rightarrow\; \sin^2\alpha=\cos^2\beta.$$

Budući da su sin α i cos β pozitivni (jer su kutovi α i β šiljsti), slijedi:

$$\sin^2\alpha=\cos^2\beta \;\Rightarrow\; \sin^2\alpha=\cos^2\beta \;/\sqrt{\;} \;\Rightarrow\; \sin\alpha=\cos\beta \;\Rightarrow\; \sin\alpha=\sin\left(90^0-\beta\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \alpha=90^0-\beta \;\Rightarrow\; \alpha+\beta=90^0.$$

Trokut je pravokutan.

Vježba 185

Kakav je trokut za čije šiljaste kutove vrijedi jednakost: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$?

Rezultat: Pravokutan.

Zadatak 186 (Irena, srednja škola)

U trokutu ABC zadana je stranica a = 3, suma kvadrata stranica b i c, $b^2 + c^2 = 41$ i površina P = 6. Nađi tangens kuta nasuprot stranice a.

Rješenje 186

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

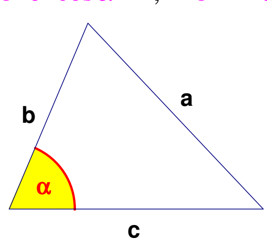
$$ctg\,x=\frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad tg\,x\cdot ctg\,x=1 \quad , \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

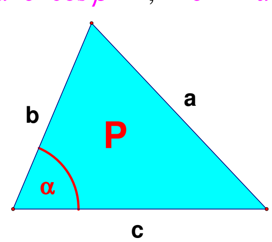
Površina trokuta zadanog dvjema stranicama i kutom između njih

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \quad , \quad b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \quad , \quad c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$





Iz formule za ploštinu trokuta dobije se:

$$P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin\alpha \Rightarrow 6=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin\alpha \Rightarrow 6=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin\alpha \;/\cdot\frac{2}{\sin\alpha} \Rightarrow b\cdot c=\frac{12}{\sin\alpha}.$$

Uporabom kosinusova poučka slijedi:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow 3^2=41-2\cdot\frac{12}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha \Rightarrow 9=41-\frac{24}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9=41-24\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow 9=41-24\cdot ctg\,\alpha \Rightarrow 24\cdot ctg\,\alpha=41-9 \Rightarrow 24\cdot ctg\,\alpha=32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24\cdot ctg\,\alpha=32 \;/:24 \Rightarrow ctg\,\alpha=\frac{32}{24} \Rightarrow ctg\,\alpha=\frac{4}{3} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{3}{4} \Rightarrow tg\,\alpha=0.75.$$

Vježba 186

U trokutu ABC zadana je stranica b = 3, suma kvadrata stranica a i c, $a^2 + c^2 = 41$ i površina P = 6. Nađi tangens kuta nasuprot stranice b.

Rezultat: 0.75.

Zadatak 187 (Helena, srednja škola)

Odredi kutove pravokutnog trokuta za koji vrijedi formula $(a + b)^2 = 8 \cdot P$, gdje su a i b katete, a P ploština trokuta.

Rješenje 187

Ponovimo!

$$(x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2 \quad , \quad (x-y)^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine koje zovemo stranice trokuta.
Nasuprot jednakim stranicama nalaze se jednaki kutovi.

$$\begin{cases} a=b \Rightarrow \alpha=\beta \\ a=c \Rightarrow \alpha=\gamma \\ b=c \Rightarrow \beta=\gamma \\ a=b=c \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma. \end{cases}$$

Nasuprot jednakim kutovima nalaze se jednake stranice.

$$\begin{cases} \alpha=\beta \Rightarrow a=b \\ \alpha=\gamma \Rightarrow a=c \\ \beta=\gamma \Rightarrow b=c \\ \alpha=\beta=\gamma \Rightarrow a=b=c. \end{cases}$$

Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.
Trokute dijelimo:

- prema odnosu među duljinama stranica

$$\begin{cases} \text{raznostraničan} \\ \text{jednakokračan} \\ \text{jednakostraničan} \end{cases}$$

- prema kutovima

$$\begin{cases} \text{šiljastokutan} \\ \text{tupokutan} \\ \text{pravokutan.} \end{cases}$$

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kraci trokuta. Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (90º).

Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Iz zadane pretpostavke i formule za ploštinu pravokutnog traokuta dobije se:

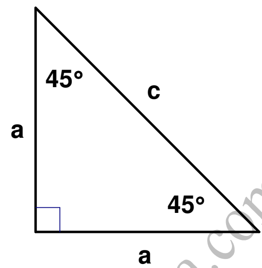
$$\left.\begin{array}{l} (a+b)^2 = 8 \cdot P \\ P = \frac{a \cdot b}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow (a+b)^2 = 8 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow (a+b)^2 = 8 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 4 \cdot a \cdot b \Rightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 4 \cdot a \cdot b \Rightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 4 \cdot a \cdot b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \, / \sqrt{} \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b.$$

Budući da su katete jednake, trokut je jednakokračan pravokutan i za njegove kutove vrijedi:

$$\alpha = 45^0 \quad , \quad \beta = 45^0 \quad , \quad \gamma = 90^0.$$



Vježba 187

Odredi kutove pravokutnog trokuta za koji vrijedi formula $P = \frac{1}{8} \cdot (a+b)^2$, gdje su a i b katete, a P ploština trokuta.

Rezultat: $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 90°$.

Zadatak 188 (Josip, strojarska škola)

Zadan je trokut ABC čiji kutovi zadovoljavaju relaciju $\alpha - \beta = 2 \cdot \gamma$. Dokaži da je α tupi kut.

Rješenje 188

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Vrste kutova:

- šiljasti kut – 0° do 90°
- pravi kut – 90°
- tupi kut – 90° do 180°
- ispruženi kut – 180°
- izbočeni kut – 180° do 360°
- puni kut – 360°

Iz sustava jednadžbi dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 180^0 \\ \alpha - \beta = 2 \cdot \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 180^0 \\ \alpha - \beta - 2 \cdot \gamma = 0^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+\alpha-\beta-2\cdot\gamma=180^0+0^0 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma+\alpha-\beta-2\cdot\gamma=180^0+0^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\alpha-\gamma=180^0 \Rightarrow 2\cdot\alpha=180^0+\gamma \Rightarrow 2\cdot\alpha=180^0+\gamma \;/:2 \Rightarrow \alpha=90^0+\frac{\gamma}{2}.$$

Kut α je tupi kut.

Vježba 188

Zadan je trokut ABC čiji kutovi zadovoljavaju relaciju $\beta-\gamma=2\cdot\alpha.$ Dokaži da je β tupi kut.

Rezultat: $\beta=90^0+\frac{\alpha}{2}.$

Zadatak 189 (XY, elektrotehnička škola)

Ako je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta 25 cm, a tg α = 0.75, onda je zbroj duljina kateta toga trokuta jednak:

$A)\ 30\ cm \qquad B)\ 35\ cm \qquad C)\ 40\ cm \qquad D)\ 45\ cm$

Rješenje 189

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \;,\; a\geq 0.$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\sin\alpha=\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \quad , \quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pitagorin poučak

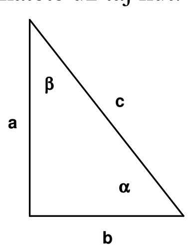
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2=a^2+b^2.$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.



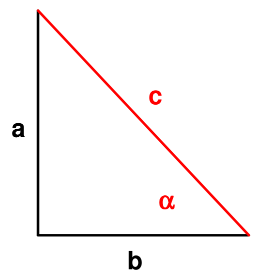
$$\sin\alpha=\frac{a}{c} \quad , \quad \cos\alpha=\frac{b}{c}$$

$$\sin\beta=\frac{b}{c} \quad , \quad \cos\beta=\frac{a}{c}$$

$$tg\,\alpha=\frac{a}{b} \quad , \quad tg\,\beta=\frac{b}{a}$$

1.inačica

$$tg\,0.75=tg\,\frac{75}{100}=tg\,\frac{75}{100}=tg\,\frac{3}{4}.$$



Pomoću funkcija sinus i kosinus izračunamo duljine kateta a i b.

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{a}{c}\\ \cos\alpha=\dfrac{b}{c}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{a}{c}\;/\cdot c\\ \cos\alpha=\dfrac{b}{c}\;/\cdot c\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=c\cdot\sin\alpha\\ b=c\cdot\cos\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=c\cdot\dfrac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\\ b=c\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\end{array}\right\}.$$

Tada je:

$$a+b=c\cdot\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}+c\cdot\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{c\cdot tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}+\frac{c}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{c}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\cdot\left(tg\,\alpha+1\right)=$$

$$=\frac{25}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}}\cdot\left(\frac{3}{4}+1\right)=\frac{25}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{1}\right)=\frac{25}{\sqrt{\frac{1}{1}+\frac{9}{16}}}\cdot\frac{3+4}{4}=\frac{25}{\sqrt{\frac{16+9}{16}}}\cdot\frac{7}{4}=\frac{25}{\sqrt{\frac{25}{16}}}\cdot\frac{7}{4}=$$

$$=\frac{25}{\frac{5}{4}}\cdot\frac{7}{4}=\frac{\frac{25}{1}}{\frac{5}{4}}\cdot\frac{7}{4}=\frac{\frac{25}{1}}{\frac{5}{4}}\cdot\frac{7}{4}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{1}{4}}\cdot\frac{7}{4}=\frac{20}{1}\cdot\frac{7}{4}=\frac{20}{1}\cdot\frac{7}{4}=5\cdot7=35\ cm.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$tg\,0.75=tg\,\frac{75}{100}=tg\,\frac{75}{100}=tg\,\frac{3}{4}.$$

Pomoću funkcije tangens izrazimo duljinu katete a kao funkciju duljine katete b.

$$\left.\begin{array}{l}tg\,\alpha=\dfrac{a}{b}\\ tg\,\alpha=\dfrac{3}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right]\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\;/\cdot b\Rightarrow a=\frac{3}{4}\cdot b.$$

Uporabom Pitagorina poučka dobijemo duljinu katete b.

$$\left.\begin{array}{l}a^2+b^2=c^2\\ a=\dfrac{3}{4}\cdot b\\ c=25\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{3}{4}\cdot b\right)^2+b^2=25^2\Rightarrow\frac{9}{16}\cdot b^2+b^2=625\Rightarrow b^2\cdot\left(\frac{9}{16}+1\right)=625\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2\cdot\left(\frac{9}{16}+\frac{1}{1}\right)=625\Rightarrow b^2\cdot\frac{9+16}{16}=625\Rightarrow\frac{25}{16}\cdot b^2=625\Rightarrow\frac{25}{16}\cdot b^2=625\;/\cdot\frac{16}{25}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=400\Rightarrow b^2=400\;/\sqrt{}\Rightarrow b=\sqrt{400}\Rightarrow b=\sqrt{20^2}\Rightarrow b=20\ cm.$$

Računamo a.

$$\left.\begin{array}{l} b = 20 \\ a = \frac{3}{4} \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{3}{4} \cdot 20 = \frac{3}{4} \cdot \frac{20}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{20}{1} = 15 \ cm.$$

Tada je:

$$a + b = 15 \text{ cm} + 20 \text{ cm} = 35 \text{ cm}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 189

Ako je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta 25, a tg α = 0.75, onda je umnožak duljina kateta toga trokuta jednak:

$A)\ 300 \qquad B)\ 150 \qquad C)\ 200 \qquad D)\ 400$

Rezultat: A.

Zadatak 190 (XY, elektrotehnička škola)

Nasuprot stranicama a, b, c trokuta su kutovi α, β, γ. Koliki je omjer b : c, ako je α = 45º, β = 30º?

$$A)\ \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{3} - 1} \qquad B)\ \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} \qquad C)\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} \qquad D)\ \frac{1}{2} \qquad E)\ \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Rješenje 190

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^0 = \frac{1}{2}.$$

Izračunamo kut γ.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \Rightarrow \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta) \Rightarrow \gamma = 180^0 - \left(45^0 + 30^0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 180^0 - 75^0 \Rightarrow \gamma = 105^0.$$

Uporabom sinusova poučka dobije se traženi omjer.

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \ / \cdot \frac{\sin \beta}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sin 30^0}{\sin 105^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\frac{1}{2}}{\sin\left(45^0+60^0\right)} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\frac{1}{2}}{\sin 45^0\cdot\cos 60^0+\cos 45^0\cdot\sin 60^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 190

Nasuprot stranicama a, b, c trokuta su kutovi α, β, γ. Koliki je omjer a : b, ako je α = 45º, γ = 105º?

$$A)\ \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad B)\ \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad C)\ \sqrt{2} \qquad D)\ \frac{1}{2} \qquad E)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rezultat: C.

Zadatak 191 (Ana, gimnazija)

Katete pravokutnog trokuta su 11 i 17. Kolika je duljina simetrale pravog kuta tog trokuta?

$A)$ 9.445 $B)$ 9.121 $C)$ 8.989 $D)$ 9.898

Rješenje 191

Ponovimo!

$$\sin 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad -x+x=0.$$

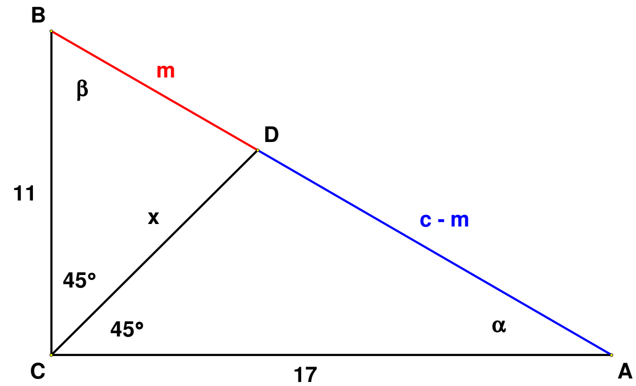
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

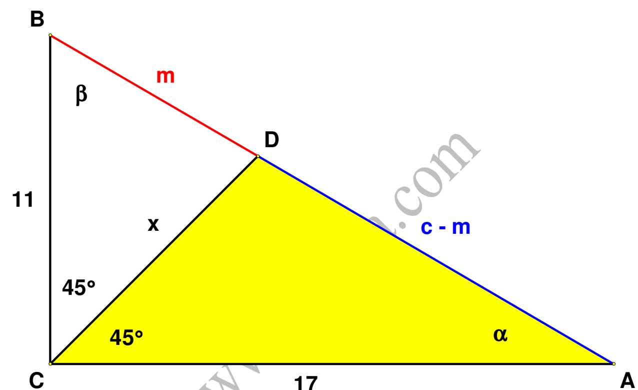
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$



Sa slike vidi se:

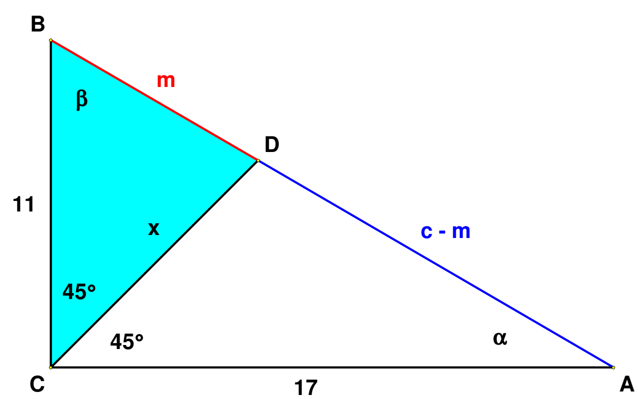
$$|BC| = 11 \quad , \quad |CA| = 17 \quad , \quad |AB| = c \quad , \quad |DB| = m \quad , \quad |CD| = x$$

$$|AD| = |AB| - |DB| = c - m \quad , \quad \sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{11}{c} \quad , \quad \sin\beta = \frac{|CA|}{|AB|} \Rightarrow \sin\beta = \frac{17}{c}.$$



Uočimo trokut ADC i pomoću sinusova poučka dobijemo

$$\frac{|CD|}{\sin\alpha} = \frac{|AD|}{\sin 45^0} \Rightarrow \frac{x}{\frac{11}{c}} = \frac{c-m}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{\frac{x}{1}}{\frac{11}{c}} = \frac{\frac{c-m}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{c \cdot x}{11} = \frac{2 \cdot (c-m)}{\sqrt{2}}.$$



Uočimo trokut DBC i pomoću sinusova poučka dobijemo

$$\frac{|CD|}{\sin\beta}=\frac{|DB|}{\sin 45^0}\Rightarrow\frac{\frac{x}{17}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{m}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow\frac{\frac{x}{\frac{1}{17}}}{c}=\frac{\frac{m}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow\frac{c\cdot x}{17}=\frac{2\cdot m}{\sqrt{2}}.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo duljinu simetrale pravog kuta trokuta.

$$\left.\begin{aligned}\frac{c\cdot x}{11}&=\frac{2\cdot(c-m)}{\sqrt{2}}\\ \frac{c\cdot x}{17}&=\frac{2\cdot m}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{zbrojimo}\\ \text{jednadžbe}\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{c\cdot x}{11}+\frac{c\cdot x}{17}=\frac{2\cdot(c-m)}{\sqrt{2}}+\frac{2\cdot m}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot x\cdot\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{17}\right)=\frac{2\cdot(c-m)+2\cdot m}{\sqrt{2}}\Rightarrow c\cdot x\cdot\frac{17+11}{11\cdot 17}=\frac{2\cdot c-2\cdot m+2\cdot m}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot x\cdot\frac{28}{187}=\frac{2\cdot c-2\cdot m+2\cdot m}{\sqrt{2}}\Rightarrow c\cdot x\cdot\frac{28}{187}=\frac{2\cdot c}{\sqrt{2}}\Rightarrow c\cdot x\cdot\frac{28}{187}=\frac{2\cdot c}{\sqrt{2}}\ /\cdot\frac{187}{28\cdot c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{187}{14\cdot\sqrt{2}}\Rightarrow x=9.445.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 191

Katete pravokutnog trokuta su 22 i 34. Kolika je duljina simetrale pravog kuta tog trokuta?

A) 18.89 *B*) 18.242 *C*) 17.978 *D*) 19.796

Rezultat: A.

Zadatak 192 (Tomislav, srednja škola)

Stranice trokuta iznose a = 1, b = 2, a kut među njima γ = 120º. Sinus kuta β nasuprot stranici b je:

$$A)\ \sqrt{\frac{3}{7}}\qquad B)\ \frac{1}{4}\qquad C)\ \sqrt{\frac{2}{5}}\qquad D)\ \frac{1}{3}$$

Rješenje 192

Ponovimo!

$$\cos\left(180^0-\alpha\right)=-\cos\alpha\quad,\quad\cos 60^0=-\frac{1}{2}.$$

$$\sin\left(180^0-\alpha\right)=\sin\alpha\quad,\quad\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad,\quad\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

Podsjetimo se kako glasi kosinusov poučak (poučak o kosinusu).

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\quad,\quad b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta\quad,\quad c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Budući da su zadane dvije stranice a i b, te kut γ među njima, pomoću kosinusovog poučka izračunamo duljinu treće stranice c.

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\ \Rightarrow\ c^2=1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cdot\cos 120^0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ c^2=1+4-4\cdot\cos\left(180^0-60^0\right)\ \Rightarrow\ c^2=5-4\cdot\cos 60^0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ c^2=5-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow\ c^2=5+2\ \Rightarrow\ c^2=7\ \Rightarrow\ c^2=7\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ c=\sqrt{7}.$$

Uporabom sinusovog poučka dobije se:

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\ \Rightarrow\ \frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\ /\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\ \Rightarrow\ b\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\beta\ \Rightarrow\ c\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\gamma\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ c\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\gamma\ /:c\ \Rightarrow\ \sin\beta=\frac{b\cdot\sin\gamma}{c}\ \Rightarrow\ \sin\beta=\frac{2\cdot\sin 120^0}{\sqrt{7}}\ \Rightarrow\ \sin\beta=\frac{2\cdot\sin\left(180^0-60^0\right)}{\sqrt{7}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sin\beta=\frac{2\cdot\sin 60^0}{\sqrt{7}}\ \Rightarrow\ \sin\beta=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}\ \Rightarrow\ \sin\beta=\frac{\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\sqrt{7}}\ \Rightarrow\ \sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\ \Rightarrow\ \sin\beta=\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 192

Stranice trokuta iznose a = 1, b = 2, a kut među njima γ = 120º. Sinus kuta α nasuprot stranici a je:

$$A)\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}\qquad B)\ 2\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}\qquad C)\ \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\qquad D)\ \frac{1}{2}$$

Rezultat: A.

Zadatak 193 (Tomislav, srednja škola)

Koliki je opseg pravokutnog trokuta površine 1 m^2 i hipotenuze 2 m?

Rješenje 193

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=x\quad,\quad(x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\quad,\quad(x-y)^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2.$$

$$x^n\cdot x^m=x^{n+m}\quad,\quad\left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}\quad,\quad\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º).
Površina pravokutnog trokuta kojemu su duljine kateta a i b je:

$$P=\frac{a\cdot b}{2}.$$

Opseg trokuta kojemu su duljine stranica a, b i c iznosi

$$O=a+b+c.$$

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2=a^2+b^2.$$

1.inačica

Iz formule za površinu pravokutnog trokuta dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{a\cdot b}{2} \\ P=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{komparacije}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{a\cdot b}{2}=1 \Rightarrow \frac{a\cdot b}{2}=1\ /\cdot 2 \Rightarrow a\cdot b=2.$$

Tada je:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \Rightarrow (a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b \Rightarrow \left[a^2+b^2=c^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2=c^2+2\cdot a\cdot b \Rightarrow (a+b)^2=2^2+2\cdot 2 \Rightarrow (a+b)^2=4+4 \Rightarrow (a+b)^2=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2=8\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a+b=\sqrt{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje}\end{array}\right] \Rightarrow a+b=\sqrt{4\cdot 2} \Rightarrow a+b=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b=2\cdot\sqrt{2}.$$

Opseg trokuta iznosi:

$$O=a+b+c \Rightarrow O=(a+b)+c \Rightarrow O=2\cdot\sqrt{2}+2 \Rightarrow O=2+2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow O=2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right).$$

2.inačica

Pomoću formule za površinu pravokutnog trokuta dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{a\cdot b}{2} \\ P=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{komparacije}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{a\cdot b}{2}=1 \Rightarrow \frac{a\cdot b}{2}=1\ /\cdot 2 \Rightarrow a\cdot b=2.$$

Iz sustava jednadžbi izračunaju se duljine kateta a i b.

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=c^2 \\ a\cdot b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+b^2=2^2 \\ a\cdot b=2\ /:a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+b^2=4 \\ b=\dfrac{2}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow a^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+\frac{4}{a^2}=4 \Rightarrow a^2+\frac{4}{a^2}=4\ /\cdot a^2 \Rightarrow a^4+4=4\cdot a^2 \Rightarrow a^4-4\cdot a^2+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2-2\right)^2=0 \Rightarrow \left(a^2-2\right)^2=0\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a^2-2=0 \Rightarrow a^2=2 \Rightarrow a^2=2\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=\dfrac{2}{a} \\ a=\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow b=\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow b=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow b=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow b=\sqrt{2}.$$

Opseg trokuta iznosi:

$$O=a+b+c \Rightarrow O=\sqrt{2}+\sqrt{2}+2 \Rightarrow O=2+2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow O=2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Vježba 193

Koliki je opseg pravokutnog trokuta površine 6 m^2 i hipotenuze 5 m?

Rezultat: 12 m.

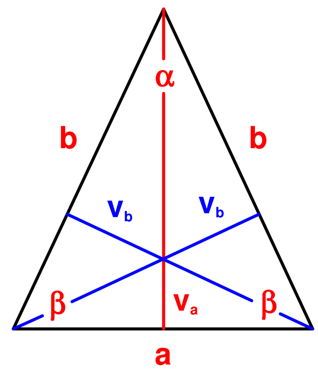
Zadatak 194 (Boris, gimnazija)

Ako je duljina visine na osnovicu jednakokračnog trokuta jednaka 10 cm, a duljina visine na krak 12 cm, koliki su kutovi trokuta?

Rješenje 194

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen sa tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj unutarnjih kutova trokuta je 180º.



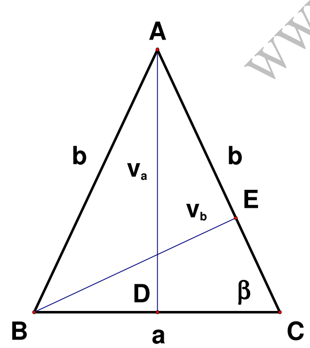
Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica ili baza trokuta. Ploština jednakokračnog trokuta izračunava se po formuli

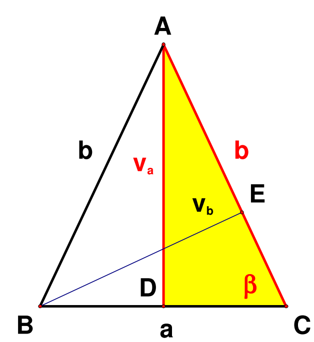
$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2}.$$

Za unutarnje kutove jednakokračnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^0.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.





Sa slika vidi se:

$$|AD| = v_a = 10 \ cm \quad , \quad |BE| = v_b = 12 \ cm \quad , \quad |AC| = b \quad , \quad |BC| = a \quad , \quad |DC| = \frac{1}{2} \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot a$$

Budući da površinu jednakokračnog trokuta ABC možemo izračunati na dva načina, slijedi:

$$\frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} \Rightarrow \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} \ / \cdot \frac{2}{v_a} \Rightarrow a = b \cdot \frac{v_b}{v_a} \Rightarrow a = b \cdot \frac{12 \ cm}{10 \ cm} \Rightarrow a = 1.2 \cdot b.$$

Sada je

$$|DC| = \frac{1}{2} \cdot a \Rightarrow |DC| = \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot b \Rightarrow |DC| = 0.6 \cdot b.$$

Uočimo pravokutan trokut ADC i pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 \Rightarrow b^2 = 10^2 + (0.6 \cdot b)^2 \Rightarrow b^2 = 100 + 0.36 \cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 - 0.36 \cdot b^2 = 100 \Rightarrow 0.64 \cdot b^2 = 100 \Rightarrow 0.64 \cdot b^2 = 100 \; / : 0.64 \Rightarrow b^2 = \frac{100}{0.64} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{100}{0.64} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{100}{0.64}} \Rightarrow b = \frac{10}{0.8} \Rightarrow b = 12.5 \; cm.$$

Uporabom funkcije sinus iz pravokutnog trokuta ADC izračuna se kut β:

$$\sin\beta = \frac{|AD|}{|AC|} \Rightarrow \sin\beta = \frac{10 \; cm}{12.5 \; cm} \Rightarrow \sin\beta = \frac{10}{12.5} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\frac{10}{12.5} \Rightarrow \beta = 53^0 7'48''.$$

Tada kut α iznosi:

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^0 \Rightarrow \alpha = 180^0 - 2 \cdot \beta \Rightarrow \alpha = 180^0 - 2 \cdot 53^0 7'48'' \Rightarrow \alpha = 180^0 - 106^0 14'96'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1^0 = 60' \\ 1' = 60'' \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = 180^0 - 106^0 15'36'' \Rightarrow \alpha = 179^0 59'60'' - 106^0 15'36'' \Rightarrow \alpha = 73^0 44'24''.$$

Vježba 194

Ako je duljina visine na osnovicu jednakokračnog trokuta jednaka 0.1 m, a duljina visine na krak 0.12 m, koliki su kutovi trokuta?

Rezultat: $\alpha = 73^0 44'24''$, $\beta = 53^0 7'48''$.

Zadatak 195 (Bole, gimnazija)

Unutar kuta od 60º odabrana je točka koja je 2 cm udaljena od jednog, odnosno 5 cm od drugog kraka kuta. Kolika je udaljenost te točke od vrha kuta?

Rješenje 195

Ponovimo!

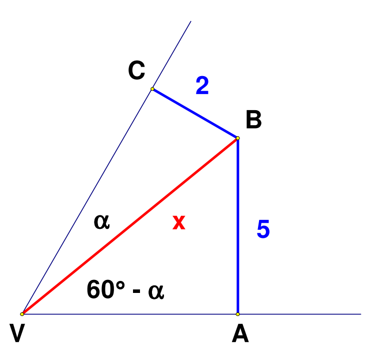
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

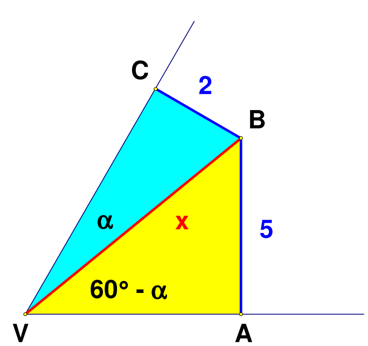
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \quad , \quad \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^0 = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \; , \; a \ge 0 \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b.$$





Sa slika vidi se:

$$|AB|=5 \quad , \quad |BC|=2 \quad , \quad |VB|=x \quad , \quad \angle BVC=\alpha \quad , \quad \angle AVB=60^0-\alpha$$

Uočimo pravokutne trokute ΔVBC i ΔVAB. Tada je:

$$\sin\alpha=\frac{|BC|}{|VB|} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{2}{x} \quad , \quad \sin\left(60^0-\alpha\right)=\frac{|AB|}{|VB|} \Rightarrow \sin\left(60^0-\alpha\right)=\frac{5}{x}.$$

Dalje slijedi:

$$\sin\left(60^0-\alpha\right)=\frac{5}{x} \Rightarrow \sin 60^0\cdot\cos\alpha-\cos 60^0\cdot\sin\alpha=\frac{5}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha=\frac{5}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sin\alpha=\frac{2}{x}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}=\frac{5}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x}=\frac{5}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{1}{x}=\frac{5}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{5}{x}+\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{6}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{6}{x} \,/\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{6}{x}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{12}{x\cdot\sqrt{3}}.$$

Uporabom formule

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

dobije se vrijednost za x = |VB|.

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\\ \cos\alpha=\dfrac{12}{x\cdot\sqrt{3}} \ , \ \sin\alpha=\dfrac{2}{x}\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{12}{x\cdot\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2=1 \Rightarrow \frac{144}{3\cdot x^2}+\frac{4}{x^2}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{144+12}{3\cdot x^2}=1 \Rightarrow \frac{156}{3\cdot x^2}=1 \Rightarrow \frac{156}{3\cdot x^2}=1 \Rightarrow \frac{52}{x^2}=1 \Rightarrow x^2=52 \Rightarrow x^2=52 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{52} \Rightarrow x=\sqrt{4\cdot 13} \Rightarrow x=\sqrt{4}\cdot\sqrt{13} \Rightarrow x=2\cdot\sqrt{13}.$$

Vježba 195

Unutar kuta od 60º odabrana je točka koja je 4 cm udaljena od jednog, odnosno 10 cm od drugog kraka kuta. Kolika je udaljenost te točke od vrha kuta?

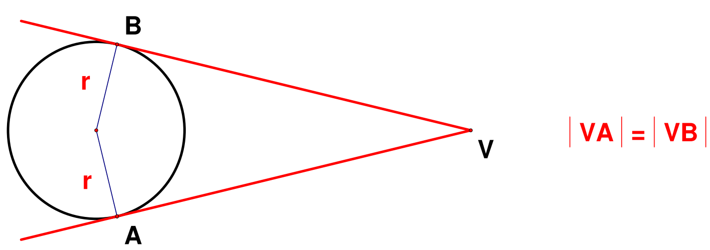
Rezultat: $4\cdot\sqrt{13}.$

Zadatak 196 (Sema, Halid, gimnazija)

Zadan je pravokutan trokut A, B, C i upisana kružnica. Dokazati da je ploština pravokutnog trokuta jednaka umnošku duljina odsječaka p i q, na koje dodirna točka upisane kružnice dijeli hipotenuzu.

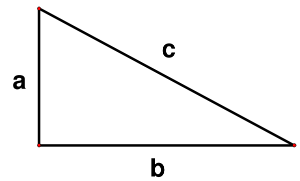
Rješenje 196

Ponovimo!



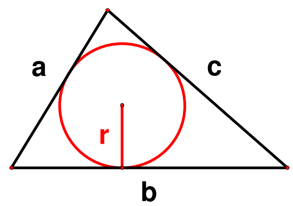
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Ploština pravokutnog trokuta iznosi:

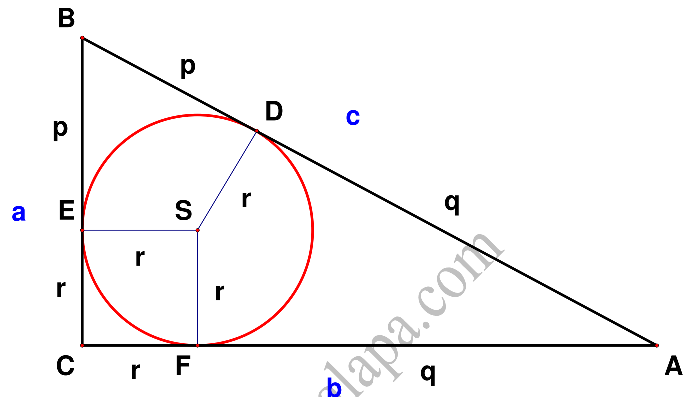


$$P = \frac{a \cdot b}{2}$$

Ploština trokuta kojemu su zadane duljine stranica i polumjer upisane kružnice iznosi:



$$P = s \cdot r \quad , \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$



Sa slike vidi se:

$$|BC| = a = |BE| + |EC| = p + r \quad , \quad |CA| = b = |CF| + |FA| = r + q$$

$$|AB| = c = |AD| + |DB| = q + p \quad , \quad |SD| = |SE| = |SF| = r$$

Ploština pravokutnog trokuta ABC može se izračunati na dva načina.

1.inačica

$$P = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow P = \frac{(p+r)\cdot(r+q)}{2} \Rightarrow P = \frac{p \cdot r + p \cdot q + r^2 + r \cdot q}{2} \Rightarrow P = \frac{p \cdot q + r \cdot p + r \cdot q + r^2}{2}.$$

2.inačica

$$P = s \cdot r \Rightarrow P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r \Rightarrow P = \frac{p+r+r+q+q+p}{2} \cdot r \Rightarrow P = \frac{2 \cdot p + 2 \cdot q + 2 \cdot r}{2} \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{2 \cdot (p+q+r)}{2} \cdot r \Rightarrow P = \frac{2 \cdot (p+q+r)}{2} \cdot r \Rightarrow P = (p+q+r) \cdot r.$$

Iz dobivenih formula za ploštinu trokuta slijedi:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{p \cdot q + r \cdot p + r \cdot q + r^2}{2} \\ P &= (p+q+r) \cdot r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} P &= \frac{p \cdot q + r \cdot (p+q+r)}{2} \\ P &= (p+q+r) \cdot r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{p \cdot q + P}{2} \Rightarrow P = \frac{p \cdot q + P}{2} \; / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot P = p \cdot q + P \Rightarrow 2 \cdot P - P = p \cdot q \Rightarrow P = p \cdot q.$$

Vježba 196

Zadan je pravokutan trokut A, B, C i upisana kružnica. Dokazati da je ploština pravokutnog trokuta jednaka $P = (p + q + r) \cdot r$, gdje su p i q duljine odsječaka na koje dodirna točka upisane kružnice dijeli hipotenuzu, a r je polumjer upisane kružnice.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 197 (Petra, gimnazija)

Odredi duljinu stranice a i kutove trokuta ΔABC ako je b = 7.5 cm, c = 6.2 cm te $\beta - \gamma = 17°$.

Rješenje 197

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} a : b = \sin\alpha : \sin\beta \\ a : c = \sin\alpha : \sin\gamma \\ b : c = \sin\beta : \sin\gamma \end{matrix}\right\}.$$

Podsjetimo se kako glasi kosinusov poučak (poučak o kosinusu).

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

$$\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} \quad , \quad \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\,x \quad , \quad tg\,x \cdot ctg\,x = 1 \;\Rightarrow\; ctg\,x = \frac{1}{tg\,x} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Sinus zbroja

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

Budući da je zadana razlika kutova β i γ, slijedi:

$$\beta - \gamma = 17^0 \;\Rightarrow\; \beta = 17^0 + \gamma.$$

Po poučku o sinusima je:

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma \;\Rightarrow\; b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta \;\Rightarrow\; b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta \;/\cdot \frac{1}{c \cdot \sin\gamma} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \;\Rightarrow\; \frac{b}{c} = \frac{\sin\left(17^0 + \gamma\right)}{\sin\gamma} \;\Rightarrow\; \frac{b}{c} = \frac{\sin 17^0 \cdot \cos\gamma + \cos 17^0 \cdot \sin\gamma}{\sin\gamma} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\sin 17^0\cdot\cos\gamma}{\sin\gamma}+\frac{\cos 17^0\cdot\sin\gamma}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{b}{c}=\frac{\sin 17^0\cdot\cos\gamma}{\sin\gamma}+\frac{\cos 17^0\cdot\sin\gamma}{\sin\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{c}=\sin 17^0\cdot ctg\,\gamma+\cos 17^0 \Rightarrow \frac{b}{c}-\cos 17^0=\sin 17^0\cdot ctg\,\gamma \Rightarrow \sin 17^0\cdot ctg\,\gamma=\frac{b}{c}-\cos 17^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 17^0\cdot ctg\,\gamma=\frac{b-c\cdot\cos 17^0}{c} \Rightarrow \sin 17^0\cdot ctg\,\gamma=\frac{b-c\cdot\cos 17^0}{c} \;/\cdot\frac{1}{\sin 17^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ctg\,\gamma=\frac{b-c\cdot\cos 17^0}{c\cdot\sin 17^0} \Rightarrow \frac{1}{tg\,\gamma}=\frac{b-c\cdot\cos 17^0}{c\cdot\sin 17^0} \Rightarrow tg\,\gamma=\frac{c\cdot\sin 17^0}{b-c\cdot\cos 17^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\gamma=\frac{6.2\cdot\sin 17^0}{7.5-6.2\cdot\cos 17^0} \Rightarrow \gamma=tg^{-1}\left(\frac{6.2\cdot\sin 17^0}{7.5-6.2\cdot\cos 17^0}\right) \Rightarrow \gamma=49^0 5'15''.$$

Računamo kut β.

$$\beta=17^0+\gamma \Rightarrow \beta=17^0+49^0 5'15'' \Rightarrow \beta=66^0 5'15''.$$

Računamo kut α.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0 \Rightarrow \alpha=180^0-(\beta+\gamma) \Rightarrow \alpha=180^0-\left(66^0 5'15''+49^0 5'15''\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=180^0-115^0 10'30'' \Rightarrow \alpha=179^0 59'60''-115^0 10'30'' \Rightarrow \alpha=64^0 49'30''.$$

Duljinu stranice a računamo po kosinusovom poučku ili po sinusovom poučku.

1.inačica (kosinusov poučak)

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow a^2=7.5^2+6.2^2-2\cdot 7.5\cdot 6.2\cdot\cos 64^0 49'30'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=56.25+38.44-93\cdot 0.42538 \Rightarrow a^2=55.12966 \Rightarrow a^2=55.12966 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{55.12966} \Rightarrow a=7.42\ cm.$$

2.inačica (sinusov poučak)

$$a:b=\sin\alpha:\sin\beta \Rightarrow a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha \Rightarrow a\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\alpha \;/\cdot\frac{1}{\sin\beta} \Rightarrow a=b\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=7.5\cdot\frac{\sin 64^0 49'30''}{\sin 66^0 5'15''} \Rightarrow a=7.5\cdot\frac{0.90501}{0.91417} \Rightarrow a=7.42\ cm.$$

3.inačica (sinusov poučak)

$$a:c=\sin\alpha:\sin\gamma \Rightarrow a\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\alpha \Rightarrow a\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\alpha \;/\cdot\frac{1}{\sin\gamma} \Rightarrow a=c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=6.2\cdot\frac{\sin 64^0 49'30''}{\sin 49^0 5'15''} \Rightarrow a=6.2\cdot\frac{0.90501}{0.75571} \Rightarrow a=7.42\ cm.$$

Vježba 197

Odredi duljinu stranice a trokuta ΔABC ako je b = 75 mm, c = 62 mm te β – γ = 17°.

Rezultat: 74.2 mm.

Zadatak 198 (Petra, gimnazija)

Zbroj duljina dviju stranica trokuta jednak je 17.8 cm, a nasuprot tim stranicama nalaze se kutovi od 99° i 53°. Izračunaj duljinu treće stranice trokuta.

Rješenje 198

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{0}.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} a : b = \sin\alpha : \sin\beta \\ a : c = \sin\alpha : \sin\gamma \\ b : c = \sin\beta : \sin\gamma \end{array}\right\}.$$

$$\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} \quad , \quad \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\, x \quad , \quad tg\, x \cdot ctg\, x = 1 \;\Rightarrow\; ctg\, x = \frac{1}{tg\, x} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Neka je

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 17.8 \\ \alpha = 99^{0} \\ \beta = 53^{0} \end{array}\right\}.$$

Računamo kut γ.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{0} \;\Rightarrow\; \gamma = 180^{0} - (\alpha + \beta) \;\Rightarrow\; \gamma = 180^{0} - \left(99^{0} + 53^{0}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \gamma = 180^{0} - 152^{0} \;\Rightarrow\; \gamma = 28^{0}.$$

Po poučku o sinusima je

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta \;\Rightarrow\; a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \;\Rightarrow\; a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \;/\cdot \frac{1}{\sin\beta} \;\Rightarrow\; a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 17.8 \\ a = b \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \;\Rightarrow\; b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + b = 17.8 \;\Rightarrow\; b \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + 1\right) = 17.8 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\beta} = 17.8 \;\Rightarrow\; b \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\beta} = 17.8 \;/\cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \;\Rightarrow\; b = 17.8 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=17.8\cdot\frac{\sin 53^0}{\sin 99^0+\sin 53^0} \Rightarrow b=17.8\cdot\frac{0.79864}{0.98769+0.79864} \Rightarrow b=7.96\ cm.$$

Računamo duljinu treće stranice c.

1.inačica

Po poučku o sinusima je

$$c:b=\sin\gamma:\sin\beta \Rightarrow c\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\gamma \Rightarrow c\cdot\sin\beta=b\cdot\sin\gamma\ /\cdot\frac{1}{\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=b\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \Rightarrow c=7.96\cdot\frac{\sin 28^0}{\sin 53^0} \Rightarrow c=7.96\cdot\frac{0.46947}{0.79864} \Rightarrow c=4.68\ cm.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a+b=17.8 \\ b=7.96 \end{array}\right\} \Rightarrow a+7.96=17.8 \Rightarrow a=17.8-7.96 \Rightarrow a=9.84.$$

Po poučku o sinusima je

$$c:a=\sin\gamma:\sin\alpha \Rightarrow c\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\gamma \Rightarrow c\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\gamma\ /\cdot\frac{1}{\sin\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=a\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow c=9.84\cdot\frac{\sin 28^0}{\sin 99^0} \Rightarrow c=9.84\cdot\frac{0.46947}{0.98769} \Rightarrow c=4.68\ cm.$$

Vježba 198

Zbroj duljina dviju stranica trokuta jednak je 178 mm, a nasuprot tim stranicama nalaze se kutovi od 99º i 53º. Izračunaj duljinu treće stranice trokuta.

Rezultat: 46.8 mm.

Zadatak 199 (Dubravka, srednja škola)

Izračunaj ploštinu pravokutnog trokuta čija je jedna kateta 2.8 cm i kut nasuprot te katete 43º 25'.

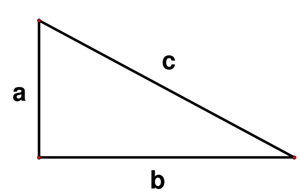
Rješenje 199

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Ploština pravokutnog trokuta iznosi:

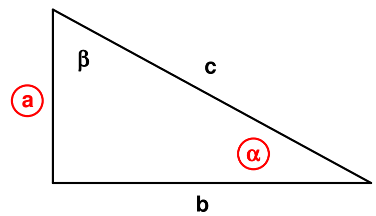


$$P=\frac{a\cdot b}{2}$$

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Neka je a = 2.8 cm i α = 43º 24'.



Računamo duljinu katete b.

$$tg\,\alpha=\frac{a}{b}\;\Rightarrow\;tg\,\alpha=\frac{a}{b}\;/\cdot\frac{b}{tg\,\alpha}\;\Rightarrow\;b=\frac{a}{tg\,\alpha}.$$

Ploština pravokutnog trokuta iznosi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\;\Rightarrow\;P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{tg\,\alpha}\;\Rightarrow\;P=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{tg\,\alpha}\;\Rightarrow\;P=\frac{a^2}{2\cdot tg\,\alpha}\;\Rightarrow\;P=\frac{(2.8\ cm)^2}{2\cdot tg\,43^0\,24'}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;P=\frac{7.84\ cm^2}{2\cdot 0.94620}\;\Rightarrow\;P=4.14\ cm^2.$$

Vježba 199

Izračunaj ploštinu pravokutnog trokuta čija je jedna kateta 28 mm i kut nasuprot te katete 43º 25'.

Rezultat: 414 mm^2.

Zadatak 200 (Dubravka, srednja škola)

Krak jednakokračnog trokuta trostruko je dulji od njegove osnovice. Koliki su kutovi trokuta?

Rješenje 200

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kraci trokuta. Uočimo da su kutovi koji leže na trećoj stranici jednaki zbog činjenice da se nasuprot jednakim stranicama nalaze jednaki kutovi.

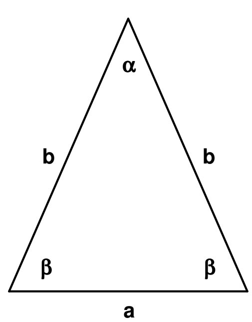
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

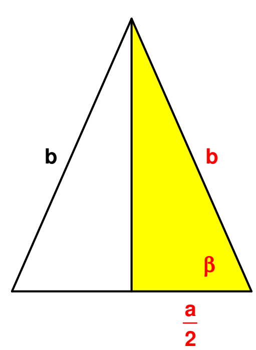
$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Zbroj kutova u jednakokračnom trokutu je:

$$\alpha+2\cdot\beta=180^0.$$

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.





Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$b = 3 \cdot a.$$

Uočimo na slici pravokutan trokut (žuto obojen). Tada je:

$$\cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{b} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{3\cdot a} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3\cdot a}{1}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3\cdot a}{1}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{1}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \beta = 80^{0}\,24'21''.$$

Računamo kut α.

$$\alpha + 2\cdot\beta = 180^{0} \Rightarrow \alpha = 180^{0} - 2\cdot\beta \Rightarrow \alpha = 180^{0} - 2\cdot 80^{0}\,24'21'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 180^{0} - 160^{0}\,48'42'' \Rightarrow \alpha = 179^{0}\,59'60'' - 160^{0}\,48'42'' \Rightarrow \alpha = 19^{0}\,11'18''.$$

Vježba 200

Krak jednakokračnog trokuta dvostruko je dulji od njegove osnovice. Koliki su kutovi trokuta?

Rezultat: 75º 31' 21" , 75º 31' 21" , 28º 57' 18".