Zadatak 201 (Željko, srednja škola)

Antena visoka 80 m nalazi se na krovu poslovne zgrade. Na nepoznatoj udaljenosti od podnožja zgrade vrh antene vidi se pod kutom od 26º, a vrh zgrade pod kutom od 16º. Koliko je visoka zgrada?

Rješenje 201

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

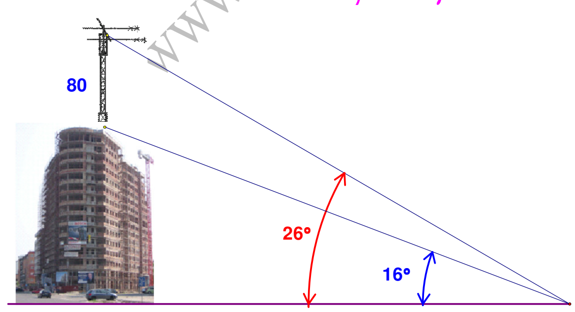
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{0}.$$

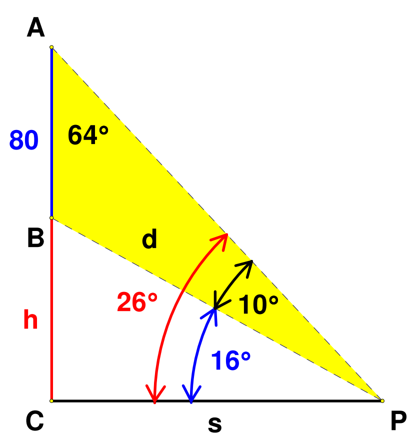
Pravokutan trokut ima jedan pravi kut (90º) i vrijedi:

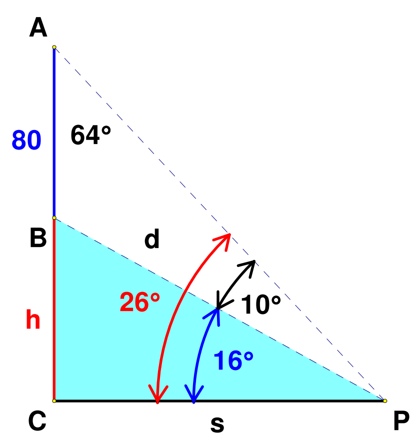
$$\gamma = 90^{0} \quad , \quad \alpha + \beta = 90^{0}.$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$







Sa slika vidi se:

$\angle CPA = 26^0$, $\angle CPB = 16^0$, $\angle BPA = 26^0 - 16^0 = 10^0$, $\angle PAC = 90^0 - 26^0 = 64^0$

$|AB| = 80$, $|PB| = d$, $|BC| = h$, $|AC| = |AB| + |BC| = 80 + h$, $|CP| = s$

1.inačica

Uočimo trokut ΔBPA. Pomoću sinusova poučka dobije se:

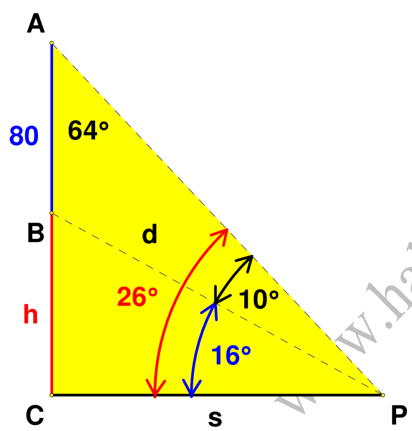
$$|PB| : |AB| = \sin 64^0 : \sin 10^0 \Rightarrow d : 80 = \sin 64^0 : \sin 10^0 \Rightarrow d \cdot \sin 10^0 = 80 \cdot \sin 64^0 \Rightarrow$$

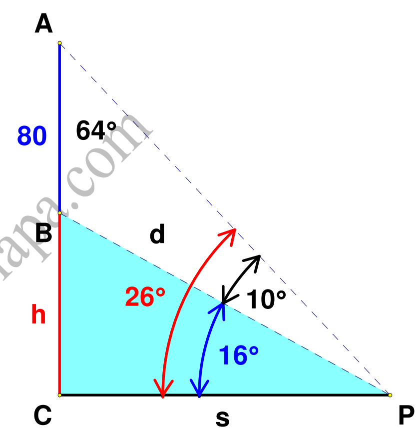
$$\Rightarrow d \cdot \sin 10^0 = 80 \cdot \sin 64^0 \; / \cdot \frac{1}{\sin 10^0} \Rightarrow d = \frac{80 \cdot \sin 64^0}{\sin 10^0}.$$

Uočimo pravokutan trokut Δ PBC. Pomoću funkcije sinus dobije se visina h poslovne zgrade.

$$\sin 16^0 = \frac{|BC|}{|PB|} \Rightarrow \sin 16^0 = \frac{h}{d} \Rightarrow \sin 16^0 = \frac{h}{d} \; / \cdot d \Rightarrow h = d \cdot \sin 16^0 \Rightarrow h = \frac{80 \cdot \sin 64^0}{\sin 10^0} \cdot \sin 16^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{80 \cdot \sin 64^0 \cdot \sin 16^0}{\sin 10^0} \Rightarrow h = \frac{80 \cdot 0.89879 \cdot 0.27564}{0.17365} \Rightarrow h \approx 114 \; m.$$





2.inačica

Uočimo pravokutan trokut ΔPAC. Pomoću funkcije tangens dobije se:

$$tg\,26^0 = \frac{|AC|}{|CP|} \Rightarrow tg\,26^0 = \frac{80+h}{s} \Rightarrow tg\,26^0 = \frac{80+h}{s} \; / \cdot \frac{s}{tg\,26^0} \Rightarrow s = \frac{80+h}{tg\,26^0}.$$

Uočimo pravokutan trokut ΔPBC. Pomoću funkcije tangens dobije se:

$$tg\,16^0 = \frac{|BC|}{|CP|} \Rightarrow tg\,16^0 = \frac{h}{s} \Rightarrow tg\,16^0 = \frac{h}{s} \; / \cdot \frac{s}{tg\,16^0} \Rightarrow s = \frac{h}{tg\,16^0}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se visina h poslovne zgrade.

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{h}{tg\,16^0} \\ s &= \frac{80+h}{tg\,26^0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{h}{tg\,16^0} = \frac{80+h}{tg\,26^0} \Rightarrow h \cdot tg\,26^0 = (80+h) \cdot tg\,16^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \cdot tg\,26^0 = 80 \cdot tg\,16^0 + h \cdot tg\,16^0 \Rightarrow h \cdot tg\,26^0 - h \cdot tg\,16^0 = 80 \cdot tg\,16^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \cdot \left(tg\,26^0 - tg\,16^0\right) = 80 \cdot tg\,16^0 \Rightarrow h \cdot \left(tg\,26^0 - tg\,16^0\right) = 80 \cdot tg\,16^0 \quad / \cdot \frac{1}{tg\,26^0 - tg\,16^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{80 \cdot tg\,16^0}{tg\,26^0 - tg\,16^0} \Rightarrow h = \frac{80 \cdot 0.28675}{0.48773 - 0.28675} \Rightarrow h \approx 114\ m.$$

Vježba 201

Antena visoka 40 m nalazi se na krovu poslovne zgrade. Na nepoznatoj udaljenosti od podnožja zgrade vrh antene vidi se pod kutom od 26º, a vrh zgrade pod kutom od 16º. Koliko je visoka zgrada?

Rezultat: 57 m.

Zadatak 202 (Lana, gimnazija)

Kut između ravnina β_1 i β_2 je 45º. Točka T pripada ravnini β_1, T ' je njezina ortogonalna projekcija na ravninu β_2. Ako je $\left|TT'\right| = 6 \cdot \sqrt{2},$ izračunaj udaljenost točke T od presječnice ravnina β_1 i β_2.

Rješenje 202

Ponovimo!

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

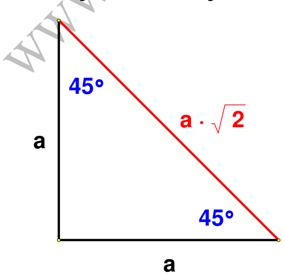
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

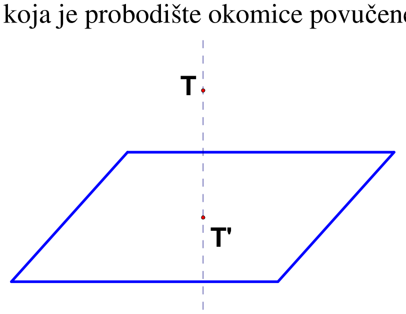
Pravokutan trokut ima jedan pravi kut (90º) i vrijedi:

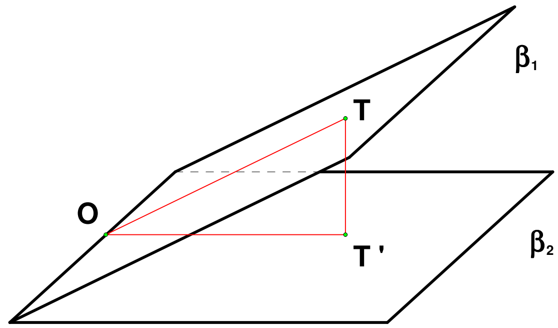
$$\gamma = 90^0 \quad , \quad \alpha + \beta = 90^0.$$

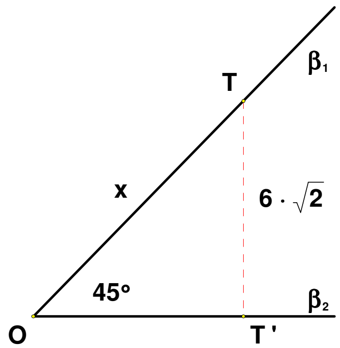
Pravokutan jednakokračan trokut ima katete jednake duljine, a za hipotenuzu vrijedi:

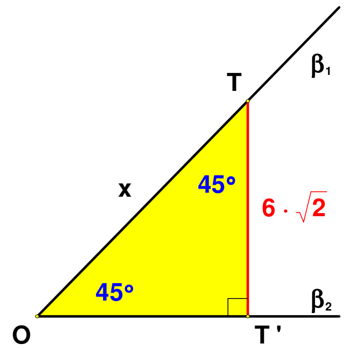


Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kod ortogonalne projekcije zrake projiciranja su okomite na ravninu crtanja. Svakoj točki prostora možemo pridružiti točku ravnine koja je probodište okomice povučene točkom na ravninu.









Sa slika vidi se:

$$\left|OT'\right| = \left|TT'\right| = 6\cdot\sqrt{2} \quad , \quad \angle TOT' = \angle OTT' = 45^{0} \quad , \quad \left|TO\right| = x$$

1.inačica

Uočimo pravokutan jednakokračan trokut ΔTOT '. Tada je duljina hipotenuze jednaka:

$$\left|TO\right| = \left|TT'\right|\cdot\sqrt{2} \Rightarrow x = 6\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow x = 6\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x = 6\cdot 2 \Rightarrow x = 12.$$

2.inačica

Uočimo pravokutan trokut ΔTOT '. Pomoću funkcije sinus dobije se tražena vrijednost.

$$\sin\angle TOT' = \frac{\left|TT'\right|}{\left|TO\right|} \Rightarrow \sin 45^{0} = \frac{6\cdot\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6\cdot\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6\cdot\sqrt{2}}{x} \;/\cdot\frac{2\cdot x}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6\cdot\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{6\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot 2}{\cancel{\sqrt{2}}} \Rightarrow x = 6\cdot 2 \Rightarrow x = 12.$$

Vježba 202

Kut između ravnina β_1 i β_2 je 45°. Točka T pripada ravnini β_1, T ' je njezina ortogonalna projekcija na ravninu β_2. Ako je $\left|TT'\right| = 6\cdot\sqrt{2}$, izračunaj udaljenost točke T od presječnice ravnina β_1 i β_2.

Rezultat: 57 m.

Zadatak 203 (Josipa, gimnazija)

Ploština trokuta iznosi 3/2, dva su vrha A(2, – 3) i B(3, – 2), dok težište leži na pravcu $3\cdot x - y - 8 = 0$. Odredi koordinate vrha C.

Rješenje 203

Ponovimo!

Ploština trokuta ΔABC kojemu su vrhovi točke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ jednaka je

$$P = \frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2 - y_3\right) + x_2\cdot\left(y_3 - y_1\right) + x_3\cdot\left(y_1 - y_2\right)\right|.$$

Za dani realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na sljedeći način:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ ako je } x \geq 0, \\ -x, \text{ ako je } x < 0. \end{cases}$$

Oznaka za apsolutnu vrijednost osigurava da ploština trokuta bude pozitivan broj.
Težište $T(x_T, y_T)$ trokuta ΔABC s vrhovima $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ima koordinate

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad , \quad y_T = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Iz formule za ploštinu trokuta dobiju se dvije linearne jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, -3) \\ B(x_2, y_2) = B(3, -2) \\ C(x_3, y_3) = C(x_3, y_3) \\ P = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \right| \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left| 2 \cdot (-2 - y_3) + 3 \cdot (y_3 + 3) + x_3 \cdot (-3 + 2) \right| \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left| 2 \cdot (-2 - y_3) + 3 \cdot (y_3 + 3) + x_3 \cdot (-1) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left| -4 - 2 \cdot y_3 + 3 \cdot y_3 + 9 - x_3 \right| \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left| -x_3 + y_3 + 5 \right| \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left| -x_3 + y_3 + 5 \right| \; / \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = \left| -x_3 + y_3 + 5 \right| \Rightarrow \left| -x_3 + y_3 + 5 \right| = 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x_3 + y_3 + 5 = -3 \\ -x_3 + y_3 + 5 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x_3 + y_3 = -3 - 5 \\ -x_3 + y_3 = 3 - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x_3 + y_3 = -8 \\ -x_3 + y_3 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x_3 + y_3 = -8 \; / \cdot (-1) \\ -x_3 + y_3 = -2 \; / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 - y_3 = 8 \text{ prva jednadžba} \\ x_3 - y_3 = 2 \text{ druga jednadžba} \end{array}\right\}.$$

Koordinate težišta T trokuta ΔABC glase:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, -3) \\ B(x_2, y_2) = B(3, -2) \\ C(x_3, y_3) = C(x_3, y_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[T\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right) \right] \Rightarrow T\left(\frac{2 + 3 + x_3}{3}, \frac{-3 - 2 + y_3}{3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\left(\frac{5 + x_3}{3}, \frac{-5 + y_3}{3} \right).$$

Budući da težište T leži na pravcu $3 \cdot x - y - 8 = 0$, uvrstit ćemo njegove koordinate u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} T(x, y) = T\left(\frac{5 + x_3}{3}, \frac{-5 + y_3}{3} \right) \\ 3 \cdot x - y - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot \frac{5 + x_3}{3} - \frac{-5 + y_3}{3} - 8 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{5 + x_3}{3} - \frac{-5 + y_3}{3} - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 + x_3 - \frac{-5 + y_3}{3} - 8 = 0 \Rightarrow 5 + x_3 - \frac{-5 + y_3}{3} - 8 = 0 \; / \cdot 3 \Rightarrow 15 + 3 \cdot x_3 - (-5 + y_3) - 24 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 + 3 \cdot x_3 + 5 - y_3 - 24 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x_3 - y_3 - 4 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x_3 - y_3 = 4.$$

Koordinate trećeg vrha C trokuta ΔABC dobijemo iz sustava linearnih jednadžbi.

1.slučaj

$$\left.\begin{array}{l} x_3 - y_3 = 8 \\ 3 \cdot x_3 - y_3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 - y_3 = 8 \;/ \cdot (-1) \\ 3 \cdot x_3 - y_3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x_3 + y_3 = -8 \\ 3 \cdot x_3 - y_3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_3 = -4 \Rightarrow 2 \cdot x_3 = -4 \;/ : 2 \Rightarrow x_3 = -2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = -2 \\ x_3 - y_3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 - y_3 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y_3 = 8 + 2 \Rightarrow -y_3 = 10 \Rightarrow -y_3 = 10 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow y_3 = -10 \Rightarrow C(x_3, y_3) = C(-2, -10).$$

2.slučaj

$$\left.\begin{array}{l} x_3 - y_3 = 2 \\ 3 \cdot x_3 - y_3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 - y_3 = 2 \;/ \cdot (-1) \\ 3 \cdot x_3 - y_3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x_3 + y_3 = -2 \\ 3 \cdot x_3 - y_3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_3 = 2 \Rightarrow 2 \cdot x_3 = 2 \;/ : 2 \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_3 - y_3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - y_3 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y_3 = 2 - 1 \Rightarrow -y_3 = 1 \Rightarrow -y_3 = 1 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow y_3 = -1 \Rightarrow C_1(x_3, y_3) = C_1(1, -1).$$

Postoje dva rješenja:

$$\left.\begin{array}{l} C(x_3, y_3) = C(-2, -10) \\ C_1(x_3, y_3) = C_1(1, -1) \end{array}\right\}.$$

Vježba 203

Ploština trokuta iznosi 1.5, dva su vrha A(2, – 3) i B(3, – 2), dok težište leži na pravcu y = 3 · x – 8. Odredi koordinate vrha C.

Rezultat: $C(x_3, y_3) = C(-2, -10)$, $C_1(x_3, y_3) = C_1(1, -1)$.

Zadatak 204 (Emanuel, gimnazija)

U trokutu A(– 1, – 1), B(6, – 2), C(3, 4) napiši jednadžbe visina. Koje su koordinate ortocentra?

Rješenje 204

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ortocentar trokuta je sjecište pravaca na kojima leže visine trokuta ΔABC.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet okomitosti

Pravci

$$y = k_1 \cdot x + l_1 \quad , \quad y = k_2 \cdot x + l_2$$

su okomiti ako i samo ako su im koeficijenti smjera suprotni i recipročni brojevi, tj. ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

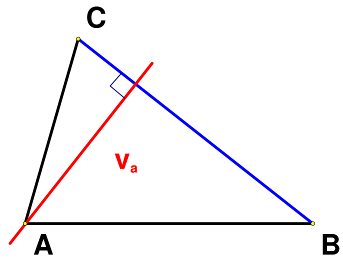
$$y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

- Tražimo jednadžbu visine v_a konstruirane iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$.



Najprije odredimo koeficijent smjera pravca BC na kojem leži stranica $\overline{BC}$ trokuta ΔABC.

$$\left.\begin{aligned} &B(x_1, y_1)=B(6,-2)\\ &C(x_2, y_2)=C(3,4)\\ &k_{BC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\end{aligned}\right\} \Rightarrow k_{BC}=\frac{4-(-2)}{3-6} \Rightarrow k_{BC}=\frac{4+2}{-3} \Rightarrow k_{BC}=\frac{6}{-3} \Rightarrow k_{BC}=-2.$$

Budući da je pravac na kojem leži visina v_a okomit na pravac BC, njegov koeficijent smjera iznosi:

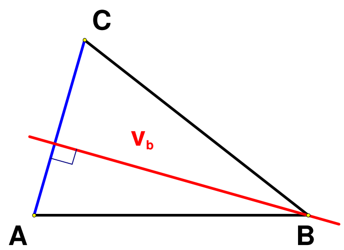
$$k=-\frac{1}{k_{BC}} \Rightarrow k=-\frac{1}{-2} \Rightarrow k=\frac{1}{2}.$$

Jednadžba pravca na kojem leži visina v_a glasi:

$$\left.\begin{aligned} &A(x_1, y_1)=A(-1,-1)\\ &k=\frac{1}{2}\\ &y-y_1=k\cdot(x-x_1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow y-(-1)=\frac{1}{2}\cdot(x-(-1)) \Rightarrow y+1=\frac{1}{2}\cdot(x+1) \Rightarrow y+1=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}-1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}.$$

- Tražimo jednadžbu visine v_b konstruirane iz vrha B na stranicu $\overline{AC}$.



Najprije odredimo koeficijent smjera pravca AC na kojem leži stranica $\overline{AC}$ trokuta ΔABC.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right)=A\left(-1,\ -1\right) \\ C\left(x_2,\ y_2\right)=C\left(3,\ 4\right) \\ k_{AC}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_{AC}=\frac{4-\left(-1\right)}{3-\left(-1\right)} \Rightarrow k_{AC}=\frac{4+1}{3+1} \Rightarrow k_{AC}=\frac{5}{4}.$$

Budući da je pravac na kojem leži visina v_b okomit na pravac AC, njegov koeficijent smjera iznosi:

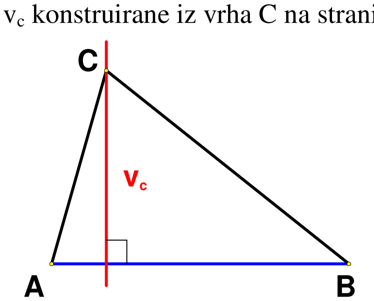
$$k=-\frac{1}{k_{AC}} \Rightarrow k=-\frac{1}{\frac{5}{4}} \Rightarrow k=-\frac{4}{5}.$$

Jednadžba pravca na kojem leži visina v_b glasi:

$$\left.\begin{array}{l} B\left(x_1,\ y_1\right)=B\left(6,\ -2\right) \\ k=-\dfrac{4}{5} \\ y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\left(-2\right)=-\frac{4}{5}\cdot\left(x-6\right) \Rightarrow y+2=-\frac{4}{5}\cdot\left(x-6\right) \Rightarrow y+2=-\frac{4}{5}\cdot x+\frac{24}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\frac{4}{5}\cdot x+\frac{24}{5}-2 \Rightarrow y=-\frac{4}{5}\cdot x+\frac{24}{5}-\frac{2}{1} \Rightarrow y=-\frac{4}{5}\cdot x+\frac{24-10}{5} \Rightarrow y=-\frac{4}{5}\cdot x+\frac{14}{5}.$$

- Tražimo jednadžbu visine v_c konstruirane iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$.



Najprije odredimo koeficijent smjera pravca AB na kojem leži stranica $\overline{AB}$ trokuta ΔABC.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right)=A\left(-1,\ -1\right) \\ B\left(x_2,\ y_2\right)=B\left(6,\ -2\right) \\ k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_{AB}=\frac{-2-\left(-1\right)}{6-\left(-1\right)} \Rightarrow k_{AB}=\frac{-2+1}{6+1} \Rightarrow k_{AB}=\frac{-1}{7} \Rightarrow k_{AB}=-\frac{1}{7}.$$

Budući da je pravac na kojem leži visina v_c okomit na pravac AB, njegov koeficijent smjera iznosi:

$$k=-\frac{1}{k_{AB}}\ \Rightarrow\ k=-\frac{1}{-\frac{1}{7}}\ \Rightarrow\ k=7.$$

Jednadžba pravca na kojem leži visina v_c glasi:

$$\left.\begin{array}{l} C(x_1,\ y_1)=C(3,\ 4) \\ k=7 \\ y-y_1=k\cdot(x-x_1) \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ y-4=7\cdot(x-3)\ \Rightarrow\ y-4=7\cdot x-21\ \Rightarrow\ y=7\cdot x-21+4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=7\cdot x-17.$$

Računamo koordinate ortocentra trokuta ΔABC

Budući da je ortocentar trokuta točka u kojoj se sijeku sve tri visine trokuta, njegove koordinate dobiju se kao rješenje sustava jednadžbi:

$$\left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{4}{5}\cdot x+\frac{14}{5} \\ y=7\cdot x-17. \end{array}\right.$$

Dovoljno je riješiti sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{4}{5}\cdot x+\frac{14}{5} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}=-\frac{4}{5}\cdot x+\frac{14}{5}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}=-\frac{4}{5}\cdot x+\frac{14}{5}\ /\cdot 10\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5\cdot x-5=-8\cdot x+28\ \Rightarrow\ 5\cdot x+8\cdot x=28+5\ \Rightarrow\ 13\cdot x=33\ \Rightarrow\ 13\cdot x=33\ /:13\ \Rightarrow\ x=\frac{33}{13}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x=\frac{33}{13} \\ y=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}\cdot\frac{33}{13}-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ y=\frac{33}{26}-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ y=\frac{33-13}{26}\ \Rightarrow\ y=\frac{20}{26}\ \Rightarrow\ y=\frac{20}{26}\ \Rightarrow\ y=\frac{10}{13}.$$

Koordinate ortocentra su:

$$H(x,\ y)=H\left(\frac{33}{13},\ \frac{10}{13}\right).$$

Provjerimo da točka H pripada trećem pravcu y = 7 · x – 17 tako što ćemo koordinate točke uvrstiti u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} H(x,\ y)=H\left(\frac{33}{13},\ \frac{10}{13}\right) \\ y=7\cdot x-17 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \frac{10}{13}=7\cdot\frac{33}{13}-17\ \Rightarrow\ \frac{10}{13}=\frac{231}{13}-\frac{17}{1}\ \Rightarrow\ \frac{10}{13}=\frac{231-221}{13}\ \Rightarrow\ \frac{10}{13}=\frac{10}{13}.$$

Dobili smo identitet što znači da točka H pripada i pravcu y = 7 · x – 17. Dakle, koordinate ortocentra H trokuta ΔABC su:

$$H(x,\ y)=H\left(\frac{33}{13},\ \frac{10}{13}\right).$$

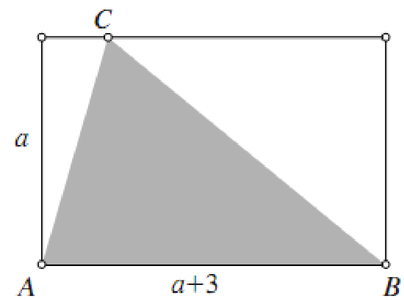
Vježba 204

U trokutu A(0, 0), B(3, 0), C(0, – 4) odredi koordinate ortocentra?

Rezultat: H(0, 0).

Zadatak 205 (Mirna, srednja škola)

Opseg pravokutnika sa slike iznosi 54 cm. Koliko iznosi površina trokuta ΔABC?



$$A.\ 45\ cm^2 \qquad B.\ 90\ cm^2 \qquad C.\ 135\ cm^2 \qquad D.\ 180\ cm^2$$

Rješenje 205

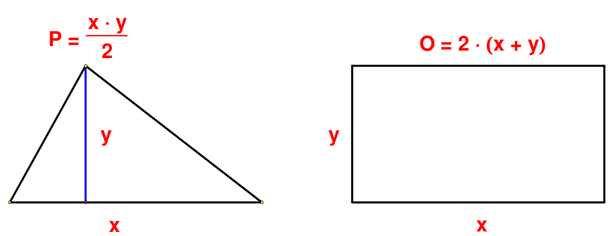
Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}\ , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2}\ , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan kut pravi. Opseg pravokutnika izračunava se po formuli

$$O = 2 \cdot a + 2 \cdot b \ \Rightarrow\ O = 2 \cdot (a + b).$$



Iz opsega pravokutnika dobiju se duljine njegovih stranica.

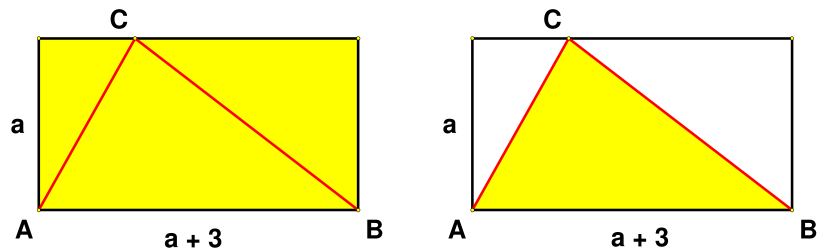
$$\left.\begin{array}{l} O = 54 \\ x = a + 3 \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left[O = 2 \cdot (x + y)\right] \Rightarrow O = 2 \cdot (a + 3 + a) \Rightarrow O = 2 \cdot (2 \cdot a + 3) \Rightarrow 2 \cdot (2 \cdot a + 3) = O \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (2 \cdot a + 3) = 54 \Rightarrow 2 \cdot (2 \cdot a + 3) = 54\ /:2 \Rightarrow 2 \cdot a + 3 = 27 \Rightarrow 2 \cdot a = 27 - 3 \Rightarrow 2 \cdot a = 24 \Rightarrow$$

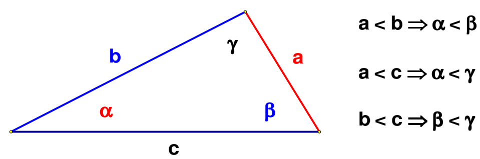
$$\Rightarrow 2 \cdot a = 24\ /:2 \Rightarrow a = 12.$$

Duljine stranica pravokutnika su:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + 3 \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 12 + 3 \\ y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 15 \\ y = 12 \end{array}\right\}.$$



Sa slike vidi se da je duljina stranice trokuta ΔABC jednaka x = 15, a duljina visine koja odgovara toj stranici y = 12. Ploština trokuta ΔABC je:



$$P=\frac{x\cdot y}{2}\;\Rightarrow\;P=\frac{15\cdot 12}{2}\;\Rightarrow\;P=\frac{15\cdot 12}{2}\;\Rightarrow\;P=15\cdot 6\;\Rightarrow\;P=90.$$

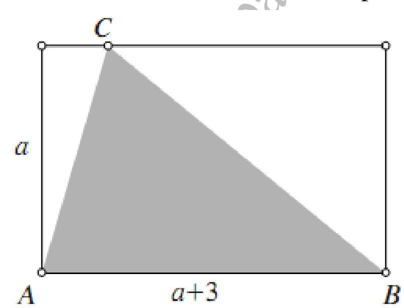
Ploština trokuta ΔABC je

$$P = 90\text{ cm}^2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 205

Opseg pravokutnika sa slike iznosi 46 cm. Koliko iznosi površina trokuta ΔABC?



$A.\ 45\ cm^2$ $\quad B.\ 65\ cm^2$ $\quad C.\ 75\ cm^2$ $\quad D.\ 60\ cm^2$

Rezultat: B.

Zadatak 206 (Dado, gimnazija)

Mjere dvaju kutova trokuta su 36° i 75°. Duljina najkraće stranice trokuta je 10 cm. Kolika je duljina najduže stranice toga trokuta?

$A.\ 13.1\ cm$ $\quad B.\ 14.2\ cm$ $\quad C.\ 15.3\ cm$ $\quad D.\ 16.4\ cm$

Rješenje 206

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Odredimo mjeru trećeg kuta trokuta.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=36^{0}\ ,\ \beta=75^{0}\\ \alpha+\beta+\gamma=180^{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=36^{0}\ ,\ \beta=75^{0}\\ \gamma=180^{0}-(\alpha+\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow\ \gamma=180^{0}-\left(36^{0}+75^{0}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \gamma=180^{0}-111^{0}\ \Rightarrow\ \gamma=69^{0}.$$

Nasuprot najmanjeg kuta trokuta $\alpha = 36°$ leži najkraća stranica a = 10 cm, a nasuprot najvećeg kuta $\beta = 75°$ leži najduža stranica b. Duljinu stranice b dobijemo pomoću sinusova poučka.

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}\ \Rightarrow\ \frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}\ /\cdot\sin\beta\ \Rightarrow\ b=a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\ \Rightarrow\ b=10\ cm\cdot\frac{\sin 75^{0}}{\sin 36^{0}}\ \Rightarrow\ b=16.4\ cm.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 206

Mjere dvaju kutova trokuta su 36º i 75º. Duljina najkraće stranice trokuta je 20 cm. Kolika je duljina najduže stranice toga trokuta?

A. 31.1 *cm* *B.* 32.2 *cm* *C.* 33.8 *cm* *D.* 32.9 *cm*

Rezultat: D.

Zadatak 207 (Teo, gimnazija)

Dva vrha trokuta ABC su A(– 1, – 1) i B(4, 5), a vrh C leži na pravcu $y = 5 \cdot x - 15$. Ako je ploština trokuta ABC jednaka $\frac{19}{2}$, odredi vrh C.

Rješenje 207

Ponovimo!
Površina trokuta ABC zadanog vrhovima $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ računa se po formuli:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2-y_3\right)+x_2\cdot\left(y_3-y_1\right)+x_3\cdot\left(y_1-y_2\right)\right|.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Budući da točka C leži na pravcu $y = 5 \cdot x - 15$, njezine koordinate su $C(x, 5 \cdot x - 15)$. Iz formule za ploštinu trokuta izračunaju se koordinate točke C.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(-1,\ -1) \\ B(x_2,\ y_2)=B(4,\ 5) \\ C(x_3,\ y_3)=C(x,\ 5\cdot x-15) \\ P_{ABC}=\frac{19}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)\right|\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{19}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left|-1\cdot(5-5\cdot x+15)+4\cdot(5\cdot x-15+1)+x\cdot(-1-5)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{19}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left|-1\cdot(20-5\cdot x)+4\cdot(5\cdot x-14)+x\cdot(-6)\right| \Rightarrow \frac{19}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left|-20+5\cdot x+20\cdot x-56-6\cdot x\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{19}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left|19\cdot x-76\right| \Rightarrow \frac{19}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left|19\cdot x-76\right|\ /\cdot 2 \Rightarrow 19=\left|19\cdot x-76\right| \Rightarrow \left|19\cdot x-76\right|=19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 19\cdot x-76=19 \\ 19\cdot x-76=-19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 19\cdot x=19+76 \\ 19\cdot x=-19+76 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 19\cdot x=95 \\ 19\cdot x=57 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 19\cdot x=95\ /:19 \\ 19\cdot x=57\ /:19 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=3 \end{array}\right\}.$$

Sada računamo ordinatu točke C.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow [\ y=5\cdot x-15\ ] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=5\cdot 5-15 \\ y_2=5\cdot 3-15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=25-15 \\ y_2=15-15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=10 \\ y_2=0 \end{array}\right\}.$$

Zadatak ima dva rješenja. Postoje dva vrha.

$$\left.\begin{array}{l} C_1(x_1,\ y_1)=C_1(5,\ 10) \\ C_2(x_2,\ y_2)=C_2(3,\ 0) \end{array}\right\}.$$

Vježba 207

Dva vrha trokuta ABC su A(– 1, – 1) i B(4, 5), a vrh C leži na pravcu 5 · x – y – 15 = 0. Ako je ploština trokuta ABC jednaka 9.5, odredi vrh C.

Rezultat: $C_1(5, 10)$, $C_2(3, 0)$.

Zadatak 208 (Barbara, opća gimnazija)

Dva vrha pravokutnog trokuta su A(– 1, – 3) i B(9,7), a treći vrh C pravog kuta pripada simetrali 2. i 4. kvadranta. Odredi koordinate vrha C.

Rješenje 208

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (-a-b)^2=(a+b)^2.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Pitagorin poučak

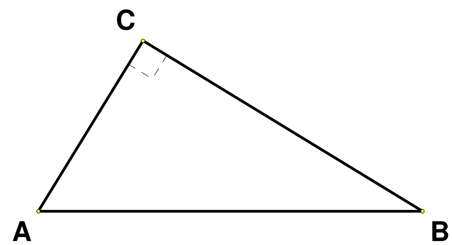
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Udaljenost točaka $A(x_A,\ y_A)$ i $B(x_B,\ y_B)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Simetrala II. i IV. kvadranta je pravac čija jednadžba glasi

$$y=-x.$$



Budući da točka C leži na pravcu (simetrali) y = – x, njezine koordinate su C(x, – x).
Računamo duljine stranica trokuta ABC.

- $$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1) = A(-1,\ -3) \\ B(x_2,\ y_2) = B(9,\ 7) \\ |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(9-(-1))^2 + (7-(-3))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(9+1)^2 + (7+3)^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{10^2 + 10^2} \Rightarrow |AB| = \sqrt{100+100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{200}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} B(x_1,\ y_1) = B(9,\ 7) \\ C(x_2,\ y_2) = C(x,\ -x) \\ |BC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |BC| = \sqrt{(x-9)^2 + (-x-7)^2}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} C(x_1,\ y_1) = C(x,\ -x) \\ A(x_2,\ y_2) = A(-1,\ -3) \\ |CA| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |CA| = \sqrt{(-1-x)^2 + (-3-(-x))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |CA| = \sqrt{(-1-x)^2 + (-3+x)^2}.$$

Trokut ABC je pravokutan pa vrijedi Pitagorin poučak:

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 \Rightarrow \left(\sqrt{200}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-9)^2 + (-x-7)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(-1-x)^2 + (-3+x)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 = (x-9)^2 + (-x-7)^2 + (-1-x)^2 + (-3+x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 = (x-9)^2 + (x+7)^2 + (1+x)^2 + (x-3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 = x^2 - 18 \cdot x + 81 + x^2 + 14 \cdot x + 49 + 1 + 2 \cdot x + x^2 + x^2 - 6 \cdot x + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 = 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 140 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 140 = 200 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 140 - 200 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 60 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 60 = 0 \ /:4 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-2\cdot x-15=0 \\ a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-15 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm 8}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2+8}{2} \\ x_2=\dfrac{2-8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{10}{2} \\ x_2=-\dfrac{6}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{array}\right\}.$$

Sada računamo ordinatu točke C.

$$\left.\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ y=-x\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=-5 \\ y_2=-(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=-5 \\ y_2=3 \end{array}\right\}.$$

Zadatak ima dva rješenja. Postoje dva vrha C.

$$\left.\begin{array}{l} C_1\left(x_1,\ y_1\right)=C_1(5,-5) \\ C_2\left(x_2,\ y_2\right)=C_2(-3,\ 3) \end{array}\right\}.$$

Vježba 208

Dokaži da je trokut ΔABC pravokutan: A(2, 2), B(– 1, 6), C(– 5, 3).

Rezultat: Tvrdnja je točna.

Zadatak 209 (Leonard, gimnazija)

Odredite središte kružnice upisane trokutu ΔABC ako je A(4, 0), B(0, 3), C(0, 0).

Rješenje 209

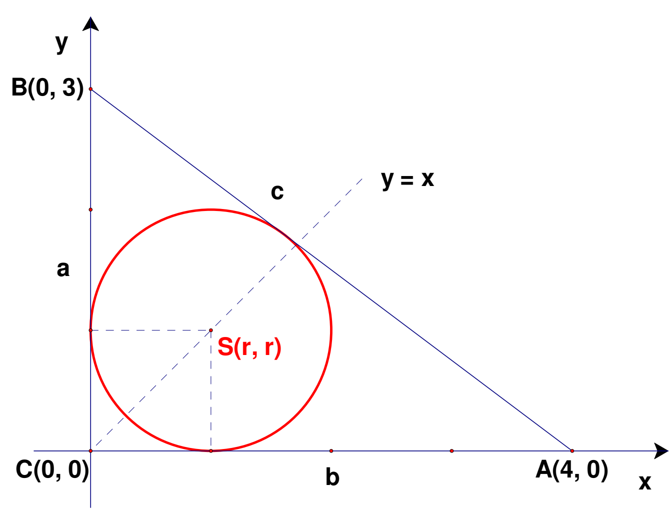
Ponovimo!

Ako je zadan pravokutni trokut duljina kateta a i b i hipotenuze c, tada je polumjer r upisane kružnice dan formulom

$$r=\frac{a+b-c}{2}.$$

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.



Sa slike vidi se da je trokut ΔABC pravokutan. Duljine kateta su:

$$a = \left| CB \right| = 3 \quad , \quad b = \left| CA \right| = 4.$$

Duljina hipotenuze dobije se pomoću Pitagorina poučka.

$$\left| AB \right|^2 = \left| CB \right|^2 + \left| CA \right|^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 25 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow c = \sqrt{25} \Rightarrow c = 5.$$

Polumjer upisane kružnice pravokutnom trokutu iznosi:

$$r = \frac{a+b-c}{2} \Rightarrow r = \frac{3+4-5}{2} \Rightarrow r = \frac{2}{2} \Rightarrow r = 1.$$

Budući da se kružnica nalazi u prvom kvadrantu i dira obje koordinatne osi, njezino se središte nalazi na pravcu y = x (simetrala prvog i trećeg kvadranta). Tada je

p = q

pa je polumjer upravo jednak

r = p = q.

Dakle, središte kružnice ima koordinate

$$\left. \begin{array}{l} S(r, r) \\ r = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow S(1, 1).$$

Vježba 209

Odredite središte kružnice upisane trokutu ΔABC ako je A(8, 0), B(0, 6), C(0, 0).

Rezultat: S(2, 2).

Zadatak 210 (Lidija, gimnazija)

Trokut ima stranice duljina 10, 11 i 19. Ako se sve stranice povećaju za jednak iznos, onda one čine pravokutni trokut. To povećanje iznosi:

$$A.\ 8 \qquad B.\ 4 \qquad C.\ 10 \qquad D.\ 11$$

Rješenje 210

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Neka je x iznos za koji su povećane stranice. Novi trokut ima stranice duljina:

10 + x , 11 + x , 19 + x.

Budući da je trokut pravokutan, uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$(19+x)^2 = (10+x)^2 + (11+x)^2 \Rightarrow 361 + 38 \cdot x + x^2 = 100 + 20 \cdot x + x^2 + 121 + 22 \cdot x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 361 + 38 \cdot x + x^2 = 100 + 20 \cdot x + x^2 + 121 + 22 \cdot x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 361 + 38 \cdot x = 100 + 20 \cdot x + 121 + 22 \cdot x + x^2 \Rightarrow 361 + 38 \cdot x - 100 - 20 \cdot x - 121 - 22 \cdot x - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 - 4 \cdot x + 140 = 0 \Rightarrow -x^2 - 4 \cdot x + 140 = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow x^2 + 4 \cdot x - 140 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+4\cdot x-140=0 \\ a=1\ ,\ b=4\ ,\ c=-140 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=4\ ,\ c=-140 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-140)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+560}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{576}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm 24}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{-4+24}{2} \\ x_2=\dfrac{-4-24}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{20}{2} \\ x_2=-\dfrac{28}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=10 \\ x_2=-14 \text{ nema smisla} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=10.$$

Odgovor je pod C,

Vježba 210

Trokut ima stranice duljina 3, 5 i 7. Ako se sve stranice povećaju za jednak iznos, onda one čine pravokutni trokut. To povećanje iznosi:

A. 3 *B.* 4 *C.* 2 *D.* 5

Rezultat: A.

Zadatak 211 (Ljerka, strukovna škola)

Točke A(3, 4), B(2, – 1), C(– 3, y) leže na istom pravcu ako je y jednako:

A. 10 *B.* −10 *C.* −20 *D.* −26

Rješenje 211

Ponovimo!

Ploština trokuta kojemu su vrhovi točke A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) dana je formulama:

- $P=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)\right|$
- $P=\frac{1}{2}\cdot\left|y_1\cdot(x_2-x_3)+y_2\cdot(x_3-x_1)+y_3\cdot(x_1-x_2)\right|.$

Ploština se ne mijenja ako x i y osi zamijene mjesta.

Ako tri točke A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) pripadaju jednom pravcu, tj. ako su kolinearne vrijedi uvjet kolinearnosti:

- $x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)=0$
- $y_1\cdot(x_2-x_3)+y_2\cdot(x_3-x_1)+y_3\cdot(x_1-x_2)=0.$

Računamo ordinatu y točke C.

1.inačica

$$\left.\begin{matrix} A(x_1,\ y_1)=A(3,\ 4) \\ B(x_2,\ y_2)=B(2,\ -1) \\ C(x_3,\ y_3)=C(-3,\ y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)=0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot(-1-y)+2\cdot(y-4)-3\cdot(4-(-1))=0 \Rightarrow 3\cdot(-1-y)+2\cdot(y-4)-3\cdot(4+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot(-1-y)+2\cdot(y-4)-3\cdot 5=0 \Rightarrow -3-3\cdot y+2\cdot y-8-15=0 \Rightarrow -3\cdot y+2\cdot y=3+8+15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y=26 \Rightarrow -y=26\ /\cdot(-1) \Rightarrow y=-26.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$\left.\begin{aligned} A\left(x_1,\ y_1\right) &= A(3,\ 4) \\ B\left(x_2,\ y_2\right) &= B(2,\ -1) \\ C\left(x_3,\ y_3\right) &= C(-3,\ y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[y_1 \cdot \left(x_2 - x_3\right) + y_2 \cdot \left(x_3 - x_1\right) + y_3 \cdot \left(x_1 - x_2\right) = 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4 \cdot (2 - (-3)) - 1 \cdot (-3 - 3) + y \cdot (3 - 2) = 0\ \Rightarrow\ 4 \cdot (2 + 3) - 1 \cdot (-3 - 3) + y \cdot (3 - 2) = 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4 \cdot 5 - 1 \cdot (-6) + y \cdot 1 = 0\ \Rightarrow\ 20 + 6 + y = 0\ \Rightarrow\ y = -20 - 6\ \Rightarrow\ y = -26.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 211

Točke A(x, 4), B(2, – 1), C(– 3, – 26) leže na istom pravcu ako je x jednako:

$A.\ 7 \qquad B.\ -10 \qquad C.\ 3 \qquad D.\ 5$

Rezultat: C.

Zadatak 212 (Kiki, strukovna škola)

Vrhovi trokuta su točke A(– 2, 1), B(– 1, – 1), C(2, 1). Jednadžba pravca na kojem leži visina spuštena iz vrha A glasi:

$A.\ 3 \cdot x + 2 \cdot y + 4 = 0 \qquad B.\ 3 \cdot x - 2 \cdot y + 4 = 0 \qquad C.\ 3 \cdot x - 2 \cdot y - 4 = 0 \qquad D.\ 2 \cdot x + 3 \cdot y - 4 = 0$

Rješenje 212

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot b = a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Pravac točkama A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) , $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet okomitosti

Pravci

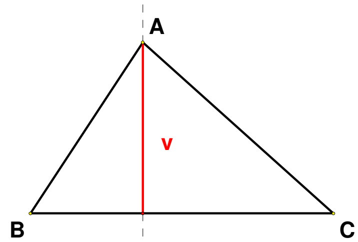
$$y = k_1 \cdot x + l_1 \quad , \quad y = k_2 \cdot x + l_2$$

su okomiti ako i samo ako su im koeficijenti smjera suprotni i recipročni brojevi, tj. ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1\ \Rightarrow\ k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Jednadžba pravca točkom T(x_1, y_1) kojemu je zadan koeficijent smjera k:

$$y - y_1 = k \cdot \left(x - x_1\right).$$



Budući da je visina trokuta △ABC iz vrha A okomita na pravac BC, najprije odredimo koeficijent smjera pravca BC.

$$\left.\begin{array}{l} B\left(x_1,\ y_1\right) = B\left(-1,\ -1\right) \\ C\left(x_2,\ y_2\right) = B\left(2,\ 1\right) \\ k_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = \frac{1 - \left(-1\right)}{2 - \left(-1\right)} \Rightarrow k_1 = \frac{1+1}{2+1} \Rightarrow k_1 = \frac{2}{3}.$$

Pravac na kojem leži visina spuštena iz vrha A okomit je na pravac BC pa njegov koeficijent smjera iznosi:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{\frac{2}{3}} \Rightarrow k_2 = -\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}.$$

Jednadžba traženog pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right) = A\left(-2,\ 1\right) \\ k_2 = -\dfrac{3}{2} \\ y - y_1 = k_2 \cdot \left(x - x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2} \cdot \left(x - \left(-2\right)\right) \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2} \cdot \left(x + 2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2} \cdot x - 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x - 3 + 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x - 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x - 2 \ / \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot y = -3 \cdot x - 4 \Rightarrow 3 \cdot x + 2 \cdot y + 4 = 0.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 212

Vrhovi trokuta su točke A(5, 2), B(– 1, 1), C(0, 3). Jednadžba pravca na kojem leži visina spuštena iz vrha A glasi:

$A.\ x - 4 \cdot y + 3 = 0$ $\quad B.\ x + 4 \cdot y + 3 = 0$ $\quad C.\ x - 4 \cdot y - 3 = 0$ $\quad D.\ 4 \cdot x + y + 3 = 0$

Rezultat: A.

Zadatak 212 (Nenad, gimnazija)

Za duljine kateta pravokutnog trokuta vrijedi $a^2 - b^2 = a \cdot b.$ Jedan šiljasti kut toga trokuta iznosi:

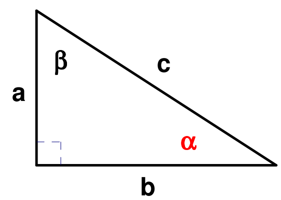
$A.\ 45^0 15'5''$ $\quad B.\ 49^0 33'27''$ $\quad C.\ 54^0 23'34''$ $\quad D.\ 58^0 16'57''$

Rješenje 212

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Kotangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine katete nasuprot tog kuta.

$$tg\ x \cdot ctg\ x = 1 \Rightarrow ctg\ x = \frac{1}{tg\ x}.$$



$$tg\ \alpha = \frac{a}{b}$$

$$ctg\ \alpha = \frac{b}{a}$$

Transformiramo zadanu jednakost.

$$a^2 - b^2 = a \cdot b \Rightarrow a^2 - b^2 = a \cdot b \ / \cdot \frac{1}{a \cdot b} \Rightarrow \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 1.$$

Iz definicija tangensa i kotangensa na pravokutnom trokutu dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 1 \\ tg\ \alpha = \frac{a}{b} \ , \ ctg\ \alpha = \frac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow tg\ \alpha - ctg\ \alpha = 1 \Rightarrow tg\ \alpha - \frac{1}{tg\ \alpha} = 1.$$

Uvodimo zamjenu (supstituciju)

$$t = tg\ \alpha$$

pa jednadžba glasi

$$t - \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow t - \frac{1}{t} = 1 \ / \cdot t \Rightarrow t^2 - 1 = t \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2 - t - 1 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = -1 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se supstituciji.

- $$\left.\begin{array}{l} t = tg\ \alpha \\ t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 58^0 16'57''.$$

- $$\left.\begin{array}{l} t = tg\ \alpha \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \alpha = 148^0 16'57'' \ \text{nema smisla}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 212

Za duljine kateta pravokutnog trokuta vrijedi $a^2 - b^2 = a \cdot b.$ Jedan šiljasti kut toga trokuta iznosi:

$$A.\ 31^0 43'3'' \qquad B.\ 49^0 33'27'' \qquad C.\ 34^0 23'17'' \qquad D.\ 28^0 26'33''$$

Rezultat: A.

Zadatak 213 (Nina, gimnazija)

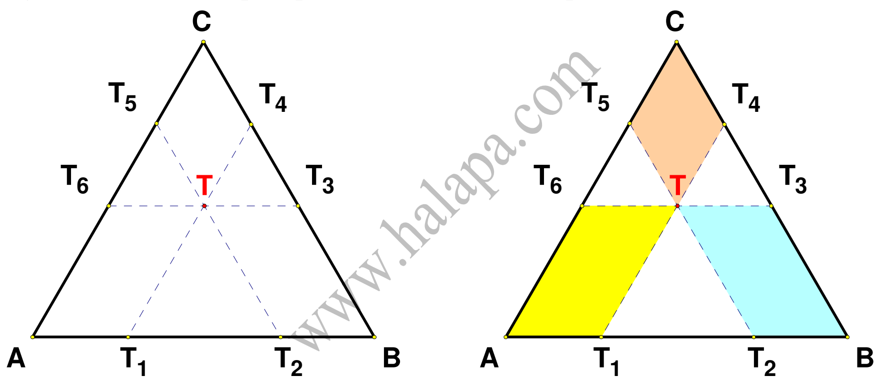
Točkom T u nutrini jednakostraničnog trokuta $\triangle$ABC duljine stranice a povučene su paralele sa stranicama trokuta. Zbroj duljina tih paralela unutar trokuta jednak je:

$$A.\ a \qquad B.\ 3 \cdot a \qquad C.\ 2 \cdot a \qquad D.\ 4 \cdot a$$

Rješenje 213

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Jednakostraničan trokut ima sve tri stranice jednake.
Paralelogram je četverokut s dva para paralelnih i sukladnih suprotnih stranica.



Na slikama uočimo paralelograme AT_1TT_6, T_2BT_3T, TT_4CT_5 i jednakostranične trokute $\triangle TT_1T_2$, $\triangle TT_3T_4$ pa vrijede sljedeće jednakosti:

$$|AB| = |BC| = |CA| = a \ , \ |TT_3| = |T_2B| \ , \ |TT_6| = |AT_1| \ , \ |TT_1| = |T_1T_2|$$

$$|TT_5| = |CT_4| \ , \ |TT_4| = |T_4T_3| \ , \ |TT_2| = |T_3B|$$

Zbroj duljina paralela unutar trokuta $\triangle$ABC iznosi:

$$|TT_1| + |TT_2| + |TT_3| + |TT_4| + |TT_5| + |TT_6| =$$

$$= \left(|TT_1| + |TT_3| + |TT_6|\right) + \left(|TT_2| + |TT_4| + |TT_5|\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} |TT_1| = |T_1T_2| \\ |TT_3| = |T_2B| \\ |TT_6| = |AT_1| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} |TT_2| = |BT_3| \\ |TT_4| = |T_3T_4| \\ |TT_5| = |T_4C| \end{bmatrix} = \left(|T_1T_2| + |T_2B| + |AT_1|\right) + \left(|BT_3| + |T_3T_4| + |T_4C|\right) =$$

$$= \left(|AT_1| + |T_1T_2| + |T_2B|\right) + \left(|BT_3| + |T_3T_4| + |T_4C|\right) = |AB| + |BC| = a + a = 2 \cdot a.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 213

Točkom T u nutrini jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ duljine stranice 10 povučene su Paralele sa stranicama trokuta. Zbroj duljina tih paralela unutar trokuta jednak je:

$$A.\ 20 \qquad B.\ 10 \qquad C.\ 30 \qquad D.\ 40$$

Rezultat: A.

Zadatak 214 (Martina, srednja škola)

Duljine stranica trokuta iznose 12.5 cm, 10 cm i 8.5 cm. Duljina najduže stranice njemu sličnoga trokuta iznosi 20 cm. Koliki je omjer površina zadanoga i njemu sličnoga trokuta?

$$A.\ 0.311 \qquad B.\ 0.391 \qquad C.\ 0.621 \qquad D.\ 0.645$$

Rješenje 214

Ponovimo!

Kažemo da su dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ slična ako se podudaraju u svim trima kutovima:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\alpha_1\\ \beta=\beta_1\\ \gamma=\gamma_1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1.$$

Omjer duljina stranica sličnih trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$

$$k=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$$

zove se koeficijent sličnosti.

Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina odgovarajućih stranica.

$$\frac{P}{P_1}=k^2 \quad , \quad \frac{P}{P_1}=\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \quad , \quad \frac{P}{P_1}=\left(\frac{b}{b_1}\right)^2 \quad , \quad \frac{P}{P_1}=\left(\frac{c}{c_1}\right)^2.$$

Budući da je zadan par odgovarajućih stranica trokuta (najduže stranice oba trokuta), možemo naći koeficijent sličnosti, a onda i omjer površina trokuta.

$$\left.\begin{array}{l}a=12.5\\ a_1=20\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\frac{P}{P_1}=\left(\frac{a}{a_1}\right)^2\right] \Rightarrow \frac{P}{P_1}=\left(\frac{12.5}{20}\right)^2 \Rightarrow \frac{P}{P_1}=0.391.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 214

Duljine stranica trokuta iznose 25 cm, 20 cm i 17 cm. Duljina najduže stranice njemu sličnoga trokuta iznosi 40 cm. Koliki je omjer površina zadanoga i njemu sličnoga trokuta?

$$A.\ 0.311 \qquad B.\ 0.391 \qquad C.\ 0.621 \qquad D.\ 0.645$$

Rezultat: B.

Zadatak 215 (Tin, srednja škola)

Duljine stranica trokuta su 12.5 cm, 10 cm i 8.5 cm. Razlika duljina najdulje i najkraće stranice njemu sličnog trokuta iznosi 4.8 cm. Koliko iznosi duljina treće stranice (stranice srednje duljine) sličnoga trokuta?

$$A.\ 8.3\ cm \qquad B.\ 9\ cm \qquad C.\ 10.8\ cm \qquad D.\ 12\ cm$$

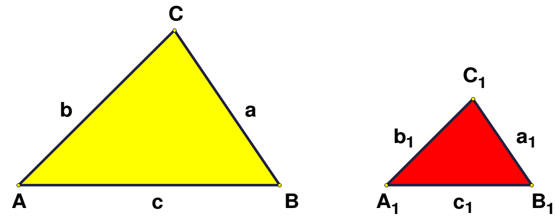
Rješenje 215

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Sličnost trokuta



Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti. Kraće:
Dva su trokuta slična ako su im kutovi sukladni, a odgovarajuće stranice proporcionalne (razmjerne).
Neka su duljine stranica:

zadanog trokuta	sličnog trokuta
a = 12.5	a_1
b = 10	b_1
c = 8.5	c_1

pri čemu vrijedi:

$$\frac{a_1}{a} = k \quad , \quad \frac{b_1}{b} = k \quad , \quad \frac{c_1}{c} = k.$$

Razlika duljina najdulje i najkraće stranice zadanog trokuta je

$$a - c = 12.5 - 8.5 \Rightarrow a - c = 4.$$

Razlika duljina najdulje i najkraće stranice sličnog trokuta je

$$a_1 - c_1 = 4.8.$$

Računamo koeficijent sličnosti, k.

$$\frac{a_1 - c_1}{a - c} = \frac{k \cdot a - k \cdot c}{a - c} = \frac{k \cdot (a - c)}{a - c} = \frac{k \cdot (a - c)}{a - c} = k.$$

Tada je

$$k = \frac{a_1 - c_1}{a - c} \Rightarrow k = \frac{4.8}{4} \Rightarrow k = 1.2.$$

Stranica srednje duljine sličnog trokuta iznosi:

$$\frac{b_1}{b} = k \Rightarrow \frac{b_1}{b} = k \ / \cdot b \Rightarrow b_1 = k \cdot b \Rightarrow b_1 = 1.2 \cdot 10 \Rightarrow b_1 = 12.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 215

Duljine stranica trokuta su 12.5 cm, 10 cm i 8.5 cm. Razlika duljina najdulje i najkraće stranice njemu sličnog trokuta iznosi 4.8 cm. Koliko iznosi duljina najveće stranice sličnoga trokuta?

$A.\ 10\ cm \qquad B.\ 14\ cm \qquad C.\ 12\ cm \qquad D.\ 15\ cm$

Rezultat: D.

Zadatak 216 (Emrah, srednja škola)

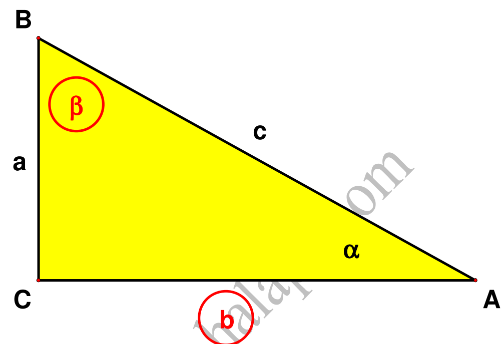
Odredi duljine stranica pravokutnog trokuta ako je zadano b = 8, $\sin \beta = \frac{4}{5}$.

Rješenje 216

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \;\; , \;\; a \ge 0.$$

Trokut je dio ravnine omeđen sa tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.
Rješavanje pravokutnog trokuta znači pomoću zadanih elemenata trokuta, dovoljnih za određivanje trokuta, izračunati ostale elemente (obično nepoznate stranice i kutove). Zadatak se često dopunjuje i izračunavanjem opsega i ploštine trokuta.
Na slici pravokutnog trokuta označimo zadane elemente (npr. kružićem).



Pomoću sin β izračunamo duljinu hipotenuze c jer vrijedi:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{c} \;/\cdot \frac{c}{\sin\beta} \Rightarrow c = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow c = \frac{8}{\frac{4}{5}} \Rightarrow c = \frac{\frac{8}{1}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow c = \frac{40}{4} \Rightarrow c = 10.$$

Duljinu katete a izračunat ćemo pomoću Pitagorina poučka.

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \Rightarrow a = \sqrt{10^2 - 8^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{100 - 64} \Rightarrow a = \sqrt{36} \Rightarrow a = \sqrt{6^2} \Rightarrow a = 6.$$

Vježba 216

Odredi duljine stranica pravokutnog trokuta ako je zadano a = 6, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Rezultat: a = 6, b = 8, c = 10.

Zadatak 217 (Marina, strukovna škola)

Ljestve duljine 2.4 m naslonjene su na zid tako da im je podnožje na udaljenosti 1 m od zida. Na kojoj visini ljestve dodiruju zid?

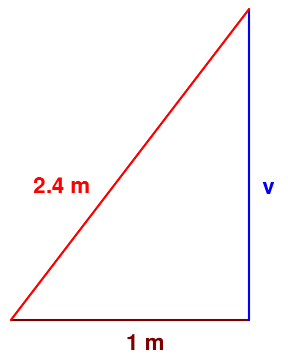
$A.\ 1.40\ m \qquad B.\ 1.76\ m \qquad C.\ 2.18\ m \qquad D.\ 2.60\ m$

Rješenje 217

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen sa tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.



Uočimo pravokutan trokut kojemu je duljina hipotenuze 2.4 m, duljina jedne katete 1 m, a druge katete v. Duljina v ujedno je i visina na kojoj ljestve dodiruju zid. Uporabom Pitagorina poučka dobije se

$$(2.4\ m)^2 = v^2 + (1\ m)^2 \Rightarrow v^2 = (2.4\ m)^2 - (1\ m)^2 \Rightarrow v^2 = 5.76\ m^2 - 1\ m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = 4.76\ m^2 \Rightarrow v^2 = 4.76\ m^2\ /\sqrt{\ } \Rightarrow v = \sqrt{4.76\ m^2} \Rightarrow v = 2.18\ m.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 217

Ljestve duljine 10 m naslonjene su na zid tako da im je podnožje na udaljenosti 6 m od zida. Na kojoj visini ljestve dodiruju zid?

$A.\ 7\ m \qquad B.\ 8\ m \qquad C.\ 9\ m \qquad D.\ 10\ m$

Rezultat: B.

Zadatak 218 (Lana, gimnazija)

Ako su a, b i c duljine stranica trokuta i ako je a : b = 5 : 4, a : c = 3 : 5, a opseg trokuta iznosi 156 cm, kolika je duljina najkraće stranice trokuta?

Rješenje 218

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen sa tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Vrijednost omjera se ne mijenja ako se članovi omjera pomnože (proširenje omjera) ili podijele (skraćivanje omjera) s nekim realnim brojem različitim od nule.

$$a : b = k \Rightarrow (a \cdot n) : (b \cdot n) = k$$
$$a : b = k \Rightarrow (a : n) : (b : n) = k.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Razmjer ostaje valjan ako je:

$$b : a = d : c.$$

Ako postoji n jednostavnih omjera takvih da je

$$a_1 : a_2 = k_1$$
$$a_2 : a_3 = k_2$$
$$a_3 : a_4 = k_3$$
$$\ldots$$
$$a_{n-1} : a_n = k_{n-1},$$

produženi omjer je:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n.$$

1.inačica

Iz omjera duljina stranica trokuta dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} a : b = 5 : 4 \\ a : c = 3 : 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 \cdot b = 4 \cdot a \\ 3 \cdot c = 5 \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 \cdot b = 4 \cdot a \; /:5 \\ 3 \cdot c = 5 \cdot a \; /:3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = \frac{4}{5} \cdot a \\ c = \frac{5}{3} \cdot a \end{array}\right\}.$$

Budući da je zadan opseg trokuta, vrijedi:

$$O = a + b + c \;\Rightarrow\; a + b + c = O \;\Rightarrow\; a + \frac{4}{5} \cdot a + \frac{5}{3} \cdot a = 156 \;\Rightarrow\; a + \frac{4}{5} \cdot a + \frac{5}{3} \cdot a = 156 \; / \cdot 15 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 15 \cdot a + 12 \cdot a + 25 \cdot a = 2340 \;\Rightarrow\; 52 \cdot a = 2340 \;\Rightarrow\; 52 \cdot a = 2340 \; /:52 \;\Rightarrow\; a = 45.$$

Duljina najkraće stranice trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} b = \frac{4}{5} \cdot a \\ a = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{4}{5} \cdot 45 \;\Rightarrow\; b = \frac{4}{5} \cdot \frac{45}{1} \;\Rightarrow\; b = \frac{4}{5} \cdot \frac{45}{1} \;\Rightarrow\; b = \frac{4}{1} \cdot \frac{9}{1} \;\Rightarrow\; b = 36.$$

2.inačica

Iz omjera duljina stranica trokuta, proširivanjem članova omjera, dobije se produženi razmjer.

$$\left.\begin{array}{l} a : b = 5 : 4 \\ a : c = 3 : 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b : a = 4 : 5 \\ a : c = 3 : 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{članove proširujemo sa } 3 \\ \text{članove proširujemo sa } 5 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b : a = (4 \cdot 3) : (5 \cdot 3) \\ a : c = (3 \cdot 5) : (5 \cdot 5) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b : a = 12 : 15 \\ a : c = 15 : 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b : a = 12 : 15 \\ a : c = 15 : 25 \end{array}\right\} \Rightarrow b : a : c = 12 : 15 : 25 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} b = 12 \cdot k \\ a = 15 \cdot k \\ c = 25 \cdot k \end{array}\right\}.$$

Budući da je zadan opseg trokuta, vrijedi:

$$O = a + b + c \;\Rightarrow\; a + b + c = O \;\Rightarrow\; 15 \cdot k + 12 \cdot k + 25 \cdot k = 156 \;\Rightarrow\; 52 \cdot k = 156 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 52 \cdot k = 156 \; /:52 \;\Rightarrow\; k = 3.$$

Duljina najkraće stranice trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} b = 12 \cdot k \\ k = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 12 \cdot 3 \;\Rightarrow\; b = 36.$$

Vježba 218

Ako su a, b i c duljine stranica trokuta i ako je a : b = 5 : 4, a : c = 3 : 5, a opseg trokuta iznosi 312 cm, kolika je duljina najkraće stranice trokuta?

Rezultat: 72.

Zadatak 219 (Lili, gimnazija)

Ako su točke A(– 5, 2) i B(3, – 2) vrhovi jednakostraničnog trokuta ABC, tada je njegov opseg:

$$A.\ 30 \qquad B.\ 4\cdot\sqrt{5} \qquad C.\ 12\cdot\sqrt{5} \qquad D.\ 36$$

Rješenje 219

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

Trokut je dio ravnine omeđen sa tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Trokute dijelimo prema odnosu među duljinama stranica na:

$$\begin{cases}\text{raznostranične}\\ \text{jednakokračne}\\ \text{jednakostranične.}\end{cases}$$

Jednakostraničan trokut je trokut koji ima sve tri stranice jednake duljine i tri jednaka kuta (α = 60°).
Opseg jednakostraničnog trokuta kojemu je duljina stranice a iznosi:

$$O=3\cdot a.$$

Udaljenost točaka $A\left(x_1,\ y_1\right)$ i $B\left(x_2,\ y_2\right)$:

$$|AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

Izračunamo duljinu stranice a jednakostraničnog trokuta ABC.

$$\left.\begin{array}{l}A\left(x_1,\ y_1\right)=A(-5,\ 2)\\ B\left(x_2,\ y_2\right)=B(3,\ -2)\\ a=|AB|\\ |AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow a=\sqrt{(3-(-5))^2+(-2-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{(3+5)^2+(-2-2)^2} \Rightarrow a=\sqrt{8^2+(-4)^2} \Rightarrow a=\sqrt{64+16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{80} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{bmatrix} \Rightarrow a=\sqrt{16\cdot 5} \Rightarrow a=\sqrt{16}\cdot\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{5} \Rightarrow a=4\cdot\sqrt{5}.$$

Opseg jednakostranišnog trokuta ABC iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}O=3\cdot a\\ a=4\cdot\sqrt{5}\end{array}\right\} \Rightarrow O=3\cdot 4\cdot\sqrt{5} \Rightarrow O=12\cdot\sqrt{5}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 219

Ako su točke A(10, 6) i B(2, 2) vrhovi jednakostraničnog trokuta ABC, tada je njegov opseg:

$$A.\ 30 \qquad B.\ 4\cdot\sqrt{5} \qquad C.\ 12\cdot\sqrt{5} \qquad D.\ 36$$

Rezultat: C.

Zadatak 220 (Matea, Sanja, strukovna škola)

Mjera jednoga kuta trokuta iznosi 101°, a mjere preostalih dvaju kutova odnose se kao 2 : 5. Kolika je mjera manjega od tih dvaju kutova?

$$A.\ 22^0\,34'\,17'' \qquad B.\ 27^0\,51'\,49'' \qquad C.\ 31^0\,36' \qquad D.\ 39^0\,30'$$

Rješenje 220

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad 1^0=60' \quad , \quad 1'=60''.$$

Trokut je dio ravnine omeđen sa tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a:b=(a\cdot n):(b\cdot n)$$
$$a:b=(a:n):(b:n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b=k \quad i \quad c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \ \Rightarrow \ a\cdot d=b\cdot c.$$

1.inačica

Budući da je zadan jedan kut, na primjer γ = 101°, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=180^0\\ \gamma=101^0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha+\beta+101^0=180^0 \Rightarrow \alpha+\beta=180^0-101^0 \Rightarrow \alpha+\beta=79^0.$$

Pomoću sustava jednadžbi izračuna se manji kut.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=79^0\\ \alpha:\beta=2:5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=79^0\\ 2\cdot\beta=5\cdot\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=79^0\\ 2\cdot\beta=5\cdot\alpha \ /:2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=79^0\\ \beta=\frac{5}{2}\cdot\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+\frac{5}{2}\cdot\alpha=79^0 \Rightarrow \alpha+\frac{5}{2}\cdot\alpha=79^0 \ /\cdot 2 \Rightarrow 2\cdot\alpha+5\cdot\alpha=158^0 \Rightarrow 7\cdot\alpha=158^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 7\cdot\alpha=158^0\ \ /:7\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{158^0}{7}\ \Rightarrow\ \alpha=22^0\ 34'\ 17''.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Budući da je zadan jedan kut, na primjer γ = 101°, vrijedi:

$$\left.\begin{matrix}\alpha+\beta+\gamma=180^0\\ \gamma=101^0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ \alpha+\beta+101^0=180^0\ \Rightarrow\ \alpha+\beta=180^0-101^0\ \Rightarrow\ \alpha+\beta=79^0.$$

Iz omjera kutova α i β slijedi:

$$\alpha:\beta=2:5\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}\alpha=2\cdot k\\ \beta=5\cdot k\end{matrix}\right\}.$$

Računamo koeficijent razmjernosti k.

$$\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=79^0\\ \alpha=2\cdot k\\ \beta=5\cdot k\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{bmatrix}\Rightarrow\ 2\cdot k+5\cdot k=79^0\ \Rightarrow\ 7\cdot k=79^0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 7\cdot k=79^0\ \ /:7\ \Rightarrow\ k=\frac{79^0}{7}.$$

Manji kut iznosi:

$$\left.\begin{matrix}\alpha=2\cdot k\\ k=\frac{79^0}{7}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ \alpha=2\cdot\frac{79^0}{7}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{2}{1}\cdot\frac{79^0}{7}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{158^0}{7}\ \Rightarrow\ \alpha=22^0\ 34'\ 17''.$$

Odgovor je pod A.

3.inačica

Budući da je zadan kut od 101°, ostala dva kuta u trokutu imaju zajedno

$$180^0-101^0=79^0.$$

Kutovi su u omjeru 2 : 5 pa je

$$79^0:(2+5)=79^0:7=\frac{79^0}{7}.$$

Manji kut iznosi:

$$2\cdot\frac{79^0}{7}=\frac{2}{1}\cdot\frac{79^0}{7}=\frac{158^0}{7}=22^0\ 34'\ 17''.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 220

Mjera jednoga kuta trokuta iznosi 101°, a mjere preostalih dvaju kutova odnose se kao 3 : 4. Kolika je mjera većeg od tih dvaju kutova?

$A.\ 45^0\ 8'\ 34''$ $B.\ 40^0\ 30'\ 25''$ $C.\ 45^0\ 36'$ $D.\ 40^0\ 30'$

Rezultat: A.