Zadatak 361 (Matej, gimnazija)

U trokutu s osnovicom duljine a i visinom duljine v upišite pravokutnik najveće moguće površine, s tim da jedna stranica pravokutnika pripada osnovici trokuta.

Rješenje 361

Ponovimo!

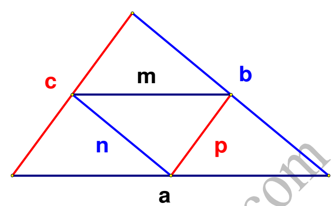
$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Srednjice trokuta

Dužine koje spajaju polovišta stranica trokuta zovu se srednjice trokuta. Svaki trokut ima tri srednjice. Svaka srednjica trokuta usporedna je sa suprotnom stranicom trokuta, a duljina joj je jednaka polovici duljine te stranice.



$$a \quad m \ , \ a = 2 \cdot m \quad , \quad b \quad n \ , \ b = 2 \cdot n \quad , \quad c \quad p \ , \ c = 2 \cdot p.$$

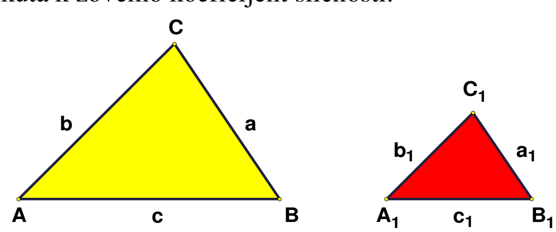
Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1.$$

$$\frac{a_1}{a} = k \quad , \quad \frac{b_1}{b} = k \quad , \quad \frac{c_1}{c} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ \ ,\ \ n\neq 0\ \ ,\ \ n\neq 1.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Površina pravokutnika je jednaka umnošku njegove duljine a i širine b.

$$P=a\cdot b.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x)=a\cdot x^{2}+b\cdot x+c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_{\circ}=-\frac{b}{2\cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.
Oznake za derivaciju su:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^{n}	$n\cdot x^{n-1}$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot\left(f(x)\right)'\quad,\quad\left(f(x)\pm g(x)\right)'=\left(f(x)\right)'\pm\left(g(x)\right)'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y'=f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x)=0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ ,\ x_i\ \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y''=f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka x_1, x_2, x_3, ... , x_i uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y''' = f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i) \neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \left(f'''(x)\right)'$$

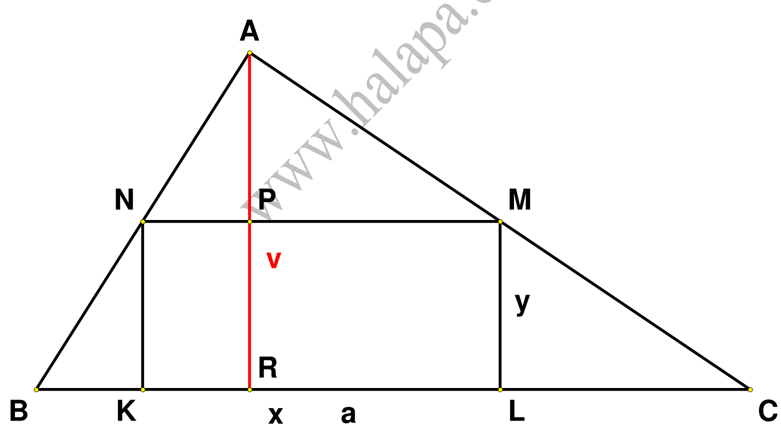
IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i)=0$, slijede daljnja istraživanja.

Ako funkcija f(x) ima derivacije druga derivacija glasi:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$



Sa slike vidi se:

$$|BC| = a \;,\; |AR| = v \;,\; |KL| = |NM| = x \;,\; |ML| = |NK| = |PR| = y$$

$$|AP| = |AR| - |PR| = v - y$$

$$\angle CBA = \angle MNA \;,\; \angle BCA = \angle NMA \;,\; \angle BAC = \angle NAM$$

Iz sličnosti trokuta ΔBCA i ΔNMA slijedi razmjer:

$$|BC| : |AR| = |NM| : |AP| \Rightarrow a : v = x : (v-y) \Rightarrow a\cdot(v-y) = v\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot v - a\cdot y = v\cdot x \Rightarrow v\cdot x = a\cdot v - a\cdot y \Rightarrow a\cdot y = a\cdot v - v\cdot x \Rightarrow a\cdot y = v\cdot(a-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot y = v\cdot(a-x) \;/\cdot \frac{1}{a} \Rightarrow y = \frac{v\cdot(a-x)}{a}.$$

Tada je ploština pravokutnika KLMN jednaka

$$P = x \cdot y \Rightarrow P = x \cdot \frac{v \cdot (a - x)}{a} \Rightarrow P = \frac{x \cdot v \cdot (a - x)}{a} \Rightarrow P = \frac{a \cdot v \cdot x - v \cdot x^2}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{a \cdot v \cdot x}{a} - \frac{v \cdot x^2}{a} \Rightarrow P = \frac{a \cdot v \cdot x}{a} - \frac{v \cdot x^2}{a} \Rightarrow P = v \cdot x - \frac{v}{a} \cdot x^2 \Rightarrow P = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x.$$

1.inačica

Uočimo da smo dobili kvadratnu funkciju

$$P(x) = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x.$$

Računamo za koju vrijednost x ona ima maksimum.

$$\left. \begin{array}{l} P(x) = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x \\ a = -\frac{v}{a} \; , \; b = v \; , \; c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[x_\circ = -\frac{b}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow x_\circ = -\frac{v}{2 \cdot \left(-\frac{v}{a} \right)} \Rightarrow x_\circ = \frac{\frac{v}{1}}{2 \cdot \frac{v}{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_\circ = \frac{\frac{v}{1}}{2 \cdot \frac{v}{a}} \Rightarrow x_\circ = \frac{\frac{1}{1}}{2 \cdot \frac{1}{a}} \Rightarrow x_\circ = \frac{a}{2}.$$

Prema tome, ploština pravokutnika je najveća ako je $x = \frac{a}{2}$, a to znači da je $\overline{NM}$ srednjica trokuta ABC.

2.inačica

Potrebno je odrediti vrijednost x za koju P(x) ima maksimalnu vrijednost. Njezina je derivacija:

$$P(x) = -\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x \Rightarrow P'(x) = \left(-\frac{v}{a} \cdot x^2 + v \cdot x \right)' \Rightarrow P'(x) = \left(-\frac{v}{a} \cdot x^2 \right)' + (v \cdot x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(x) = -\frac{v}{a} \cdot \left(x^2 \right)' + v \cdot x' \Rightarrow P'(x) = -\frac{v}{a} \cdot 2 \cdot x + v \cdot 1 \Rightarrow P'(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x + v.$$

Ako funkcija P(x) ima ekstremnu vrijednost, mora biti:

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x + v = 0 \Rightarrow -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x = -v \Rightarrow -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x = -v \; / \cdot \left(-\frac{a}{2 \cdot v} \right) \Rightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Da bismo utvrdili da za $x = \frac{a}{2}$ funkcija P(x) ima maksimum treba pokazati da je $P''(x) < 0$ za $x = \frac{a}{2}$.

Druga derivacija funkcije P(x) je:

$$P''(x) = \left(P'(x) \right)' \Rightarrow P''(x) = \left(-2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x + v \right)' \Rightarrow P''(x) = \left(-2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x \right)' + v' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot x' + 0 \Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \cdot 1 \Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} \Rightarrow P''(x) = -2 \cdot \frac{v}{a} < 0,$$

tj. funkcija P(x) ima u $x = \frac{a}{2}$ maksimum. Prema tome, ploština pravokutnika je najveća ako je $x = \frac{a}{2}$, a to znači da je $\overline{NM}$ srednjica trokuta ABC.

Vježba 361

U trokutu s osnovicom duljine c i visinom duljine v upišite pravokutnik najveće moguće površine, s tim da jedna stranica pravokutnika pripada osnovici trokuta.

Rezultat: $x = \frac{c}{2}.$

Zadatak 362 (Borna, srednja škola)

Jedna kateta pravokutnog trokuta dulja je od druge za 10 cm, a kraća je od hipotenuze za 10 cm. Kolike su stranice ovog trokuta?

Rješenje 362

Ponovimo!

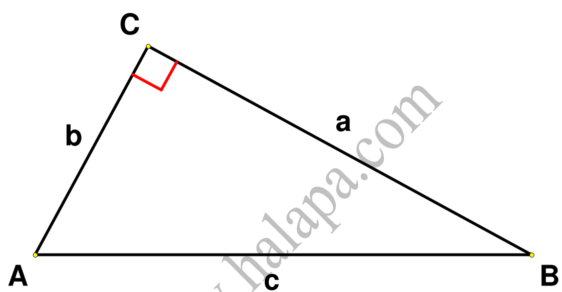
$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \quad , \quad |BC| = a \quad , \quad |CA| = b$$

Neka je x duljina veće katete.

$$a = |BC| = x.$$

Tada je:

- duljina kraće katete

$$b = |CA| = x - 10$$

- duljina hipotenuze

$$c = |AB| = x + 10.$$

Prema Pitagorinu poučku imamo

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (x+10)^2 = x^2 + (x-10)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 20 \cdot x + 100 = x^2 + x^2 - 20 \cdot x + 100 \Rightarrow x^2 + 20 \cdot x + 100 = x^2 + x^2 - 20 \cdot x + 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 \cdot x = x^2 - 20 \cdot x \Rightarrow x^2 - 20 \cdot x = 20 \cdot x \Rightarrow x^2 - 20 \cdot x - 20 \cdot x = 0 \Rightarrow x^2 - 40 \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (x-40) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x - 40 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \text{ nema smisla} \\ x = 40 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 40 \; cm \Rightarrow a = 40 \; cm.$$

Dalje će biti:

$$\left.\begin{array}{l} b=|CA|=x-10 \\ c=|AB|=x+10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=40-10 \\ c=40+10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=30\ cm \\ c=50\ cm \end{array}\right\}.$$

Vježba 362

Jedna kateta pravokutnog trokuta dulja je od druge za 1 cm, a kraća je od hipotenuze za 1 cm. Kolike su stranice ovog trokuta?

Rezultat: 3 cm, 4 cm, 5 cm.

Zadatak 363 (Ante, srednja škola)

Ako za šiljaste kutove trokuta ABC vrijedi jednakost $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$, kakav je trokut ABC?

Rješenje 363

Ponovimo!

$$\sin x=\cos\left(90^\circ-x\right) \quad , \quad \cos x=\sin\left(90^\circ-x\right) \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \ , \ a\ge 0.$$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

Šiljasti kut je kut s mjerom manjom od 90º.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Za šiljaste kutove α i β pravokutnog trokuta vrijedi:

$$\alpha+\beta=90^\circ.$$

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\sin^2\beta \Rightarrow \sin^2\alpha=\cos^2\beta \Rightarrow \sin^2\alpha=\cos^2\beta \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha, \beta \text{ šiljasti kutovi} \\ \sin\alpha>0 \ , \ \cos\beta>0 \end{array}\right] \Rightarrow \sin\alpha=\cos\beta \Rightarrow \sin\alpha=\sin\left(90^\circ-\beta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=90^\circ-\beta \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ.$$

Trokut ABC je pravokutan.

Vježba 363

Ako za šiljaste kutove trokuta ABC vrijedi jednakost $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$, kakav je trokut ABC?

Rezultat: Pravokutan.