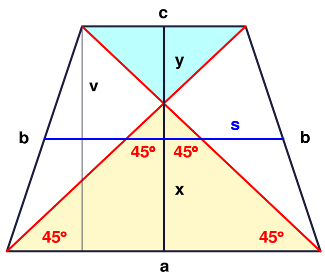
Zadatak 021 (Romana, gimnazija)

Srednjica jednakokračnog trapeza ima duljinu 5. Ako su dijagonale međusobno okomite, kolika je njegova površina?

Rješenje 021



Budući da je u jednakokračnom pravokutnom trokutu visina osnovice jednaka polovini osnovice, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow v=x+y=\frac{a}{2}+\frac{c}{2}=\frac{a+c}{2}=s=5.$$

Površina jednakokračnog trapeza je:

$$P = s \cdot v = 5 \cdot 5 = 25.$$

Vježba 021

Srednjica jednakokračnog trapeza ima duljinu 5. Ako su dijagonale međusobno okomite, kolika je njegova površina?

Rezultat: 100.

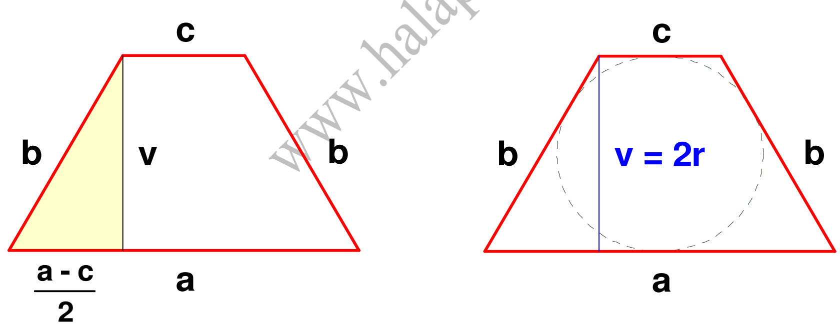
Zadatak 022 (Marko, elektrotehnička škola)

Osnovice jednakokračnog trapeza imaju duljine a i c. Nađite površinu kruga upisanog u taj trapez.

Rješenje 022

Četverokut kojemu sve četiri stranice diraju jednu kružnicu naziva se tangencijalni četverokut i vrijedi da je zbroj duljina suprotnih stranica međusobno jednak. Tada je:

$$2 \cdot b = a + c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}.$$



Sa slika vidi se:

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow v^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+c}{2}+\frac{a-c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+c}{2}-\frac{a-c}{2}\right) = \frac{2\cdot a}{2}\cdot\frac{2\cdot c}{2} = a\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = a \cdot c.$$

Budući da je visina trapeza jednaka promjeru upisanog kruga, dobije se:

$$v = 2\cdot r \Rightarrow r = \frac{1}{2}\cdot v \Rightarrow P = r^2 \cdot \pi = \left(\frac{1}{2}\cdot v\right)^2 \cdot \pi = \frac{1}{4}\cdot v^2 \cdot \pi = \frac{a\cdot c\cdot \pi}{4}.$$

Vježba 022

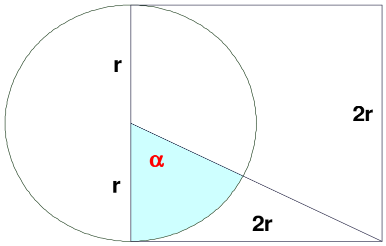
Osnovice jednakokračnog trapeza imaju duljine 10 i 4. Nađite površinu kruga upisanog u taj trapez.

Rezultat: $10 \cdot \pi.$

Zadatak 023 (Ivan, strojarska škola)

Koliki dio u postocima od površine kvadrata iznosi iscrtani dio na slici?

Rješenje 023



Računamo središnji kut α i površinu kružnog isječka:

$$tg\,\alpha=\frac{2\cdot r}{r}\ \Rightarrow\ tg\,\alpha=2\ \Rightarrow\ \alpha=arctg\,2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P=\frac{r^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360^0}=\frac{r^2\cdot\pi\cdot arctg\,2}{360^0}.$$

Omjer površine kružnog isječka (iscrtanog dijela) i površine kvadrata duljine stranice 2r iznosi:

$$\frac{\frac{r^2\cdot\pi\cdot\alpha}{360^0}}{(2\cdot r)^2}=\frac{r^2\cdot\pi\cdot arctg\,2}{4\cdot r^2\cdot 360^0}=\frac{\pi\cdot 63.43495^0}{4\cdot 360^0}=0.1383=13.83\%.$$

Vježba 023

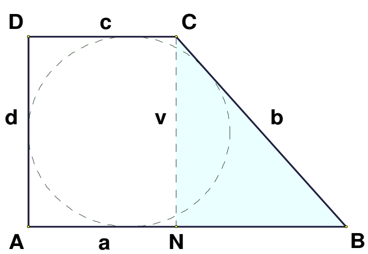
Koliki dio u postocima od površine kvadrata iznosi neiscrtani dio na slici?

Rezultat: 86.17%.

Zadatak 024 (Mira, gimnazija)

Oko kružnice je opisan trapez čije paralelne stranice iznose 4 cm i 2 cm i koji ima dva prava kuta. Nađi njegovu površinu.

Rješenje 024



a = | AB | = 4, b = | BC |, c = | CD | = 2,
d = | DA | = | CN | = v

Budući da je četverokut tangencijalan, vrijedi:

$$a+c=b+d\ \Rightarrow\ 4+2=b+d\ \Rightarrow\ b+d=6.$$

Uočimo pravokutan trokut NBC:

| NC | = d = v, | BC | = b,
| NB | = | AB | – | AN | = | AB | – | CD | = 4 – 2 = 2

$$\left.\begin{array}{l} b+d=6 \\ \underbrace{|BC|^2=|CN|^2+|NB|^2}_{\text{Pitagorin poučak}} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} d=6-b \\ b^2=d^2+2^2 \end{array}\right\}\Rightarrow b^2=(6-b)^2+2^2\ \Rightarrow\ b^2=36-12\cdot b+b^2+4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 12\cdot b=40\ /:12\ \Rightarrow\ b=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}.$$

Visina trapeza iznosi:

$$v=d=6-\frac{10}{3}=\frac{8}{3}.$$

Površina trapeza ima vrijednost:

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v=\frac{4+2}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{6}{2}\cdot\frac{8}{3}=8.$$

Vježba 024

Oko kružnice je opisan trapez čije paralelne stranice iznose 4 cm i 2 cm i koji ima dva prava kuta. Nađi njegov opseg.

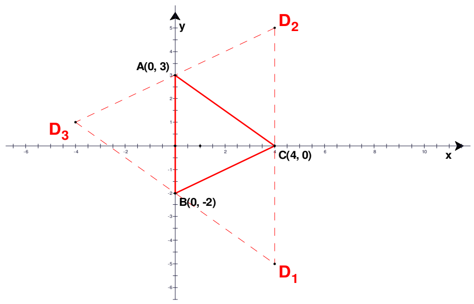
Rezultat: O = a + b + c + d = (a + c) + (b + d) = 12.

Zadatak 025 (Romana, gimnazija)

Tri uzastopna vrha paralelograma su u točkama A(0, 3), B(0, – 2), C(4, 0). U kojoj je točki četvrti vrh?

Rješenje 025

Sa slike vidi se da zadatak može imati tri rješenja. Zadane točke A, B i C su polovišta stranica trokuta $D_1D_2D_3$. Tada je:



$$\left.\begin{array}{l} A(0,\,3) \text{ je polovište} \\ \text{dužine } \overline{D_2D_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x_2+x_3}{2}=0 \;/\cdot 2 \\ \dfrac{y_2+y_3}{2}=3 \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2+x_3=0 \\ y_2+y_3=6 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} B(0,\,-2) \text{ je polovište} \\ \text{dužine } \overline{D_3D_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x_3+x_1}{2}=0 \;/\cdot 2 \\ \dfrac{y_3+y_1}{2}=-2 \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3+x_1=0 \\ y_3+y_1=-4 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} C(4,\,0) \text{ je polovište} \\ \text{dužine } \overline{D_1D_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1+x_2}{2}=4 \;/\cdot 2 \\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=0 \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=8 \\ y_1+y_2=0 \end{array}\right\}.$$

Rješavajući sustave jednadžbi dobijemo tražene rezultate.

$$\left.\begin{array}{l} x_2+x_3=0 \\ x_3+x_1=0 \\ x_1+x_2=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot x_1+2\cdot x_2+2\cdot x_3=8 \;/:2 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=4 \\ x_2+x_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+0=4 \Rightarrow x_1=4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3+x_1=0 \\ x_1+x_2=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3+4=0 \\ 4+x_2=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3=-4 \\ x_2=4 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} y_2+y_3=6 \\ y_3+y_1=-4 \\ y_1+y_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot y_1+2\cdot y_2+2\cdot y_3=2 \;/:2 \Rightarrow y_1+y_2+y_3=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1+y_2+y_3=1 \\ y_2+y_3=6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1+6=1 \Rightarrow y_1=-5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_3+y_1=-4 \\ y_1+y_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_3-5=-4 \\ -5+y_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_3=1 \\ y_2=5 \end{array}\right\}.$$

Mogući četvrti vrh je u točkama:

$$D_1(4,\,-5),\; D_2(4,\,5),\; D_3(-4,\,1).$$

Vježba 025

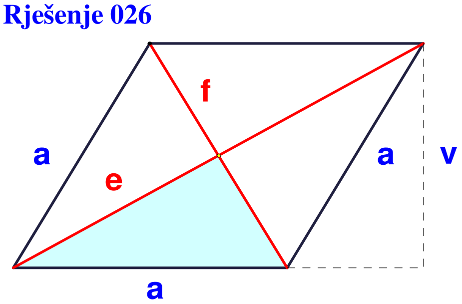
Tri uzastopna vrha paralelograma su u točkama A(0, 3), B(0, – 2), C(4, 0). U kojoj je točki četvrti vrh ako se nalazi u prvom kvadrantu?

Rezultat: D(4, 5).

Zadatak 026 (Romana, gimnazija)

Ako su dijagonale romba 6 i 8, koliko iznosi njegova visina?

Rješenje 026



Budući da su dijagonale romba međusobno okomite i raspolavljaju se, duljina stranice romba iznosi (uoči pravokutan trokut):

$$a^2=\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2 \Rightarrow a=\sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2+\left(\frac{f}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

Duljinu visine romba odredit ćemo uporabom formula za površinu romba:

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{e\cdot f}{2} \\ P=a\cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot v=\frac{e\cdot f}{2} \;/\cdot\frac{1}{a} \Rightarrow v=\frac{e\cdot f}{2\cdot a}=\frac{6\cdot 8}{2\cdot 5}=\frac{48}{10}=4.8.$$

Vježba 026

Ako su dijagonale romba 6 i 8, koliko iznosi njegov opseg?

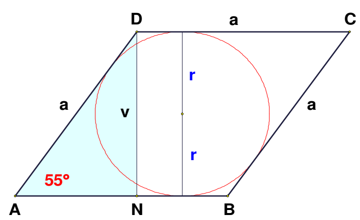
Rezultat: 20.

Zadatak 027 (Gregor, gimnazija)

Romb ima stranicu duljine a = 12 cm i šiljasti kut 55º. Koliko iznosi površina kruga koji dodiruje sve njegove stranice?

Rješenje 027

Iz pravokutnog trokuta AND dobije se duljina visine v:



$$\sin 55^0=\frac{v}{a} \Rightarrow v=a\cdot\sin 55^0.$$

Budući da je promjer upisanog kruga rombu jednak visini romba, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} v=2\cdot r \\ v=a\cdot\sin 55^0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot r=a\cdot\sin 55^0 \;/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{a}{2}\cdot\sin 55^0=\frac{12}{2}\cdot\sin 55^0=6\cdot\sin 55^0.$$

Površina kruga iznosi:

$$P=r^2\cdot\pi \Rightarrow P=\left(6\cdot\sin 55^0\right)^2\cdot\pi=\left.\begin{array}{l} 75.85 \text{ ako je } \pi\approx 3.14 \\ 75.89 \text{ ako je } \pi\approx 3.141592654 \end{array}\right\}.$$

Vježba 027

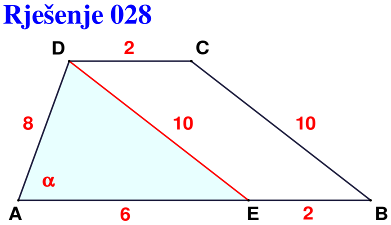
Romb ima stranicu duljine a = 12 cm i šiljasti kut 30º. Koliko iznosi površina kruga koji dodiruje sve njegove stranice?

Rezultat: $9\cdot\pi$.

Zadatak 028 (Vedrana, gimnazija)

Duljine paralelnih stranica trapeza su 8 cm i 2 cm, a duljine krakova su 10 cm i 8 cm. Kolika je površina trapeza?

Rješenje 028



Iz trokuta AED uporabom kosinusovog poučka dobije se:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{6^2+8^2-10^2}{2\cdot 6\cdot 8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{0}{96} \Rightarrow \cos\alpha=0 \Rightarrow \alpha=90^0.$$

Budući da je α pravi kut, površina trapeza iznosi:

$$P=\frac{|AB|+|DC|}{2}\cdot|AD|=\frac{8+2}{2}\cdot 8=40\ cm^2.$$

Vježba 028

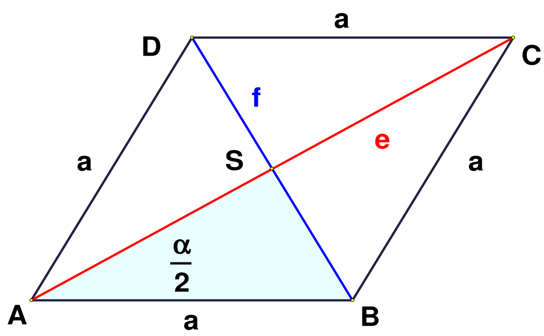
Duljine paralelnih stranica trapeza su 4 cm i 1 cm, a duljine krakova su 5 cm i 4 cm. Kolika je površina trapeza?

Rezultat: $10\ cm^2$.

Zadatak 029 (Vedrana, gimnazija)

Ako je stranica romba geometrijska sredina njegovih dijagonala, koliko iznosi šiljasti kut romba?

Rješenje 029



Ponovimo!

Dijagonale romba su međusobno okomite i raspolavljaju se.

Geometrijska sredina brojeva x i y je: $\sqrt{x \cdot y}$.

Iz priložene slike vidi se da je trokut ABS pravokutan pa vrijedi:

- $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{f}{2}}{\frac{e}{2}} \Rightarrow tg\frac{\alpha}{2} = \frac{f}{e},$
- $\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = a^2.$

Prema uvjetu zadatka je:

$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{e \cdot f} \\ \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \sqrt{e \cdot f} \;/^2 \\ \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = e \cdot f \\ \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = e \cdot f \Rightarrow \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = e \cdot f \;/\cdot \frac{4}{e^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{f^2}{e^2} = 4 \cdot \frac{f}{e} \Rightarrow \left(\frac{f}{e}\right)^2 - 4 \cdot \frac{f}{e} + 1 = 0 \Rightarrow \left[tg\frac{\alpha}{2} = \frac{f}{e}\right] \Rightarrow tg^2\frac{\alpha}{2} - 4 \cdot tg\frac{\alpha}{2} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(tg\frac{\alpha}{2}\right)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow \left(tg\frac{\alpha}{2}\right)_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} \Rightarrow \left(tg\frac{\alpha}{2}\right)_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(tg\frac{\alpha}{2}\right)_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 3}}{2} \Rightarrow \left(tg\frac{\alpha}{2}\right)_{1,2} = \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(tg\frac{\alpha}{2}\right)_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} tg\frac{\alpha_1}{2} = 2 + \sqrt{3} \\ tg\frac{\alpha_2}{2} = 2 - \sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\alpha_1}{2} = 75^0 \\ \frac{\alpha_2}{2} = 15^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 150^0 \\ \alpha_2 = 30^0 \end{array}\right\}.$$

Šiljasti kut romba iznosi 30°.

Vježba 029

Ako je stranica romba geometrijska sredina njegovih dijagonala, koliko iznosi tupi kut romba?

Rezultat: 150°.

Zadatak 030 (Romana, gimnazija)

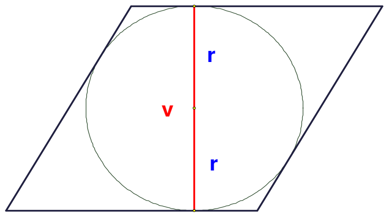
U romb površine 600 cm^2 upisan je krug površine 144 · π cm^2. Koliko iznosi opseg romba?

Rješenje 030

Budući da je krug upisan u romb vrijedi:

$$r = \frac{1}{2} \cdot v.$$

Iz površine romba i kruga dobije se:



$$\left.\begin{array}{l} P=a\cdot v \\ P=\left(\frac{v}{2}\right)^2\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot v=600 \\ \left(\frac{v}{2}\right)^2\cdot\pi=144\cdot\pi \;/:\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot v=600 \\ \frac{v^2}{4}=144 \;/\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot v=600 \\ v^2=576 \;/\sqrt{\ } \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot v=600 \\ v=24 \end{array}\right\} \Rightarrow 24\cdot a=600 \;/:24 \Rightarrow a=25.$$

Opseg romba iznosi:

$$O = 4 \cdot a = 4 \cdot 25 = 100 \text{ cm}.$$

Vježba 030

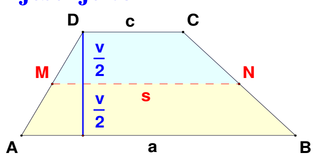
U romb površine 600 cm^2 upisan je krug površine $100 \cdot \pi$ cm^2. Koliko iznosi opseg romba?

Rezultat: 120 cm.

Zadatak 031 (Romana, gimnazija)

Osnovice trapeza imaju duljine a i c. Koliki je omjer površina na koje je trapez razdijeljen srednjicom (spojnicom središta krakova)?

Rješenje 031



Srednjica trapeza ima duljinu:

$$s=\frac{a+c}{2}.$$

Trapez ABCD razdijeljen je srednjicom na dva trapeza: ABNM i MNCD. Gledamo omjer površina trapeza ABNM i MNCD:

$$\frac{P_{ABNM}}{P_{MNCD}}=\frac{\frac{a+s}{2}\cdot\frac{v}{2}}{\frac{s+c}{2}\cdot\frac{v}{2}} \Rightarrow \frac{P_{ABNM}}{P_{MNCD}}=\frac{a+s}{s+c} \Rightarrow \frac{P_{ABNM}}{P_{MNCD}}=\frac{a+\frac{a+c}{2}}{\frac{a+c}{2}+c} \Rightarrow \frac{P_{ABNM}}{P_{MNCD}}=\frac{\frac{2\cdot a+a+c}{2}}{\frac{a+c+2\cdot c}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ABNM}}{P_{MNCD}}=\frac{3\cdot a+c}{a+3\cdot c}.$$

Vježba 031

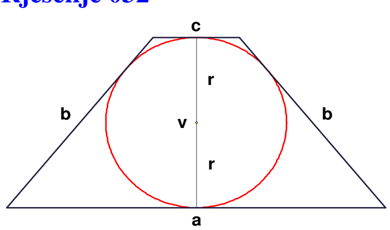
Osnovice trapeza imaju duljine 3 i 1. Koliki je omjer površina na koje je trapez razdijeljen srednjicom (spojnicom središta krakova)?

Rezultat: $\frac{5}{3}.$

Zadatak 032 (Maturant, strojarska škola)

Oko kruga polumjera 1 opisan je jednakokračan trapez površine 5. Koliko iznosi opseg trapeza?

Rješenje 032



Ponovimo!

Četverokut kojemu sve četiri stranice diraju jednu kružnicu naziva se tangencijalni četverokut.

Četverokut je tangencijalni ako i samo ako su zbrojevi duljina suprotnih stranica međusobno jednaki. Iz slike vidi se:

$$\left.\begin{array}{l} v=2\cdot r=2\cdot 1=2 \\ a+c=2\cdot b \end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l} P=\frac{a+c}{2}\cdot v \\ O=a+2\cdot b+c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=\frac{2\cdot b}{2}\cdot v \\ O=2\cdot b+2\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=b\cdot v \\ O=4\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=b\cdot v \\ b=\frac{O}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\frac{O}{4}\cdot v \;/\cdot 4 \Rightarrow 4\cdot P=O\cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O=\frac{4\cdot P}{v}=\frac{4\cdot 5}{2}=10.$$

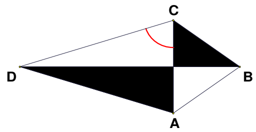
Vježba 032

Oko kruga polumjera 1 opisan je jednakokračan trapez površine 10. Koliko iznosi opseg trapeza?

Rezultat: 20.

Zadatak 033 (2A, hotelijerska škola)

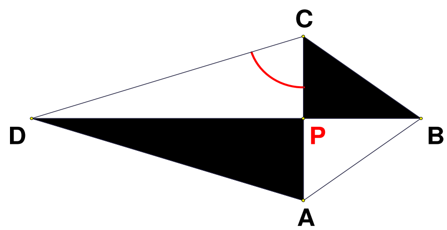
Koliko m^2 tamnog papira je potrebno za izradu zmaja (vidi sliku)?



$$|AB| = |CB| = 1.1\ m$$
$$|AC| = 1.2\ m$$
$$\angle\ ACD = 70^0$$

Rješenje 033

1.inačica



Sa slike vidi se:

$$|CP| = \frac{1}{2} \cdot |CA| = \frac{1}{2} \cdot 1.2\ m = 0.6\ m,$$

$P_{DAP} = P_{DPC}$ jer su trokuti ΔDAP i ΔDPC sukladni (podudaraju se u dvije stranice i kutu među njima).

Iz pravokutnog trokuta CPB pomoću Pitagorina poučka dobije se | PB | :

$$|PB|^2 = |CB|^2 - |CP|^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow |PB| = \sqrt{|CB|^2 - |CP|^2} \Rightarrow |PB| = \sqrt{1.1^2 - 0.6^2} \Rightarrow |PB| = 0.92\ m.$$

Površina pravokutnog trokuta CPB je:

$$P_{CPB} = \frac{|CP| \cdot |PB|}{2} \Rightarrow P_{CPB} = \frac{0.6\ m \cdot 0.92\ m}{2} = 0.28\ m^2.$$

Iz pravokutnog trokuta DPC izračunamo | DP | :

$$tg\, 70^0 = \frac{|DP|}{|CP|} \Rightarrow |DP| = |CP| \cdot tg\, 70^0.$$

Površina pravokutnog trokuta DAP iznosi:

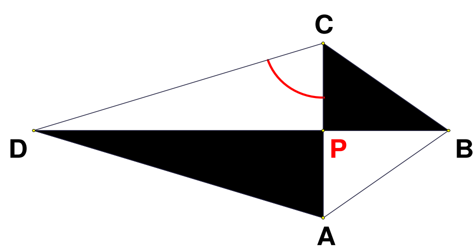
$$P_{DAP} = P_{DPC} \Rightarrow P_{DAP} = \frac{|CP| \cdot |DP|}{2} \Rightarrow P_{DAP} = \frac{|CP| \cdot |CP| \cdot tg\, 70^0}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{DAP} = \frac{0.6\ m \cdot 0.6\ m \cdot tg\, 70^0}{2} = 0.49\ m^2.$$

Ukupna površina tamnog papira iznosi:

$$P = P_{CPB} + P_{DAP} \Rightarrow P = 0.28\ m^2 + 0.49\ m^2 = 0.77\ m^2.$$

2.inačica



Sa slike vidi se:

$$|CP| = \frac{1}{2} \cdot |CA| = \frac{1}{2} \cdot 1.2\ m = 0.6\ m,$$

Četverokut ABCD je deltoid. Četverokut s okomitim dijagonalama koji ima barem jednu os simetrije zove se deltoid. Deltoid ima dva para susjednih sukladnih stranica. Ploština (površina) je deltoida jednaka polovici produkta duljina njegovih dijagonala, dakle:

$$P_{ABCD} = \frac{|AC| \cdot |DB|}{2}.$$

Iz pravokutnog trokuta CPB pomoću Pitagorina poučka dobije se | PB | :

$$|PB|^2 = |CB|^2 - |CP|^2 \;/\sqrt{\;} \;\Rightarrow\; |PB| = \sqrt{|CB|^2 - |CP|^2} \;\Rightarrow\; |PB| = \sqrt{1.1^2 - 0.6^2} \;\Rightarrow\; |PB| = 0.92\ m.$$

Iz pravokutnog trokuta DPC izračunamo $|DP|$:

$$tg\,70^0 = \frac{|DP|}{|CP|} \;\Rightarrow\; |DP| = |CP| \cdot tg\,70^0.$$

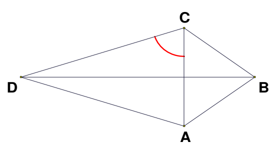
Ukupna površina tamnog papira iznosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \;\Rightarrow\; P = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AC| \cdot |DB|}{2} \;\Rightarrow\; P = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AC| \cdot \left(|CP| \cdot tg\,70^0 + |PB|\right)}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; P = \frac{|AC| \cdot \left(|CP| \cdot tg\,70^0 + |PB|\right)}{4} \;\Rightarrow\; P = \frac{1.2\ m \cdot \left(0.6\ m \cdot tg\,70^0 + 0.92\ m\right)}{4} = 0.77\ m^2.$$

Vježba 033

Koliko m^2 papira je potrebno za izradu zmaja (vidi sliku)?



$$|AB| = |CB| = 1.1\ m$$

$$|AC| = 1.2\ m$$

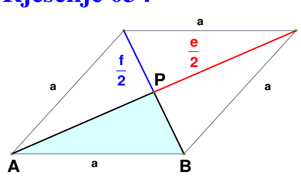
$$\angle ACD = 70^0$$

Rezultat: $1.54\ m^2$.

Zadatak 034 (Mira, gimnazija)

U rombu duljine stranice a veća dijagonala je 5 puta dulja od manje. Kolika je površina romba?

Rješenje 034



U rombu su dijagonale međusobno okomite i raspolavljaju se. Iz pravokutnog trokuta ABP pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2 \;\Rightarrow\; \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = a^2 \;/\cdot 4 \;\Rightarrow\; e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2.$$

Budući da je uvjet zadatka e = 5 · f, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} e^2 + f^2 = 4 \cdot a^2 \\ e = 5 \cdot f \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; (5 \cdot f)^2 + f^2 = 4 \cdot a^2 \;\Rightarrow\; 25 \cdot f^2 + f^2 = 4 \cdot a^2 \;\Rightarrow\; 26 \cdot f^2 = 4 \cdot a^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f^2 = \frac{4}{26} \cdot a^2 \;\Rightarrow\; f^2 = \frac{2}{13} \cdot a^2.$$

Površina romba iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \\ e = 5 \cdot f \;\;,\;\; f^2 = \frac{2}{13} \cdot a^2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot f \cdot f \;\Rightarrow\; P = \frac{5}{2} \cdot f^2 \;\Rightarrow\; P = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{13} \cdot a^2 \;\Rightarrow\; P = \frac{5}{13} \cdot a^2.$$

Vježba 034

U rombu duljine stranice 13 cm veća dijagonala je 5 puta dulja od manje. Kolika je površina romba?

Rezultat: $65\ cm^2$.

Zadatak 035 (Iva, gimnazija)

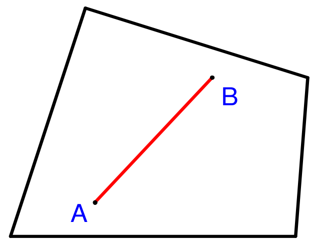
Tri vrha četverokuta ujedno su vrhovi jednakostraničnog trokuta sa stranicom 6, dok je četvrti vrh težište tog trokuta. Kolika je površina četverokuta?

Rješenje 035

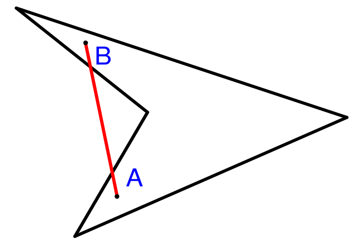
Ponovimo!

Ravninski likovi za koje vrijedi da spojnica bilo koje dvije unutarnje točke lika leži unutar lika zovu se konveksni likovi.

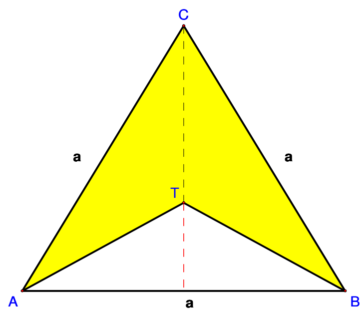
Ravninski likovi za koje vrijedi da postoje barem dvije unutarnje točke lika takve da postoje točke na njihovoj spojnici koje ne leže unutar lika zovu se nekonveksni likovi.



konveksan četverokut



nekonveksan četverokut



$a = |AB| = |BC| = |CA| = 6$

Budući da je T težište jednakostraničnog trokuta ABC, površina četverokuta ATBC iznosi:

$$P_{ATBC} = \frac{2}{3} \cdot P_{ABC} \Rightarrow P_{ATBC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ATBC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{36 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \sqrt{3}.$$

Uočite da je četverokut ATBC nekonveksan lik.

Vježba 035

Tri vrha četverokuta ujedno su vrhovi jednakostraničnog trokuta sa stranicom 12, dok je četvrti vrh težište tog trokuta. Kolika je površina četverokuta?

Rezultat: $24 \cdot \sqrt{3}.$

Zadatak 036 (Mario, gimnazija)

Izračunajte kut između dijagonala paralelograma kojemu su duljine stranica a = 9 i b = 6, a kut između njih je α = 60°.

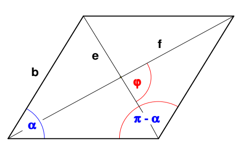
Rješenje 036

Ponovimo!

Kosinusov poučak:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \;,\; b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \;,\; c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Površina paralelograma: $P = \frac{e \cdot f}{2} \cdot \sin\varphi \;,\; P = a \cdot b \cdot \sin\alpha.$



Koristeći poučak o kosinusu izračunamo duljine dijagonala e i f:

$$\left.\begin{array}{l} e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha \\ f^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\pi - \alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha \\ f^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha} \\ f = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha} \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{l} e = \sqrt{9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos 60^0} \\ f = \sqrt{9^2 + 6^2 + 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos 60^0} \end{array}\right\} =$$

$$= \left.\begin{array}{l} e = 7.94 \\ f = 13.08 \end{array}\right\}.$$

Iz formula za površinu paralelograma dobivamo da je:

$$\left.\begin{array}{l} P = \frac{e \cdot f}{2} \cdot \sin\varphi \\ P = a \cdot b \cdot \sin\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{e \cdot f}{2} \cdot \sin\varphi = a \cdot b \cdot \sin\alpha \;/ \cdot \frac{2}{e \cdot f} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha}{e \cdot f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha}{e \cdot f}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \sin 60^0}{7.94 \cdot 13.08}\right) = 64^0 14'.$$

Vježba 036

Izračunajte veći kut između dijagonala paralelograma kojemu su duljine stranica a = 9 i b = 6, a kut između njih je α = 60°.

Rezultat: $115^0 46'$.

Zadatak 037 (Mary, gimnazija)

Ako je omjer većeg kuta među dijagonalama pravokutnika prema manjem kutu 2 : 1, koliki je omjer stranica pravokutnika a : b (a > b)?

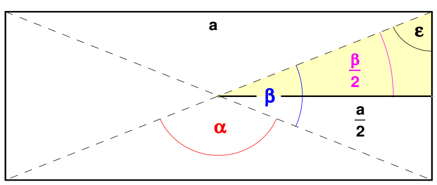
Rješenje 037

Iz omjera kutova odredimo njihove vrijednosti:

$$\left.\begin{matrix} \alpha + \beta = 180^0 \\ a : \beta = 2 : 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha + \beta = 180^0 \\ a = 2 \cdot k \ , \ \beta = k \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \cdot k + k = 180^0 \Rightarrow 3 \cdot k = 180^0 \ /:3 \Rightarrow k = 60^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 2 \cdot 60^0 = 120^0 \\ \beta = 60^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varepsilon + \frac{\beta}{2} + 90^0 = 180^0 \Rightarrow \varepsilon = 60^0.$$

Iz osjenčanog pravokutnog trokuta slijedi



$$tg\,\varepsilon = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}} \Rightarrow tg\,\varepsilon = \frac{a}{b} \Rightarrow tg\,60^0 = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow a : b = \sqrt{3} : 1.$$

Vježba 037

Ako je omjer većeg kuta među dijagonalama pravokutnika prema manjem kutu 2 : 1, koliki je omjer stranica pravokutnika b : a (a > b)?

Rezultat: $b : a = 1 : \sqrt{3}.$

Zadatak 038 (Maturant, gimnazija)

U četverokutu se unutarnji kutovi odnose kao 1 : 3 : 7 : 5. Nađite najveći kut u tom četverokutu.

Rješenje 038

$$\left.\begin{matrix} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0 \\ \alpha : \beta : \gamma : \delta = 1 : 3 : 7 : 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0 \\ \alpha = x \ , \ \beta = 3 \cdot x \ , \ \gamma = 7 \cdot x \ , \ \delta = 5 \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + 3 \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x = 360^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot x = 360^0 \ /:16 \Rightarrow x = 22.5^0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{najveći kut} \\ \gamma = 7 \cdot x \end{bmatrix} \Rightarrow \gamma = 7 \cdot 22.5^0 = 157.5^0.$$

Vježba 038

U četverokutu se unutarnji kutovi odnose kao 1 : 3 : 7 : 5. Nađite najmanji kut u tom četverokutu.

Rezultat: α = 22.5°.

Zadatak 039 (Maturant, gimnazija)

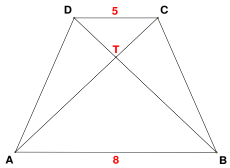
U jednakokračnom trapezu s duljinama osnovica 8 i 5 dijagonale se sijeku pod pravim kutom. Nađite površinu tog trapeza.

Rješenje 039

Uočimo pravokutne jednakokračne trokute ΔABT i ΔCDT. Tada je:

$$|TC| = |TD| = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} \quad , \quad |AT| = |BT| = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

U jednakokračnom trapezu duljine dijagonala su jednake: $|AC| = |BD|$.



Duljine dijagonala iznose:

$$|AC| = |AT| + |TC| \Rightarrow |AC| = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow |AC| = |BD| = \frac{13 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Budući da su dijagonale u trapezu međusobno okomite i jednake duljine, površina trapeza ima vrijednost:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot |AC|^2 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13 \cdot \sqrt{2}}{2} \right)^2 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \frac{169 \cdot 2}{4} \Rightarrow P = \frac{169}{4}.$$

Vježba 039

U jednakokračnom trapezu s duljinama osnovica 8 i 4 dijagonale se sijeku pod pravim kutom. Nađite površinu tog trapeza.

Rezultat: 18.

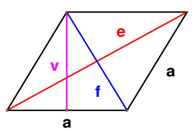
Zadatak 040 (Marija, maturantica)

Kolika je visina romba kojemu su dijagonale 6 cm i 8 cm?

Rješenje 040

Ponovimo!

Dijagonale romba su međusobno okomite i raspolavljaju se.

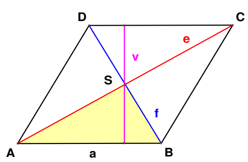


Površina romba može se računati pomoću sljedećih formula:

$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

$$P = a \cdot v.$$

Sa slike vidi se:



$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a \ , \ e = |AC| = 8 \ cm \ , \ f = |BD| = 6 \ cm$$

$$|AS| = 4 \ cm \ , \ |BS| = 3 \ cm$$

Uočimo pravokutan trokut ABS i pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu stranice a:

$$|AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 \Rightarrow a^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 \Rightarrow a^2 = 25 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5 \ cm.$$

Računamo visinu romba:

$$\left.\begin{matrix} P = a \cdot v \\ P = \frac{e \cdot f}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot v = \frac{e \cdot f}{2} \ / \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow v = \frac{e \cdot f}{2 \cdot a} \Rightarrow v = \frac{8 \ cm \cdot 6 \ cm}{2 \cdot 5 \ cm} \Rightarrow v = \frac{24}{5} \ cm \Rightarrow v = 4.8 \ cm.$$

Vježba 040

Koliki je opseg romba kojemu su dijagonale 6 cm i 8 cm?

Rezultat: O = 4 · a = 20 cm.