**Zadatak 301 (Lucija, gimnazija)**

Zadane su dvije stranice trokuta a = 15, b = 8 i visina $v_b = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{2}$ spuštena na stranicu b.
Duljina treće stranice trokuta je:

$A.\ 10 \qquad B.\ 12 \qquad C.\ 13 \qquad D.\ 14$

**Rješenje 301**

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta .$$

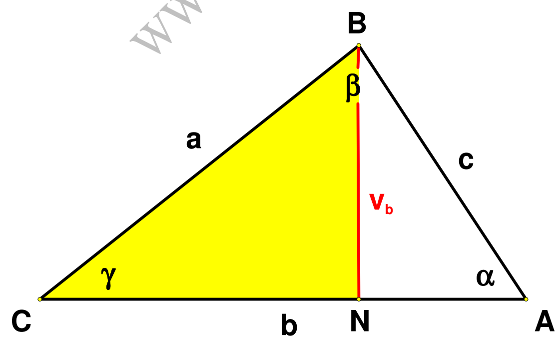
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma .$$

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60 = \frac{1}{2} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \geq 0 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} .$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1 .$$






Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \ , \ |BC| = a \ , \ |CA| = b \ , \ |NB| = v_b \ , \ \angle CAB = \alpha \ , \ \angle ABC = \beta \ , \ \angle BCA = \gamma$$

Uočimo pravokutan trokut BCN i pomoću funkcije sinus izračunamo mjeru kuta γ.

$$\sin \gamma = \frac{|NB|}{|BC|} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{v_b}{a} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} v_b = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{2} \\ a = 15 \end{array} \right] \Rightarrow \sin \gamma = \frac{\frac{15 \cdot \sqrt{3}}{2}}{15} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{\frac{15 \cdot \sqrt{3}}{2}}{\frac{15}{1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\gamma = \frac{\frac{15\cdot\sqrt{3}}{2}}{\frac{15}{1}} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{1}} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \gamma = 60^0.$$

Iz kosinusovog poučka izračunamo duljinu stranice c.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 15 \\ b = 8 \\ \gamma = 60^0 \end{bmatrix} \Rightarrow c^2 = 15^2 + 8^2 - 2\cdot 15\cdot 8\cdot\cos 60^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 225 + 64 - 240\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 225 + 64 - 240\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow c^2 = 225 + 64 - 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = 169 \Rightarrow c^2 = 169 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow c = \sqrt{169} \Rightarrow c = 13.$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 301**

Zadane su dvije stranice trokuta a = 30, b = 16 i visina $v_b = 15\cdot\sqrt{3}$ spuštena na stranicu b. Duljina treće stranice trokuta je:

$A.$ 20 $B.$ 24 $C.$ 26 $D.$ 28

**Rezultat:** C.

## Zadatak 302 (Lucija, gimnazija)

U trokutu je kut β dva puta veći od kuta α i $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Omjer stranica a : b jednak je:

$A.$ 5 : 9 $B.$ 5 : 8 $C.$ 2 : 5 $D.$ 3 : 5



## Rješenje 302

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad , \quad \sin(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d - b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \ne 0 \;,\; n \ne 1.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Najprije izračunamo sin α.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2+\sin^2\alpha=1 \Rightarrow \frac{16}{25}+\sin^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\frac{16}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{1}{1}-\frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{25-16}{25} \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{9}{25} \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{9}{25} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{3}{5}.$$

Računamo sin β-

$$\sin\beta=\left[\beta=2\cdot\alpha\right]=\sin(2\cdot\alpha)=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\begin{bmatrix}\sin\alpha=\frac{3}{5}\\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\end{bmatrix}=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}.$$

Iz sinusovog poučka dobije se omjer a : b.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \;/\cdot\frac{\sin\alpha}{b} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow \begin{bmatrix}\sin\alpha=\frac{3}{5}\\ \sin\beta=\frac{24}{25}\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{24}{25}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{24}{25}} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{8}{5}} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{5}{8} \Rightarrow a:b=5:8.$$

Odgovor je pod B.

**Vježba 302**

U trokutu je kut β dva puta veći od kuta α i $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. Omjer stranica a : b jednak je:

*A.* 5 : 9 *B.* 5 : 8 *C.* 2 : 5 *D.* 3 : 5

**Rezultat:** B.

**Zadatak 303 (Tomislav, gimnazija)**

U trokutu su zadani: stranica b = 24, visina $v_a=12\cdot\sqrt{3}$ spuštena na stranicu a te polumjer $R=7\cdot\sqrt{3}$ trokutu opisane kružnice. Duljina stranice c trokuta iznosi:

*A.* 19 *B.* 20 *C.* 21 *D.* 22

**Rješenje 303**

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ploština trokuta

$$P=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot R},$$

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta, R polumjer trokutu opisane kružnice.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2} \quad , \quad P=\frac{b\cdot v_b}{2} \quad , \quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} \\ P = \frac{a \cdot v_a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} = \frac{a \cdot v_a}{2} \Rightarrow \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} = \frac{a \cdot v_a}{2} \ / \cdot \frac{4 \cdot R}{a \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{2 \cdot R \cdot v_a}{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} R = 7 \cdot \sqrt{3} \\ v_a = 12 \cdot \sqrt{3} \\ b = 24 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \frac{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{3} \cdot 12 \cdot \sqrt{3}}{24} \Rightarrow c = \frac{24 \cdot 7 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{24 \cdot 7 \cdot 3}{24} \Rightarrow c = 21.$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 303**

U trokutu su zadani: stranica b = 48, visina $v_a = 24 \cdot \sqrt{3}$ spuštena na stranicu a te polumjer $R = 14 \cdot \sqrt{3}$ trokutu opisane kružnice. Duljina stranice c trokuta iznosi:

$$A.\ 38 \qquad B.\ 40 \qquad C.\ 42 \qquad D.\ 44$$

**Rezultat:** C.



**Zadatak 304 (Petra, gimnazija)**

U pravokutnom trokutu ABC katete su a = 4 i b = 6. Udaljenost vrha B od težišta trokuta je:

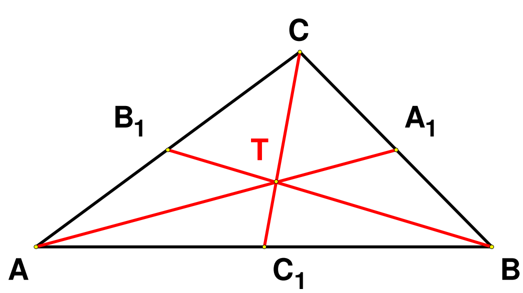
$$A.\ 3 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ \frac{10}{3} \qquad D.\ \frac{11}{3}$$

**Rješenje 304**

Ponovimo!

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.



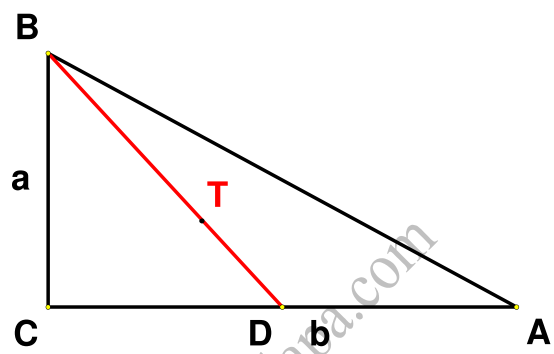
$$|AT|:|TA_1| = 2:1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |AT| = \frac{2}{3} \cdot |AA_1| \\ |TA_1| = \frac{1}{3} \cdot |AA_1| \end{array}\right\} \quad , \quad |BT|:|TB_1| = 2:1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |BT| = \frac{2}{3} \cdot |BB_1| \\ |TB_1| = \frac{1}{3} \cdot |BB_1| \end{array}\right\}$$

$$|CT|:|TC_1| = 2:1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |CT| = \frac{2}{3} \cdot |CC_1| \\ |TC_1| = \frac{1}{3} \cdot |CC_1| \end{array}\right\}.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.




Sa slike vidi se:

$$|BC| = a = 4 \ , \ |CA| = b = 6 \ , \ |CD| = |DA| = \frac{b}{2} = 3$$

Neka je D polovište katete $\overline{AC}$, a točka T težište trokuta ABC. Iz pravokutnog trokuta BCD uporabom Pitagorinog poučka dobije se duljina težišnice $\overline{BD}$.

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2 \Rightarrow |BD|^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow |BD|^2 = 16 + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BD|^2 = 25 \Rightarrow |BD|^2 = 25 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow |BD| = \sqrt{25} \Rightarrow |BD| = 5.$$

Budući da težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha, duljina $|BT|$ iznosi:

$$|BT| = \frac{2}{3} \cdot |BD| \Rightarrow |BT| = \frac{2}{3} \cdot 5 \Rightarrow |BT| = \frac{10}{3}.$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 304**

U pravokutnom trokutu ABC katete su a = 6 i b = 4. Udaljenost vrha A od težišta trokuta je:

$$A.\ 3 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ \frac{10}{3} \qquad D.\ \frac{11}{3}$$

**Rezultat:** C.

**Zadatak 305 (Josip, gimnazija)**

Pravokutnom trokutu zadana je površina P i kut α nasuprot katete a. Kateta a iznosi:

$$A.\ \sqrt{2 \cdot P \cdot ctg\,\alpha} \qquad B.\ \sqrt{2 \cdot P \cdot tg\,\alpha} \qquad C.\ \sqrt{P \cdot tg\,\alpha} \qquad D.\ \sqrt{2 \cdot P \cdot \sin\alpha}$$

**Rješenje 305**

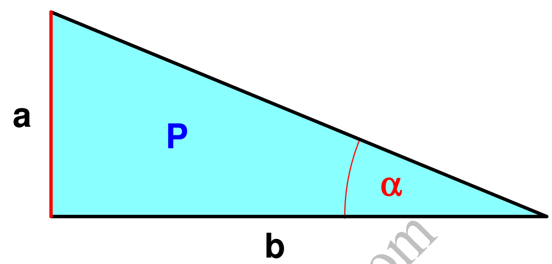
Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.




$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = \frac{a}{b} \\ P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} tg\,\alpha = \frac{a}{b} \ / \cdot \frac{b}{tg\,\alpha} \\ P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = \frac{a}{tg\,\alpha} \\ P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{tg\,\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^2}{2 \cdot tg\,\alpha} \Rightarrow \frac{a^2}{2 \cdot tg\,\alpha} = P \Rightarrow \frac{a^2}{2 \cdot tg\,\alpha} = P \ / \cdot 2 \cdot tg\,\alpha \Rightarrow a^2 = 2 \cdot P \cdot tg\,\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 2 \cdot P \cdot tg\,\alpha \ / \sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{2 \cdot P \cdot tg\,\alpha}.$$

Odgovor je pod B.

**Vježba 305**

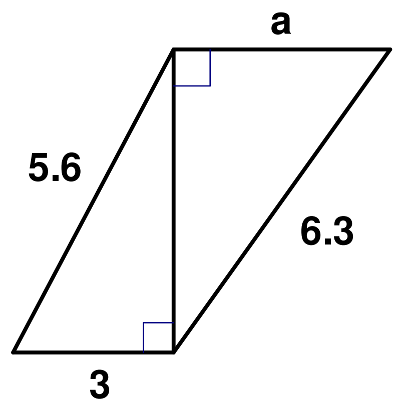
Pravokutnom trokutu zadana je površina P i kut β nasuprot katete b. Kateta b iznosi:

$A.\ \sqrt{2 \cdot P \cdot ctg\,\beta}$ $\qquad B.\ \sqrt{2 \cdot P \cdot tg\,\beta}$ $\qquad C.\ \sqrt{P \cdot tg\,\beta}$ $\qquad D.\ \sqrt{2 \cdot P \cdot \cos\beta}$

**Rezultat:** B.

**Zadatak 306 (4A, TUPŠ)**

Koliko iznosi duljina stranice a prikazane na skici?




**Rješenje 306**

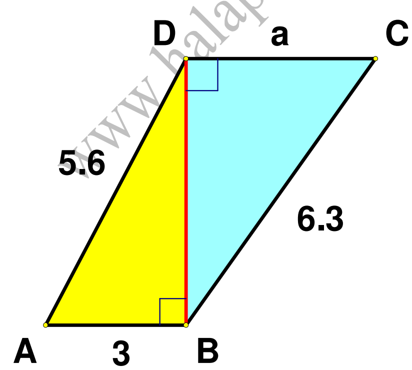
Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Dužinu koja spaja nesusjedne vrhove četverokuta zovemo dijagonalom četverokuta.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.






Sa slike vidi se:

$$|AB| = 3 \ , \ |BC| = 6.3 \ , \ |DC| = a \ , \ |AD| = 5.6$$

Budući da je četverokut ABCD podijeljen dijagonalom $\overline{BD}$ na dva pravokutna trokuta Δ ABD i ΔBCD, primijenit ćemo na oba Pitagorin poučak.

Trokut ABD:

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 \Rightarrow |AB|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 .$$

Trokut BCD:

$$|BC|^2 = |DC|^2 + |BD|^2 \Rightarrow |DC|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 .$$

Dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} |AB|^2+|BD|^2=|AD|^2 \\ |DC|^2+|BD|^2=|BC|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |BD|^2=|AD|^2-|AB|^2 \\ |BD|^2=|BC|^2-|DC|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

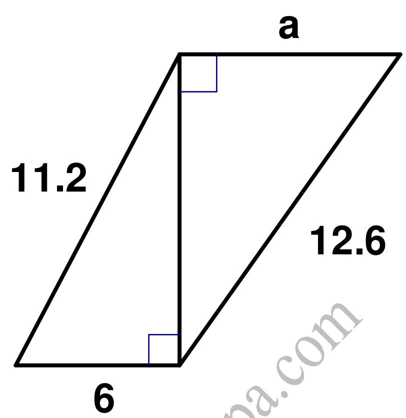
$$\Rightarrow |AD|^2-|AB|^2=|BC|^2-|DC|^2 \Rightarrow 5.6^2-3^2=6.3^2-a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=6.3^2-5.6^2+3^2 \Rightarrow a^2=6.3^2-5.6^2+3^2 \;/\sqrt{\phantom{x}} \Rightarrow a=\sqrt{6.3^2-5.6^2+3^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow a=4.16$ jediničnih dužina.

**Vježba 306**

Koliko iznosi duljina stranice a prikazane na skici?




**Rezultat:** a = 8.33 jediničnih dužina.



**Zadatak 307 (4A, TUPŠ)**

U trokutu ABC duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka je 6 cm, a duljina visine iz vrha C jednaka je 4.1 cm. Kolika je površina njemu sličnoga trokuta A'B'C' kojemu je duljina visine iz vrha C' jednaka duljini stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC?

**Rješenje 307**

Ponovimo!

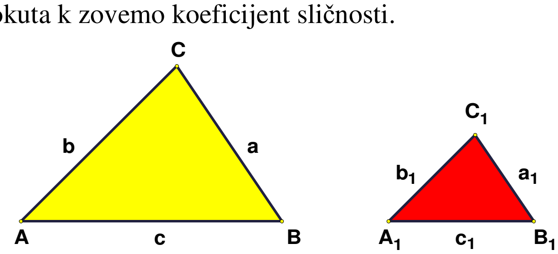
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha=\alpha_1 \;,\; \beta=\beta_1 \;,\; \gamma=\gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.




Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati duljina pripadnih stranica (ili pripadnih duljina visina), tj. ako je

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=k \quad , \quad \frac{v_a}{v_{a1}}=\frac{v_b}{v_{b1}}=\frac{v_c}{v_{c1}}=k,$$

tada je

$$\frac{P}{P_1}=k^2.$$

Ploština trokuta izračunava se po formuli

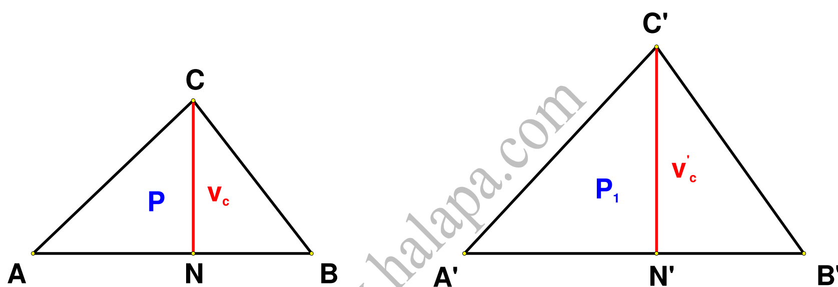
$$P=\frac{a\cdot v_a}{2} \quad , \quad P=\frac{b\cdot v_b}{2} \quad , \quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

$$n=\frac{n}{1}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$






Sa slike vidi se:

$$|AB|=6\ m \quad , \quad |NC|=v_c=4.1\ cm \quad , \quad |N'C'|=v_c'=6\ cm$$

Budući da su trokuti ABC i A'B'C' slični, koeficijent sličnosti k dobije se iz omjera duljina pripadnih visina

$$\frac{v_c'}{v_c}=k.$$

Ako je $P_1$ ploština trokuta A'B'C', a P ploština trokuta ABC možemo pisati

$$P_1=k^2\cdot P \ \Rightarrow\ P_1=\left(\frac{v_c'}{v_c}\right)^2\cdot P \ \Rightarrow\ P_1=\left(\frac{v_c'}{v_c}\right)^2\cdot\frac{|AB|\cdot|NC|}{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P_1=\left(\frac{6\ cm}{4.1\ cm}\right)^2\cdot\frac{6\ cm\cdot 4.1\ cm}{2} \ \Rightarrow\ P_1=26.34\ cm^2.$$

**Vježba 307**

U trokutu ABC duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka je 0.6 dm, a duljina visine iz vrha C jednaka je 41 mm. Kolika je površina njemu sličnoga trokuta A'B'C' kojemu je duljina visine iz vrha C' jednaka duljini stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC?

**Rezultat:** 26.34 $cm^2$.

**Zadatak 308 (Marinelica, gimnazija)**

Ploština trokuta iznosi 64 cm$^2$, a dva njegova unutarnja kuta iznose 61° 52' i 57° 14'. Kolika je duljina najkraće stranice ovog trokuta?

**Rješenje 308**

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Ploština trokuta: uz oznake a, b, c – duljine stranica; α, β, γ – nasuprotni kutovi trokuta, vrijedi

$$P=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\alpha}\quad,\quad P=\frac{b^2\cdot\sin\gamma\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin\beta}\quad,\quad P=\frac{c^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{2\cdot\sin\gamma}.$$

Najprije odredimo treći kut trokuta.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ\ \Rightarrow\ \gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\alpha=61^\circ 52'\\ \beta=57^\circ 14'\end{bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \gamma=180^\circ-\left(61^\circ 52'+57^\circ 14'\right)\ \Rightarrow\ \gamma=180^\circ-118^\circ 66'\ \Rightarrow\ \left[60'=1^\circ\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \gamma=179^\circ 60'-119^\circ 6'\ \Rightarrow\ \gamma=60^\circ 54'.$$

Budući da je kut β = 57° 14' najmanji, stranica b je najkraća, a njezinu duljinu izračunamo iz formule

$$P=\frac{b^2\cdot\sin\gamma\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin\beta}\ \Rightarrow\ \frac{b^2\cdot\sin\gamma\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin\beta}=P\ \Rightarrow\ \frac{b^2\cdot\sin\gamma\cdot\sin\alpha}{2\cdot\sin\beta}=P\ /\cdot\frac{2\cdot\sin\beta}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b^2=\frac{2\cdot P\cdot\sin\beta}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}\ \Rightarrow\ b^2=\frac{2\cdot P\cdot\sin\beta}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ b=\sqrt{\frac{2\cdot P\cdot\sin\beta}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b=\sqrt{\frac{2\cdot 64\ cm^2\cdot\sin 57^\circ 14'}{\sin 60^\circ 54'\cdot\sin 61^\circ 52'}}\ \Rightarrow\ b=11.82\ cm.$$

**Vježba 308**

Ploština trokuta iznosi 64 cm$^2$, a dva njegova unutarnja kuta iznose 61° 52' i 60° 54'. Kolika je duljina najkraće stranice ovog trokuta?

**Rezultat:** 11.82 cm.

**Zadatak 309 (Marinelica, gimnazija)**

Izračunaj nepoznatu stranicu i kutove kosokutnog trokuta, ako je zadano a = 14 cm, c = 20 cm, β = 71° 20' 10''.

**Rješenje 309**

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta. Kosokutan trokut je trokut kojemu nijedan kut nije pravi kut.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

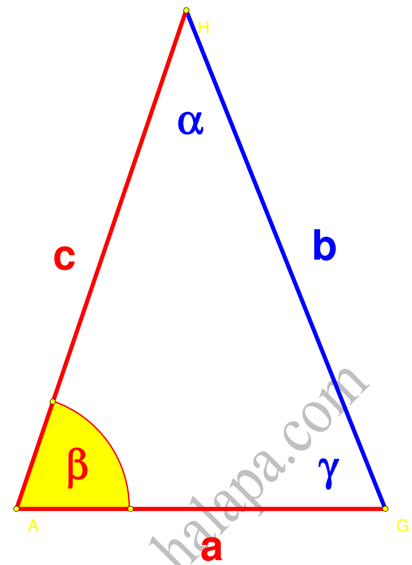
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot R \quad , \quad a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.






Budući da su zadane dvije stranice a i c te kut β između njih, uporabit ćemo kosinusov poučak da bismo izračunali duljinu stranice b.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \;\Rightarrow\; b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \; / \sqrt{\;} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} a = 14 \ cm \\ c = 20 \ cm \\ \beta = 71^\circ \, 20' 10'' \end{bmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b = \sqrt{(14 \ cm)^2 + (20 \ cm)^2 - 2 \cdot 14 \ cm \cdot 20 \ cm \cdot \cos 71^\circ \, 20' 10''} \;\Rightarrow\; b = 20.42 \ cm.$$

Pomoću poučka o sinusu izračunamo, na primjer, kut α.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \;\Rightarrow\; \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \; / \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \;\Rightarrow\; a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta \;\Rightarrow\; b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta \; / : b \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a \cdot \sin\beta}{b}\right) \;\Rightarrow\; \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{14 \ cm \cdot \sin 71^\circ \, 20' 10''}{20.42 \ cm}\right) \;\Rightarrow\; \alpha = 40^\circ \, 30' 27''.$$

Računamo kut γ.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \alpha = 40^\circ \, 30' 27'' \\ \beta = 71^\circ \, 20' 10'' \end{bmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \gamma = 180^\circ - \left(40^\circ 30'27'' + 71^\circ 20'10''\right) \ \Rightarrow \ \gamma = 180^\circ - 111^\circ 50'37'' \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 1^\circ = 60' \\ 1' = 60'' \end{bmatrix} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \gamma = 179^\circ 59'60'' - 111^\circ 50'37'' \ \Rightarrow \ \gamma = 68^\circ 9'23''.$$

**Vježba 309**

Izračunaj nepoznatu stranicu i kutove kosokutnog trokuta, ako je zadano a = 14 cm, c = 20 cm, β = 71° 20' 10''.

**Rezultat:** 11.82 cm.

**Zadatak 310 (Šibenska vesela trojka ☺, gimnazija)**

U trokutu ABC zadane su stranice b = 12 cm i c = 17 cm i visina $v_c$ = 7 cm. Kolika je duljina treće stranice?

**Rješenje 310**

Ponovimo!

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

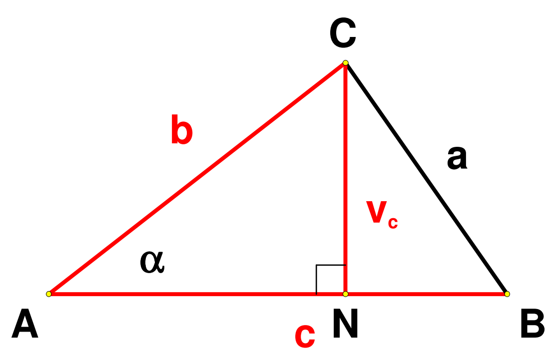
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$




Sa slike vidi se:

$$|AB| = c = 17 \ cm \ , \ |BC| = a \ , \ |AC| = b = 12 \ cm \ , \ |NC| = v_c = 7 \ cm \ , \ \angle CAB = \alpha$$

Uočimo pravokutan trokut ANC i pomoću funkcije sinus dobije se:

$$\sin\alpha = \frac{|NC|}{|AC|} \ \Rightarrow \ \sin\alpha = \frac{v_c}{b} \ \Rightarrow \ \sin\alpha = \frac{7 \ cm}{12 \ cm} \ \Rightarrow \ \sin\alpha = \frac{7}{12} \ \Rightarrow \ \left[\cos^2 x + \sin^2 x = 1\right] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x + \left(\frac{7}{12}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \frac{49}{144} = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{49}{144} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1} - \frac{49}{144} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{144-49}{144} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{95}{144} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{95}{144} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{95}{144}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{95}}{\sqrt{144}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{95}}{12}.$$

Promatramo trokut ABC. Budući da su zadane dvije stranice b i c te kut α između njih, uporabit ćemo kosinusov poučak da bismo izračunali duljinu stranice a.

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2\cdot|AC|\cdot|AB|\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 12\ cm \\ c = 17\ cm \\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{95}}{12} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{(12\ cm)^2 + (17\ cm)^2 - 2\cdot 12\ cm\cdot 17\ cm\cdot\frac{\sqrt{95}}{12}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{144\ cm^2 + 289\ cm^2 - 2\cdot 12\ cm\cdot 17\ cm\cdot\frac{\sqrt{95}}{12}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{144\ cm^2 + 289\ cm^2 - 34\cdot\sqrt{95}\ cm^2} \Rightarrow a = \sqrt{433\ cm^2 - 34\cdot\sqrt{95}\ cm^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Idemo Mladenka, Sanja i Milenko} \\ \text{kalkulator u ruke! :)} \end{array}\right] \Rightarrow a = 10.08\ cm.$$

**Vježba 310**

U trokutu ABC zadane su stranice b = 1.2 dm i c = 1.7 dm i visina $v_c$ = 0.7 dm. Kolika je duljina treće stranice?

**Rezultat:** 10.08 cm.

**Zadatak 311 (Ante, srednja škola)**

Duljine stranica trokuta jednake su 4 cm, 13 cm i 15 cm. Ako je α srednji po veličini kut ovoga trokuta, onda je:

$A.\ \sin\alpha = 0.5$ $\qquad B.\ \sin\alpha = 0.6$ $\qquad C.\ \sin\alpha = 0.7$ $\qquad D.\ \sin\alpha = 0.8$

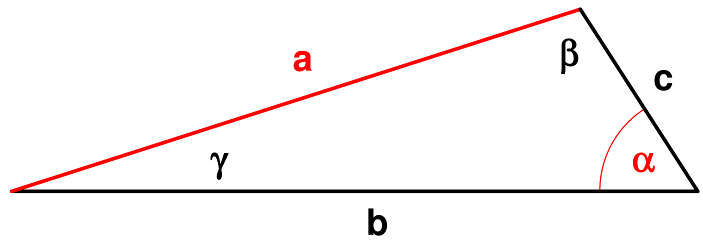
**Rješenje 311**

Ponovimo!

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$




Označimo stranice trokuta:

$$a = 13\ cm\ \ ,\ \ b = 15\ cm\ \ ,\ \ c = 4\ cm.$$

Ako je α srednji po veličini kut, tada je a srednja po duljini stranica trokuta pa vrijedi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \ \Rightarrow\ 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \ / \cdot \frac{1}{2 \cdot b \cdot c} \ \Rightarrow\ \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos\alpha = \frac{(15\ cm)^2 + (4\ cm)^2 - (13\ cm)^2}{2 \cdot 15\ cm \cdot 4\ cm} \ \Rightarrow\ \cos\alpha = \frac{225\ cm^2 + 16\ cm^2 - 169\ cm^2}{120\ cm^2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \cos\alpha = \frac{72\ cm^2}{120\ cm^2} \ \Rightarrow\ \cos\alpha = 0.6.$$



Sada računamo sin α.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \ \Rightarrow\ 0.6^2 + \sin^2\alpha = 1 \ \Rightarrow\ 0.36 + \sin^2\alpha = 1 \ \Rightarrow\ \sin^2\alpha = 1 - 0.36 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sin^2\alpha = 0.64 \ \Rightarrow\ \sin^2\alpha = 0.64 \ / \sqrt{\ } \ \Rightarrow\ \sin\alpha = \pm\sqrt{0.64} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} \sin\alpha = 0.8 \\ \sin\alpha = -0.8 \ \text{nema smisla} \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ \sin\alpha = 0.8.$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 311**

Duljine stranica trokuta jednake su 8 cm, 26 cm i 30 cm. Ako je α srednji po veličini kut ovoga trokuta, onda je:

$A.\ \sin\alpha = 0.5 \qquad B.\ \sin\alpha = 0.6 \qquad C.\ \sin\alpha = 0.7 \qquad D.\ \sin\alpha = 0.8$

**Rezultat:** D.

**Zadatak 312 (Bruno, tehnička škola)**

Duljine dviju stranica trokuta su 11 cm i 18 cm, a kut nasuprot jedne od ovih dviju stranica dva je puta veći od kuta nasuprot druge. Kolika je duljina treće stranice?

**Rješenje 312**

Ponovimo!

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^{0}.$$

Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R,$$

pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

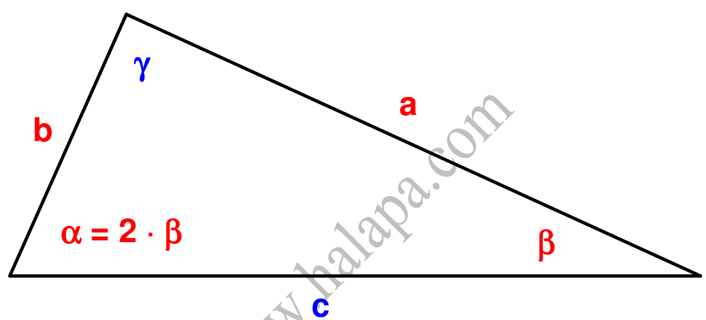
$$a^{2}=b^{2}+c^{2}-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$
$$b^{2}=a^{2}+c^{2}-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$
$$c^{2}=a^{2}+b^{2}-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$






Neka je a = 18 cm, b = 11 cm i α = 2 · β.
Uporabit ćemo sinusov poučak da bismo izračunali mjeru kuta β.

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}\;\Rightarrow\;\frac{b}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\alpha}\;/\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha\;\Rightarrow\;b\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\beta\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;b\cdot\sin\alpha-a\cdot\sin\beta=0\;\Rightarrow\;b\cdot\sin 2\beta-a\cdot\sin\beta=0\;\Rightarrow\;b\cdot 2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta-a\cdot\sin\beta=0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\sin\beta\cdot(2\cdot b\cdot\cos\beta-a)=0\;\Rightarrow\;\left.\begin{array}{l}\sin\beta=0\\ 2\cdot b\cdot\cos\beta-a=0\end{array}\right\}\;\Rightarrow\;\left.\begin{array}{l}\sin\beta=0 \text{ nema smisla}\\ 2\cdot b\cdot\cos\beta=a\end{array}\right\}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;2\cdot b\cdot\cos\beta=a\;\Rightarrow\;2\cdot b\cdot\cos\beta=a\;/\cdot\frac{1}{2\cdot b}\;\Rightarrow\;\cos\beta=\frac{a}{2\cdot b}\;\Rightarrow\;\beta=\cos^{-1}\left(\frac{a}{2\cdot b}\right)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\beta=\cos^{-1}\left(\frac{18\ cm}{2\cdot 11\ cm}\right)\;\Rightarrow\;\beta=\cos^{-1}\left(\frac{18\ cm}{2\cdot 11\ cm}\right)\;\Rightarrow\;\beta=\cos^{-1}\left(\frac{9}{11}\right)\;\Rightarrow\;\beta=35^{\circ}5'48''.$$

Računamo mjeru kuta α.

$$\left.\begin{array}{l}\beta=35^{\circ}5'48''\\ \alpha=2\cdot\beta\end{array}\right\}\;\Rightarrow\;\alpha=2\cdot 35^{\circ}5'48''\;\Rightarrow\;\alpha=70^{\circ}11'36''.$$

Računamo mjeru kuta γ.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=70^{\circ}11'36''\ ,\ \beta=35^{\circ}5'48''\\ \alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}\end{array}\right\}\;\Rightarrow\;\left.\begin{array}{l}\alpha=70^{\circ}11'36''\ ,\ \beta=35^{\circ}5'48''\\ \gamma=180^{\circ}-(\alpha+\beta)\end{array}\right\}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 180^\circ - \left(70^\circ 11'36'' + 35^\circ 5'48''\right) \Rightarrow \gamma = 74^\circ 42'36''.$$

Duljinu stranice c izračunat ćemo na dva načina.

1.inačica

Uporabit ćemo sinusov poučak.

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \;/\cdot \sin\gamma \Rightarrow c = \frac{b}{\sin\beta}\cdot\sin\gamma \Rightarrow c = b\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 11\ cm\cdot\frac{\sin 74^\circ 42'36''}{\sin 35^\circ 5'48''} \Rightarrow c = 18.45\ cm.$$

2.inačica

Uporabit ćemo kosinusov poučak.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \;/\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{(18\ cm)^2 + (11\ cm)^2 - 2\cdot 18\ cm\cdot 11\ cm\cdot\cos 74^\circ 42'36''} \Rightarrow c = 18.45\ cm.$$

**Vježba 312**

Duljine dviju stranica trokuta su 1.1 dm i 1.8 dm, a kut nasuprot jedne od ovih dviju stranica dva je puta veći od kuta nasuprot druge. Kolika je duljina treće stranice?

**Rezultat:** 18.45 cm.



**Zadatak 313 (Valentina, srednja škola)**

Što daje kosinusov teorem za kut α trokuta ABC ako je:

$$a)\ \alpha = 0^\circ \qquad b)\ \alpha = 90^\circ \qquad c)\ \alpha = 180^\circ\ ?$$

**Rješenje 313**

Ponovimo!

$$\cos 0^\circ = 1 \quad , \quad \cos 90^\circ = 0 \quad , \quad \cos 180^\circ = -1 \quad , \quad \sqrt{a^2} = a\ ,\ a \geq 0.$$

$$a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

a)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow \left[\alpha = 0^\circ\right] \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos 0^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot 1 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c \Rightarrow a^2 = b^2 - 2\cdot b\cdot c + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = (b-c)^2 \Rightarrow a^2 = (b-c)^2 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow a = b - c.$$

b)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \Rightarrow \left[\alpha = 90^\circ\right] \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Pitagorin poučak).}$$

c)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \Rightarrow \left[\alpha = 180^\circ\right] \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot (-1) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow a^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = (b+c)^2 \Rightarrow a^2 = (b+c)^2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow a = b + c.$$

**Vježba 313**

Što daje kosinusov teorem za kut γ trokuta ABC ako je:

$$a)\ \gamma = 0^\circ \qquad b)\ \gamma = 90^\circ \qquad c)\ \gamma = 180^\circ\ ?$$

**Rezultat:** $a)\ c = a - b$ $\quad b)\ c^2 = a^2 + b^2$ Pitagorin poučak $\quad c)\ c = a + b$

**Zadatak 314 (Ana, gimnazija)**

Duljine visine na hipotenuzu i težišnice iz istoga vrha pravokutnog trokuta su 4 cm, odnosno 5 cm. Koliki su kutovi tog pravokutnog trokuta?

**Rješenje 314**

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta. Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha + \beta = 90^0.$$

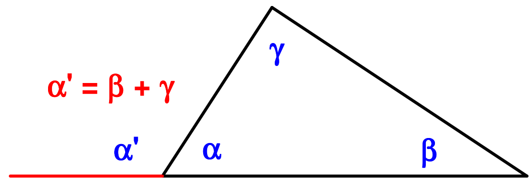
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut.
Nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze se jednaki kutovi.
Ploština pravokutnog trokuta izračunava se po formuli:

$$P = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha,$$

gdje je c hipotenuza trokuta, α šiljasti kut trokuta.
Svaki vanjski kut trokuta jednak je zbroju dvaju unutarnjih kutova trokuta koji s njime nisu susjedni.

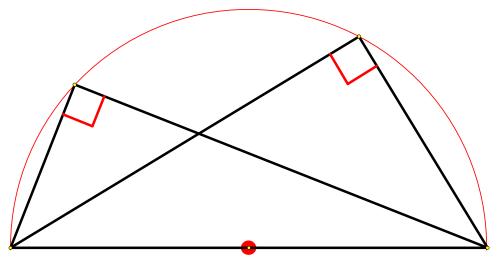



Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

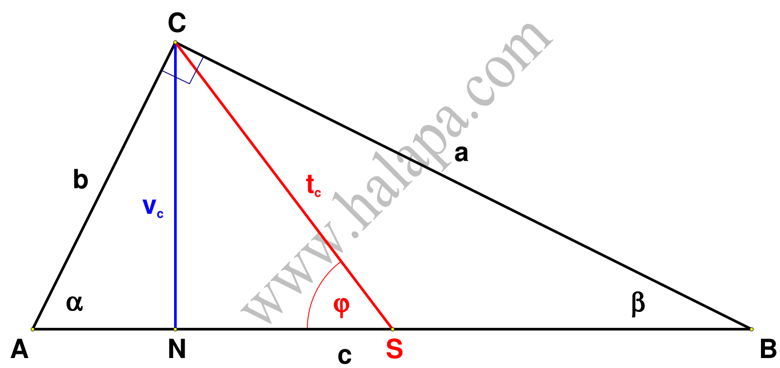
$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Talesov poučak

Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.



1.inačica



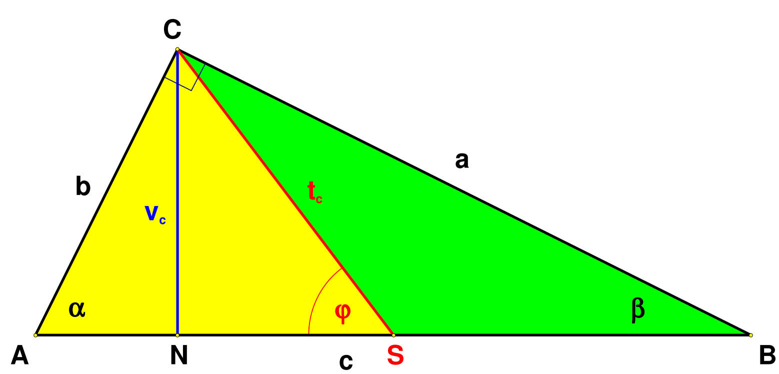

Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \ , \ |BC| = a \ , \ |CA| = b \ , \ |AS| = |SB| = |SC| = \frac{1}{2} \cdot c \ , \ |CN| = v_c = 4$$

$$|CS| = t_c = 5 \ , \ \angle CAB = \alpha \ , \ \angle ABC = \beta$$

Točka S polovište je hipotenuze $\overline{AB}$ pa vrijedi:

$$|AS| = |CS| \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} \cdot c = t_c \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} \cdot c = t_c \ / \cdot 2 \ \Rightarrow \ c = 2 \cdot t_c \ \Rightarrow \ c = 2 \cdot 5 \ cm \ \Rightarrow \ c = 10 \ cm.$$



Težišnica $t_c$ dijeli trokut ABC na dva trokuta jednakih površina pa je:

$$P_{ABC} = 2 \cdot P_{SBC} .$$

Iz sustava jednadžbi dobije se mjera kuta α.

$$\left. \begin{array}{l} P_{ABC} = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha \\ P_{ABC} = 2 \cdot P_{SBC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha = 2 \cdot P_{SBC} \Rightarrow \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{|SB| \cdot |CN|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c}{2} \Rightarrow \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c}{2} \Rightarrow \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c \;\; / \cdot \frac{4}{c^2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2 \cdot v_c}{c} \Rightarrow 2 \cdot \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2 \cdot v_c}{c}\right) \Rightarrow$$

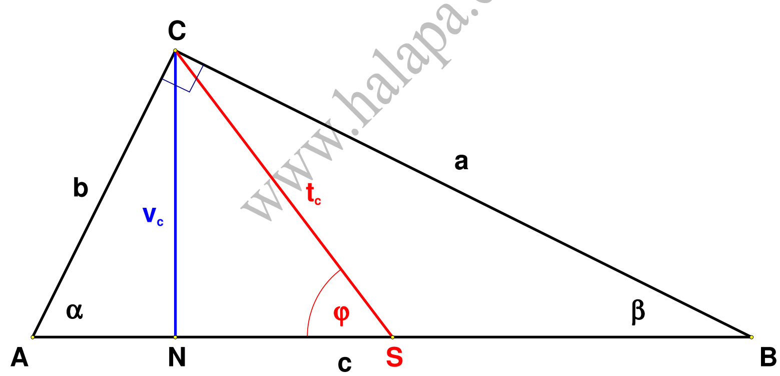
$$\Rightarrow 2 \cdot \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2 \cdot v_c}{c}\right) \;\; / \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{2 \cdot v_c}{c}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{2 \cdot 4 \ cm}{10 \ cm}\right) \Rightarrow \alpha = 26^\circ 34'.$$

Računamo mjeru kuta β.

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \beta = 90^\circ - 26^\circ 34' \Rightarrow \beta = 63^\circ 26'.$$

2.inačica

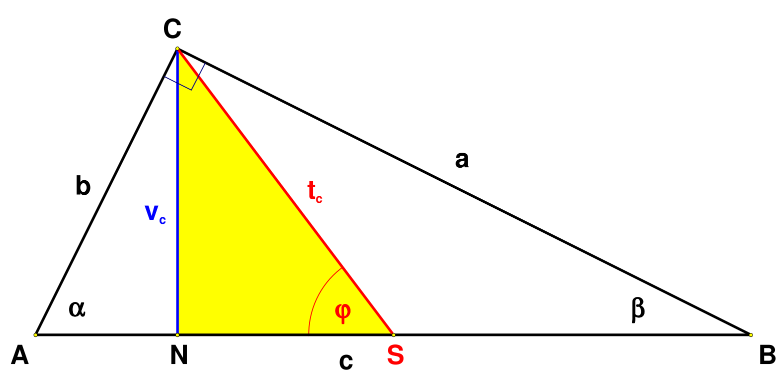





Sa slike vidi se:

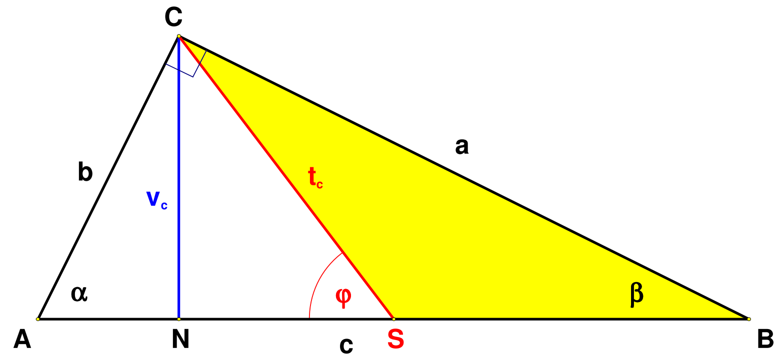
$$|AB| = c \ , \ |BC| = a \ , \ |CA| = b \ , \ |AS| = |SB| = |SC| = \frac{1}{2} \cdot c \ , \ |CN| = v_c = 4$$

$$|CS| = t_c = 5 \ , \ \angle CAB = \alpha \ , \ \angle ABC = \beta$$



Uočimo pravokutan trokut CNS i iz njega imamo:

$$\sin\varphi = \frac{|CN|}{|CS|} \Rightarrow \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{|CN|}{|CS|}\right) \Rightarrow \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{4\ cm}{5\ cm}\right) \Rightarrow \varphi = 53^\circ 8'.$$




Uočimo da je trokut BCS jednakokračan jer je

$$|CS| = |SB| = \frac{1}{2}\cdot c.$$

Budući da je kut φ vanjski kut jednakokračnog trokuta CSB, slijedi:

$$\varphi = 2\cdot\beta \Rightarrow 2\cdot\beta = \varphi \Rightarrow 2\cdot\beta = \varphi\ /:2 \Rightarrow \beta = \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{53^\circ 8'}{2} \Rightarrow \beta = 26^\circ 34'.$$

Tada je mjera kuta α jednaka

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta \Rightarrow \alpha = 90^\circ - 26^\circ 34' \Rightarrow \alpha = 63^\circ 26'.$$

**Vježba 314**

Duljine visine na hipotenuzu i težišnice iz istoga vrha pravokutnog trokuta su 8 cm, odnosno 10 cm. Koliki su kutovi tog pravokutnog trokuta?

**Rezultat:** $26^\circ 34', 63^\circ 26'.$



**Zadatak 315 (Tomislav, gimnazija)**

Između stranica trokuta i težišnice postoji relacija $t_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. Dokažite.

**Rješenje 315**

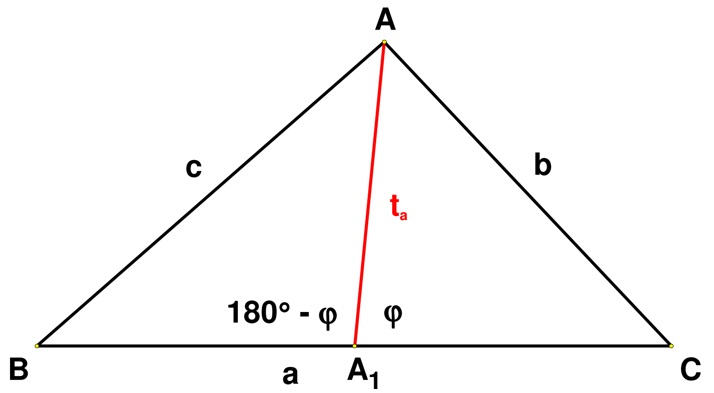
Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

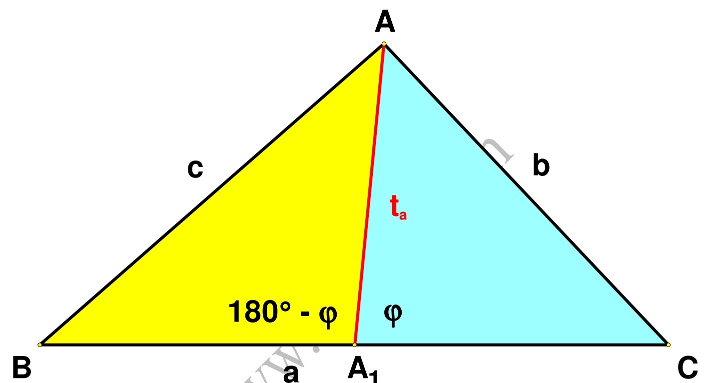
$$\left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c = b + d \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha.$$




Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \;,\; |BC| = a \;,\; |CA| = b \;,\; |BA_1| = |A_1C| = \frac{a}{2} \;,\; |AA_1| = t_a$$

$$\angle BA_1A = 180^\circ - \varphi \;,\; \angle AA_1C = \varphi$$




Uočimo trokute $\Delta ABA_1$ i $\Delta AA_1C$ i uporabimo kosinusov poučak.

$$\left.\begin{aligned} |BC|^2 &= |AA_1|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AA_1| \cdot |AC| \cdot \cos\varphi \\ |AB|^2 &= |AA_1|^2 + |BA_1|^2 - 2 \cdot |AA_1| \cdot |BA_1| \cdot \cos\left(180^\circ - \varphi\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= t_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot t_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi \\ c^2 &= t_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot t_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\left(180^\circ - \varphi\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} b^2 &= t_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot t_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi \\ c^2 &= t_a^2 + \frac{a^2}{4} + 2 \cdot t_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{bmatrix} \Rightarrow b^2 + c^2 = t_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot t_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi + t_a^2 + \frac{a^2}{4} + 2 \cdot t_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = t_a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot t_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi + t_a^2 + \frac{a^2}{4} + 2 \cdot t_a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = t_a^2 + \frac{a^2}{4} + t_a^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow b^2 + c^2 = 2 \cdot t_a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2+c^2=2\cdot t_a^2+2\cdot\frac{a^2}{4} \Rightarrow b^2+c^2=2\cdot t_a^2+\frac{a^2}{2} \Rightarrow 2\cdot t_a^2+\frac{a^2}{2}=b^2+c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot t_a^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2} \Rightarrow 2\cdot t_a^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2} \;/\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow t_a^2=\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}.$$

**Vježba 315**

Između stranica trokuta i težišnice postoji relacija $t_b^2=\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{b^2}{4}$. Dokažite.

**Rezultat:** Dokaz analogan.

**Zadatak 316 (Josip, srednja škola)**

Opseg trokuta je 60 cm, α = 37° i β = 66°. Izračunati stranicu b.

**Rješenje 316**

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O=a+b+c.$$

Zbroj kutova u trokutu je 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

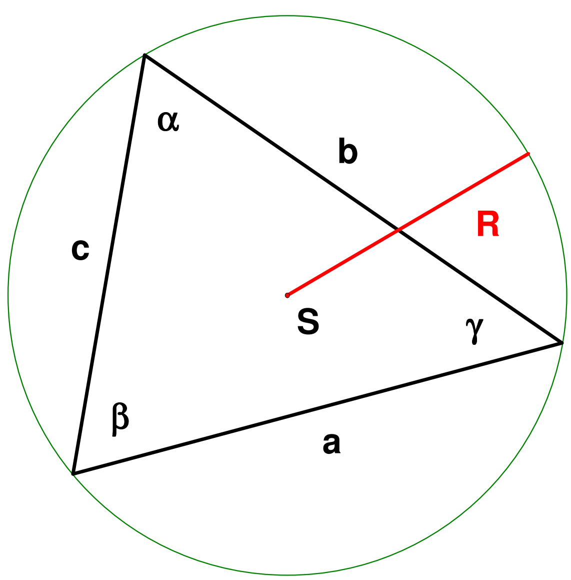
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Poučak o sinusu
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R,$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta, a R duljina polumjera opisane kružnice tog trokuta.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$



1.inačica

Prvo izračunamo mjeru kuta γ.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma=180^\circ-(\alpha+\beta) \;\Rightarrow \gamma=180^\circ-\left(37^\circ+66^\circ\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma=180^\circ-103^\circ \;\Rightarrow \gamma=77^\circ.$$

Budući da su poznata sva tri kuta u trokutu, uporabit ćemo sinusov poučak i to tako da a i c izrazimo pomoću b.

$$\left.\begin{matrix}\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\\ \frac{c}{b}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\;/\cdot b\\ \frac{c}{b}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\;/\cdot b\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a=\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}\\ c=\frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}\end{matrix}\right\}.$$

Zadan je opseg trokuta pa dalje slijedi:

$$O=a+b+c \;\Rightarrow\; a+b+c=O \;\Rightarrow\; \frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}+b+\frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}=O \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}+b+\frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}=O \;/\cdot\sin\beta \;\Rightarrow\; b\cdot\sin\alpha+b\cdot\sin\beta+b\cdot\sin\gamma=O\cdot\sin\beta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b\cdot(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=O\cdot\sin\beta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b\cdot(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=O\cdot\sin\beta \;/\cdot\frac{1}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b=\frac{O\cdot\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \;\Rightarrow\; b=\frac{60\;cm\cdot\sin 66^\circ}{\sin 37^\circ+\sin 66^\circ+\sin 77^\circ} \;\Rightarrow\; b=22.02\;cm.$$



2.inačica

Prvo izračunamo mjeru kuta γ.

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma=180^\circ-(\alpha+\beta) \;\Rightarrow \gamma=180^\circ-\left(37^\circ+66^\circ\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma=180^\circ-103^\circ \;\Rightarrow \gamma=77^\circ.$$

Uporabit ćemo sinusov poučak i to tako da a, b i c izrazimo pomoću R.

$$\left.\begin{matrix}\frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot R\\ \frac{b}{\sin\beta}=2\cdot R\\ \frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\frac{a}{\sin\alpha}=2\cdot R\;/\cdot\sin\alpha\\ \frac{b}{\sin\beta}=2\cdot R\;/\cdot\sin\beta\\ \frac{c}{\sin\gamma}=2\cdot R\;/\cdot\sin\gamma\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a=2\cdot R\cdot\sin\alpha\\ b=2\cdot R\cdot\sin\beta\\ c=2\cdot R\cdot\sin\gamma\end{matrix}\right\}.$$

Zadan je opseg trokuta pa vrijedi:

$$O=a+b+c \;\Rightarrow\; a+b+c=O \;\Rightarrow\; 2\cdot R\cdot\sin\alpha+2\cdot R\cdot\sin\beta+2\cdot R\cdot\sin\gamma=O \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot R\cdot(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=O \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot R\cdot(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=O \;/\cdot\frac{1}{2\cdot(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; R=\frac{O}{2\cdot(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)} \;\Rightarrow\; R=\frac{60\;cm}{2\cdot\left(\sin 37^\circ+\sin 66^\circ+\sin 77^\circ\right)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ R=\frac{60\ cm}{2\cdot\left(\sin 37^{\circ}+\sin 66^{\circ}+\sin 77^{\circ}\right)}\ \Rightarrow\ R=\frac{30\ cm}{\sin 37^{\circ}+\sin 66^{\circ}+\sin 77^{\circ}}\ \Rightarrow\ R=12.05\ cm.$$

Računamo duljinu stranice b.

$$\left.\begin{array}{l} R=12.05\ cm \\ \beta=66^{\circ} \\ b=2\cdot R\cdot\sin\beta \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ b=2\cdot 12.05\ cm\cdot\sin 66^{\circ}\ \Rightarrow\ b=22.02\ cm.$$

**Vježba 316**

Opseg trokuta je 6 dm, $\alpha = 37°$ i $\gamma = 77°$. Izračunati stranicu b.

**Rezultat:** 22.02 cm.

**Zadatak 317 (Tena, gimnazija)**

Duljina osnovice jednakokračnoga trokuta iznosi $\sqrt{3}\ cm,$ a udaljenost težišta trokuta od nje 2 cm. Izračunajte površinu toga trokuta.

**Rješenje 317**

Ponovimo!

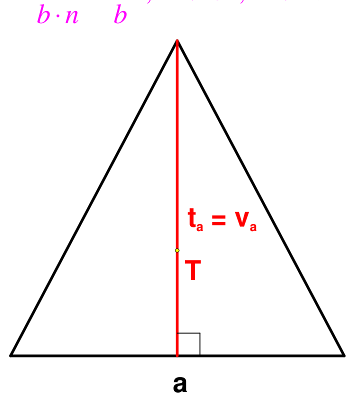
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2}\quad,\quad P=\frac{b\cdot v_b}{2}\quad,\quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$



Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh s polovištem nasuprotne stranice i dijeli trokut na dva dijela jednake površine. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj točki, težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 gledano od vrha.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$



Uočimo da se u jednakokračnom trokutu težišnica na osnovicu podudara s visinom na osnovicu. Budući da težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trokuta, udaljenost težišta T trokuta od osnovice jednaka je trećini duljine težišnice, tj. trećini duljine visine na osnovicu:

$$\frac{1}{3}\cdot t_a=\frac{1}{3}\cdot v_a.$$

Dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3}\cdot v_a=\frac{1}{3}\cdot t_a\\ \frac{1}{3}\cdot t_a=2\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{3}\cdot v_a=2\Rightarrow\frac{1}{3}\cdot v_a=2\ /\cdot 3\Rightarrow v_a=6\ cm\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}a=\sqrt{3}\ cm\ \ ,\ \ v_a=6\ cm\\ P=\frac{a\cdot v_a}{2}\end{array}\right]\Rightarrow P=\frac{\sqrt{3}\ cm\cdot 6\ cm}{2}\Rightarrow P=\frac{\sqrt{3}\ cm\cdot 6\ cm}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=3\cdot\sqrt{3}\ cm^2.$$

**Vježba 317**

Duljina osnovice jednakokračnoga trokuta iznosi $\sqrt{3}\ cm,$ a udaljenost težišta trokuta od nje 4 cm. Izračunajte površinu toga trokuta.

**Rezultat:** $P=6\cdot\sqrt{3}\ cm^2.$



**Zadatak 318 (4A, 4B, TUPŠ)**

U pravokutnome trokutu jedna kateta je duljine 5 cm, a kut nasuprot njoj ima mjeru 30°. Koja je tvrdnja točna?

*A.* Hipotenuza je duljine $10\cdot\sqrt{3}\ cm.$ *B.* Druga kateta je duljine $5\cdot\sqrt{3}\ cm.$

*C.* Opseg trokuta iznosi $\left(20+\sqrt{3}\right)\ cm.$ *D.* Površina trokuta iznosi $25\cdot\sqrt{3}\ cm^2.$

**Rješenje 318**

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad,\quad\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\quad,\quad\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad\frac{n}{1}=n.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Opseg trokuta duljina stranica a, b i c izračunava se po formuli:

$$O=a+b+c.$$

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

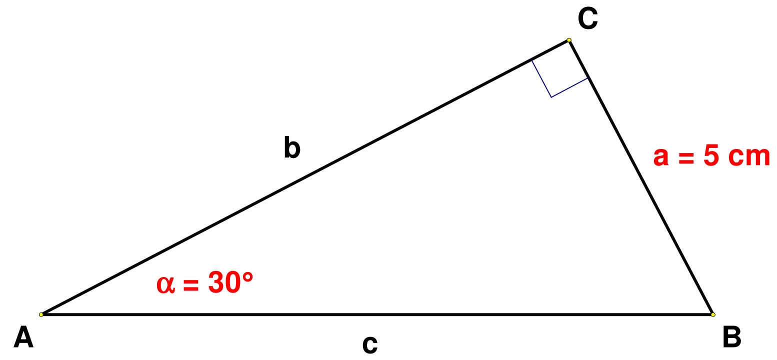
Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P=\frac{a\cdot b}{2}.$$

Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.




Pomoću funkcije sinus dobije se duljina hipotenuze c.

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}\ \Rightarrow\ \sin\alpha=\frac{a}{c}\ /\cdot\frac{c}{\sin\alpha}\ \Rightarrow\ c=\frac{a}{\sin\alpha}\ \Rightarrow\ c=\frac{5\ cm}{\sin 30^{\circ}}\ \Rightarrow\ c=\frac{5\ cm}{\frac{1}{\frac{1}{2}}}\ \Rightarrow\ c=10\ cm.$$

Računamo duljinu katete b pomoću Pitagorina poučka.

$$b^2=c^2-a^2\ \Rightarrow\ b^2=c^2-a^2\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ b=\sqrt{c^2-a^2}\ \Rightarrow\ b=\sqrt{(10\ cm)^2-(5\ cm)^2}\ \Rightarrow.$$

$$\Rightarrow\ b=\sqrt{100\ cm^2-25\ cm^2}\ \Rightarrow\ b=\sqrt{75\ cm^2}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ b=\sqrt{25\cdot 3\ cm^2}\ \Rightarrow\ b=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3\ cm^2}\ \Rightarrow\ b=5\cdot\sqrt{3}\ cm.$$

Računamo opseg trokuta ABC.

$$O=a+b+c\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}a=5\ cm\\ b=5\cdot\sqrt{3}\ cm\\ c=10\ cm\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ O=5\ cm+5\cdot\sqrt{3}\ cm+10\ cm\ \Rightarrow\ O=\left(15+5\cdot\sqrt{3}\right)\ cm.$$

Računamo površinu trokuta ABC.

$$P=\frac{a\cdot b}{2}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}a=5\ cm\\ b=5\cdot\sqrt{3}\ cm\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ P=\frac{5\ cm\cdot 5\cdot\sqrt{3}\ cm}{2}\ \Rightarrow\ P=\frac{25\cdot\sqrt{3}\ cm^2}{2}.$$

Odgovor je pod B.

**Vježba 318**

U pravokutnome trokutu jedna kateta je duljine $5\cdot\sqrt{3}\ cm$, a kut nasuprot njoj ima mjeru 60°. Koja je tvrdnja točna?

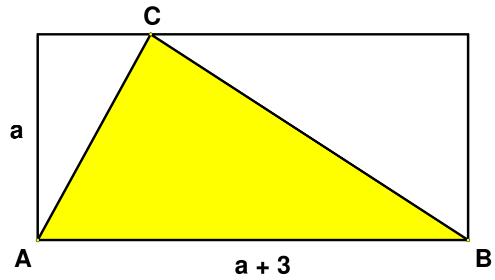
$A.$ Hipotenuza je duljine $10\cdot\sqrt{3}\ cm.$ $B.$ Druga kateta je duljine $5\ cm.$

$C.$ Opseg trokuta iznosi $\left(20+\sqrt{3}\right)\ cm.$ $D.$ Površina trokuta iznosi $25\cdot\sqrt{3}\ cm^2.$

**Rezultat:** B.

**Zadatak 319 (4A, 4B, TUPŠ)**

Opseg pravokutnika sa slike iznosi 54 cm. Koliko iznosi površina trokuta ABC?




$$A.\ 45\ cm^2 \qquad B.\ 90\ cm^2 \qquad C.\ 135\ cm^2 \qquad D.\ 180\ cm^2$$

**Rješenje 319**

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

Opseg pravokutnika

Opseg je zbroj duljina svih stranica pravokutnika

$$O = 2 \cdot (a + b).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$



Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

Budući da je zadan opseg pravokutnika, možemo izračunati duljine njegovih stranica.

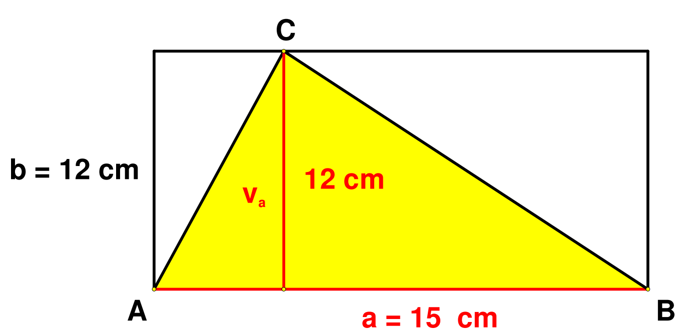
$$\left.\begin{matrix} a = a + 3 \\ b = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\, O = 2 \cdot (a + b) \,\right] \Rightarrow 54 = 2 \cdot (a + 3 + a) \Rightarrow 54 = 2 \cdot (2 \cdot a + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (2 \cdot a + 3) = 54 \Rightarrow 2 \cdot (2 \cdot a + 3) = 54 \;/ : 2 \Rightarrow 2 \cdot a + 3 = 27 \Rightarrow 2 \cdot a = 27 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a = 24 \Rightarrow 2 \cdot a = 24 \;/ : 2 \Rightarrow a = 12\ cm.$$

Stranice pravokutnika su:

$$\left.\begin{matrix} a = a + 3 \\ b = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow [\, a = 12 \,] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 12 + 3 \\ b = 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 15\ cm \\ b = 12\ cm \end{matrix}\right\}.$$



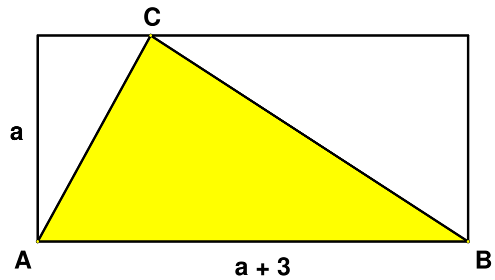
Površina trokuta ABC, sa slike, iznosi:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 15 \ cm \\ v_a = 12 \ cm \end{bmatrix} \Rightarrow P = \frac{15 \ cm \cdot 12 \ cm}{2} \Rightarrow P = 90 \ cm^2.$$

Odgovor je pod B.

**Vježba 319**

Opseg pravokutnika sa slike iznosi 5.4 dm. Koliko iznosi površina trokuta ABC?

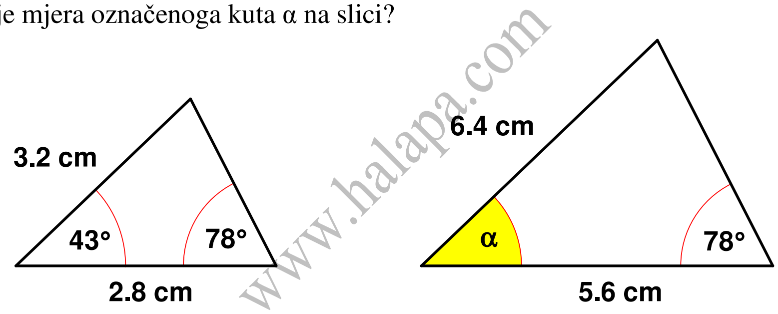



$A.\ 45\ cm^2 \qquad B.\ 90\ cm^2 \qquad C.\ 135\ cm^2 \qquad D.\ 180\ cm^2$

**Rezultat:** B.

**Zadatak 320 (4A, 4B, TUPŠ)**

Kolika je mjera označenoga kuta α na slici?






$A.\ \alpha = 43^\circ \qquad B.\ \alpha = 47^\circ \qquad C.\ \alpha = 86^\circ \qquad D.$ *ne može se odrediti*

**Rješenje 320**

Ponovimo!

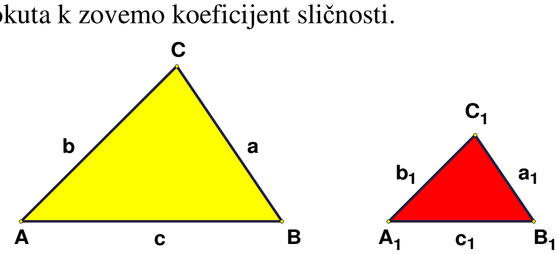
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.




Prvi poučak sličnosti (K – K)

Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.

Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

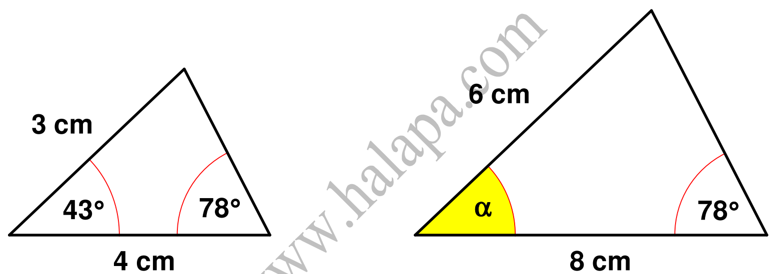
Uočimo da su dvije odgovarajuće stranice zadanih trokuta proporcionalne.

$$\frac{5.6 \ cm}{2.8 \ cm} = \frac{6.4 \ cm}{3.2 \ cm} = 2.$$

Trokuti se podudaraju u kutu nasuprot većoj stranici pa su međusobno slični (Četvrti poučak sličnosti, S – S – K). Znači da su im odgovarajući kutovi jednaki. Zato je α = 43°.
Odgovor je pod A.

**Vježba 320**

Kolika je mjera označenoga kuta α na slici?




$A. \ \alpha = 43^\circ$ $\quad B. \ \alpha = 47^\circ$ $\quad C. \ \alpha = 86^\circ$ $\quad D. \ ne \ može \ se \ odrediti$

**Rezultat:** A.