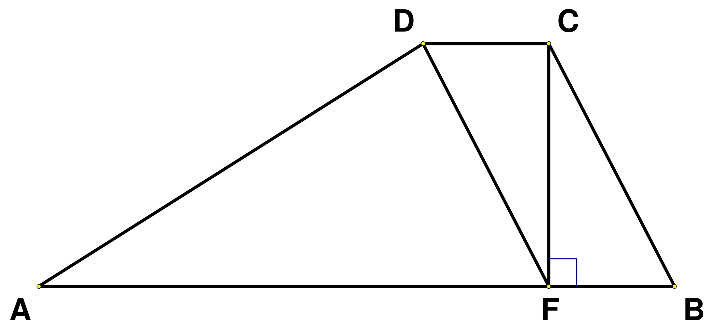
Zadatak 081 (Ana, hotelijerska škola)

U četverokutu ABCD, prikazanome na slici, stranica $\overline{AB}$ paralelna je sa stranicom $\overline{CD}$, a stranica $\overline{BC}$ paralelna je sa stranicom $\overline{DF}$, s time da je zadano $|AB| = 4.5$ cm, $|FB| = 1.3$ cm, $|FC| = 2 \cdot |FB|$ i $\angle CFB = 90^0$. Kolika je površina četverokuta ABCD?

$A.\ 5.85\ cm^2 \qquad B.\ 7.54\ cm^2 \qquad C.\ 9.23\ cm^2 \qquad D.\ 11.7\ cm^2$



Rješenje 081

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad , \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

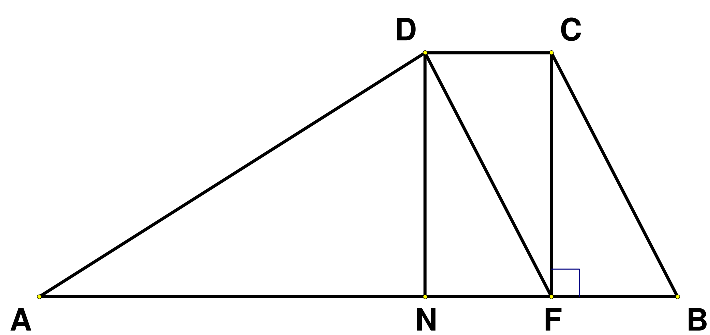
$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Trapez je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice usporedne (paralelne). Usporedne stranice zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v,$$

gdje je v visina trapeza.
Paralelogram je četverokut kojemu su po dvije nasuprotne stranice paralelne.
Površina paralelograma jednaka je umnošku osnovice (baze) i pripadne visine:

$$P = a \cdot v_a \text{ ili } P = b \cdot v_b.$$

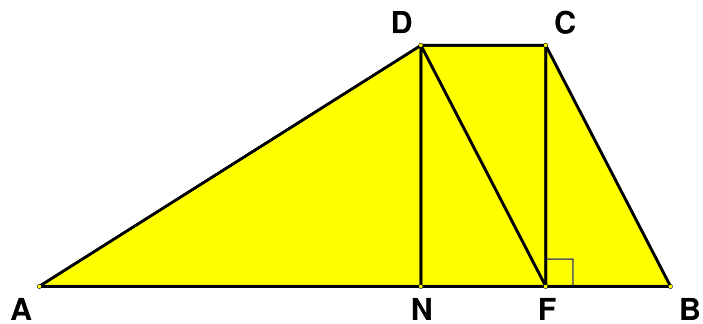


Sa slike vidi se:

$$|AB| = 4.5\ cm\ ,\ |FB| = 1.3\ cm\ ,\ |FC| = 2 \cdot |FB| = 2 \cdot 1.3\ cm = 2.6\ cm\ ,\ |ND| = |FC| = 2.6\ cm$$

$$|AF| = |AB| - |FB| = 4.5\ cm - 1.3\ cm = 3.2\ cm\ ,\ |DC| = |FB| = 1.3\ cm$$

1.inačica



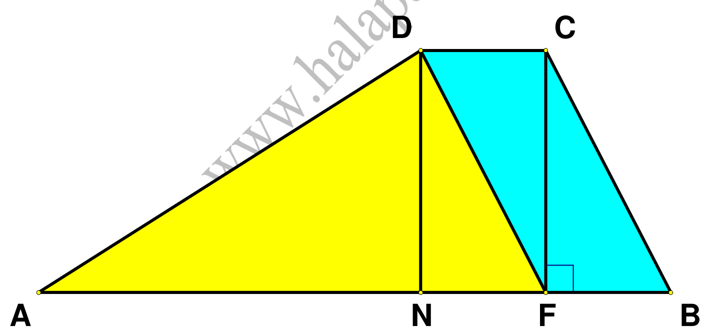
Četverokut ABCD je trapez jer je stranica $\overline{AB}$ paralelna sa stranicom $\overline{CD}$. Površina trapeza ABCD iznosi:

$$P_{ABCD} = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |FC| \Rightarrow P_{ABCD} = \frac{4.5\ cm + 1.3\ cm}{2} \cdot 2.6\ cm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = \frac{5.8\ cm}{2} \cdot 2.6\ cm \Rightarrow P_{ABCD} = 7.54\ cm^2.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica



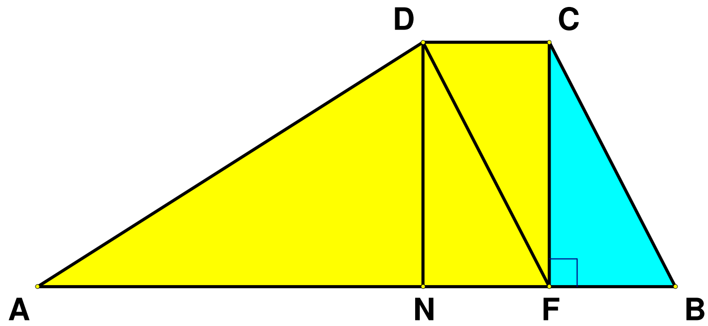
Uočimo da je površina četverokuta (trapeza) ABCD jednaka zbroju površina trokuta AFD i paralelograma FBCD.

$$P_{ABCD} = P_{AFD} + P_{FBCD} \Rightarrow P_{ABCD} = \frac{|AF| \cdot |ND|}{2} + |FB| \cdot |FC| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = \frac{3.2\ cm \cdot 2.6\ cm}{2} + 1.3\ cm \cdot 2.6\ cm \Rightarrow P_{ABCD} = 7.54\ cm^2.$$

Odgovor je pod B.

3.inačica



Uočimo da je površina četverokuta (trapeza) ABCD jednaka zbroju površina trapeza AFCD i pravokutnog trokuta FBC.

$$P_{ABCD}=P_{AFCD}+P_{FBC} \Rightarrow P_{ABCD}=\frac{|AF|+|DC|}{2}\cdot|ND|+\frac{|FB|\cdot|FC|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABCD}=\frac{3.2\ cm+1.3\ cm}{2}\cdot 2.6\ cm+\frac{1.3\ cm\cdot 2.6\ cm}{2} \Rightarrow$$

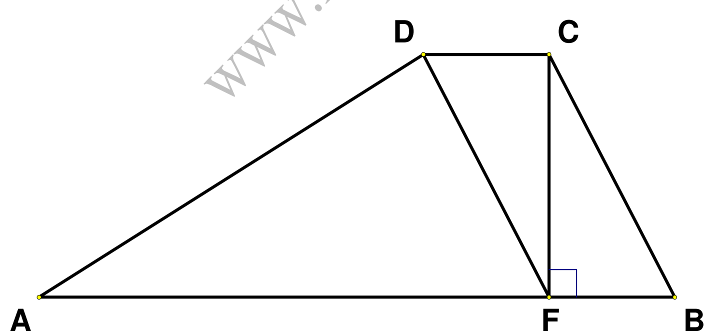
$$\Rightarrow P_{ABCD}=\frac{4.5\ cm}{2}\cdot 2.6\ cm+\frac{1.3\ cm\cdot 2.6\ cm}{2} \Rightarrow P_{ABCD}=7.54\ cm^2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 081

U četverokutu ABCD, prikazanome na slici, stranica $\overline{AB}$ paralelna je sa stranicom $\overline{CD}$, a stranica $\overline{BC}$ paralelna je sa stranicom $\overline{DF}$, s time da je zadano $|AB|=9$ cm, $|FB|=2.6$ cm, $|FC|=2\cdot|FB|$ i $\angle CFB=90^0$. Kolika je površina četverokuta ABCD?

$A.\ 30.16\ cm^2$ $\quad B.\ 18.64\ cm^2$ $\quad C.\ 36.12\ cm^2$ $\quad D.\ 22.14\ cm^2$

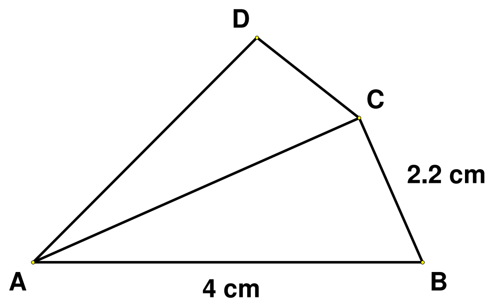


Rezultat: A.

Zadatak 082 (4A, TUPŠ)

U četverokutu ABCD, prikazanome na skici, su $\angle ACD=60^0$ i $\angle BCD=150^0$. Kolika je duljina dijagonale $\overline{AC}$ zaokružena na jednu decimalu?

$A.\ 3.3\ cm$ $\quad B.\ 3.6\ cm$ $\quad C.\ 4.0\ cm$ $\quad D.\ 4.1\ cm$



Rješenje 082

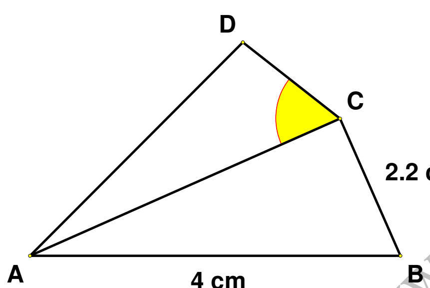
Ponovimo!

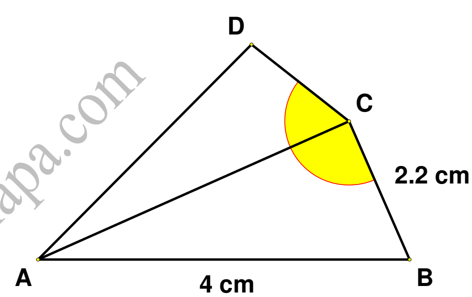
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

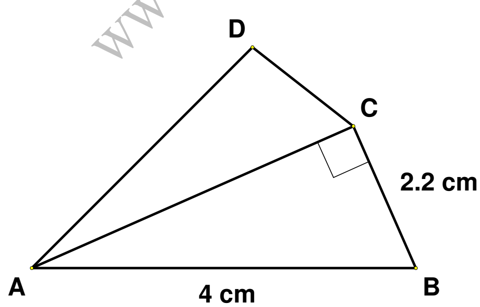
Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$







Sa slika vidi se:

$$|AB| = 4\ cm \quad , \quad |BC| = 2.2\ cm \quad , \quad \angle ACD = 60^0 \quad , \quad \angle BCD = 150^0.$$

Uočimo da je kut $\angle BCA$ jednak razlici kutova $\angle BCD$ i $\angle ACD$.

$$\angle BCA = \angle BCD - \angle ACD \Rightarrow \angle BCA = 150^0 - 60^0 \Rightarrow \angle BCA = 90^0.$$

Kut $\angle BCA$ je pravi kut pa je trokut ΔABC pravokutan. Njegova je hipotenuza stranica $\overline{AB}$, a katete su $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Duljinu katete $\overline{AC}$ izračunamo pomoću Pitagorina poučka.

$$|AC|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 \Rightarrow |AC|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

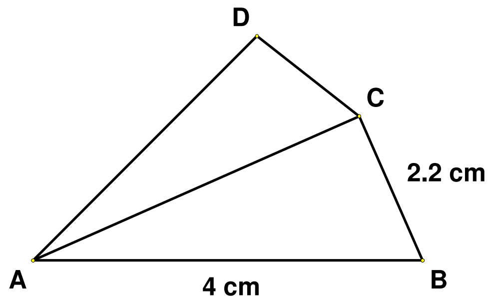
$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{|AB|^2 - |BC|^2} \Rightarrow |AC| = \sqrt{(4\ cm)^2 - (2.2\ cm)^2} \Rightarrow |AC| = 3.3\ cm.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 082

U četverokutu ABCD, prikazanome na skici, su $\angle ACD = 50^0$ i $\angle BCD = 140^0$. Kolika je duljina dijagonale $\overline{AC}$ zaokružena na jednu decimalu?

$A.\ 3.3\ cm \qquad B.\ 3.6\ cm \qquad C.\ 4.0\ cm \qquad D.\ 4.1\ cm$

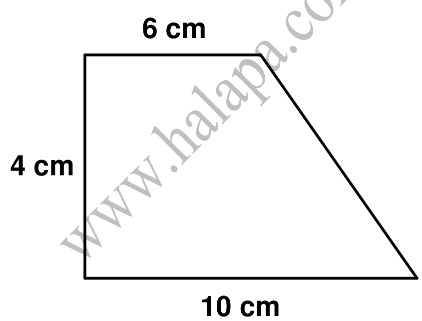


Rezultat: A.

Zadatak 083 (Ivan, tehnička škola)

Na skici je prikazan trapez kojemu je jedan krak okomit na osnovice. Duljine osnovica iznose 10 cm i 6 cm, a duljina kraka okomitoga na osnovice iznosi 4 cm. Povučena je dužina usporedna s osnovicama i ona taj trapez dijeli na dva dijela jednakih ploština. Na kojoj je udaljenosti od kraće osnovice trapeza povučena ta dužina?

$A.\ 2.057\ cm \qquad B.\ 2.246\ cm \qquad C.\ 2.793\ cm \qquad D.\ 2.918\ cm$

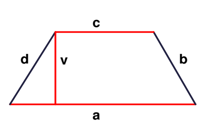


Rješenje 083

Ponovimo!

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine.
Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne). Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Podsjetimo se formule za površinu trapeza:



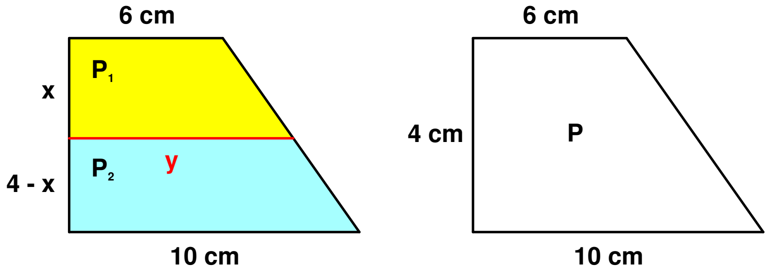
$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$



Kada konstruiramo dužinu usporednu s osnovicama ona trapez dijeli na dva manja trapeza koji imaju jednake ploštine pa su te ploštine jednake polovici ploštine cijelog trapeza. Zato vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} P_1=\frac{1}{2}\cdot P \\ P_2=\frac{1}{2}\cdot P \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{y+6}{2}\cdot x=\frac{1}{2}\cdot\frac{10+6}{2}\cdot 4 \\ \frac{10+y}{2}\cdot(4-x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10+6}{2}\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{y+6}{2}\cdot x=\frac{1}{2}\cdot\frac{10+6}{2}\cdot 4 \\ \frac{10+y}{2}\cdot(4-x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10+6}{2}\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{y+6}{2}\cdot x=16 \\ \frac{10+y}{2}\cdot(4-x)=16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{y+6}{2}\cdot x=16 \;/\cdot 2 \\ \frac{10+y}{2}\cdot(4-x)=16 \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (y+6)\cdot x=32 \\ (10+y)\cdot(4-x)=32 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\cdot y+6\cdot x=32 \\ 40-10\cdot x+4\cdot y-x\cdot y=32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\cdot y=32-6\cdot x \\ 40-10\cdot x+4\cdot y-x\cdot y=32 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40-10\cdot x+4\cdot y-(32-6\cdot x)=32 \Rightarrow 40-10\cdot x+4\cdot y-32+6\cdot x=32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10\cdot x+4\cdot y+6\cdot x=32-40+32 \Rightarrow 4\cdot y-4\cdot x=24 \Rightarrow 4\cdot y-4\cdot x=24 \;/:4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-x=6 \Rightarrow y=6+x.$$

Sada rješavamo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} (y+6)\cdot x=32 \\ y=6+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow (6+x+6)\cdot x=32 \Rightarrow (x+12)\cdot x=32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+12\cdot x=32 \Rightarrow x^2+12\cdot x-32=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+12\cdot x-32=0 \\ a=1\;,\; b=12\;,\; c=-32 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\;,\; b=12\;,\; c=-32 \\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 1\cdot(-32)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144+128}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{272}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm 16.492}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{-12+16.492}{2} \\ x_2=\frac{-12-16.492}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

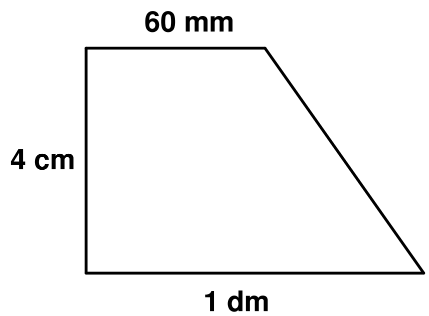
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{4.492}{2} \\ x_2=-\frac{28.492}{2} \;\; \text{nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow x=2.246\ cm.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 083

Na skici je prikazan trapez kojemu je jedan krak okomit na osnovice. Duljine osnovica iznose 10 cm i 6 cm, a duljina kraka okomitoga na osnovice iznosi 4 cm. Povučena je dužina usporedna s osnovicama i ona taj trapez dijeli na dva dijela jednakih ploština. Na kojoj je udaljenosti od kraće osnovice trapeza povučena ta dužina?

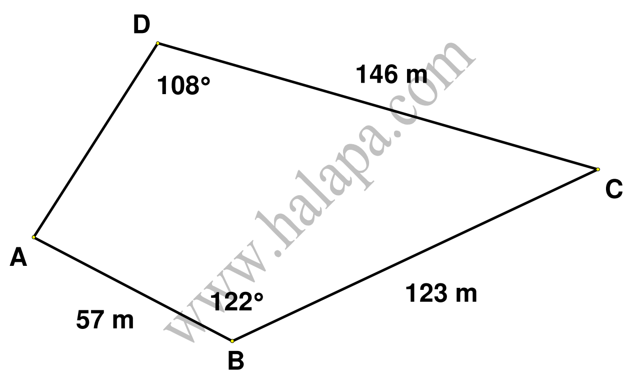
$A.\ 2.057\ cm \qquad B.\ 2.246\ cm \qquad C.\ 2.793\ cm \qquad D.\ 2.918\ cm$



Rezultat: A.

Zadatak 084 (Den, tehnička škola)

Odredite opseg četverokuta prikazanog na skici.



Rješenje 084

Ponovimo!

$$1^0 = 60' \quad , \quad 1' = 50'' \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine.
Opseg četverokuta računa se po formuli:

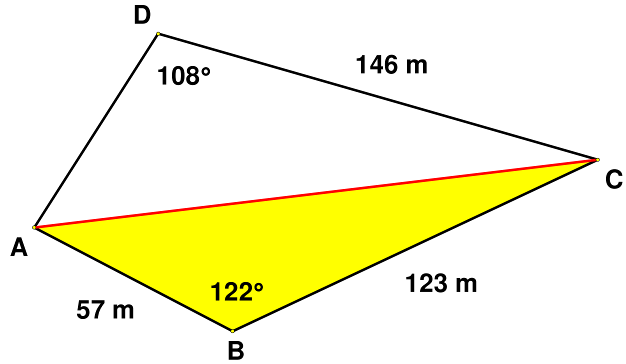
$$O = a + b + c + d,$$

gdje su a, b, c i d duljine njegovih stranica.
Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

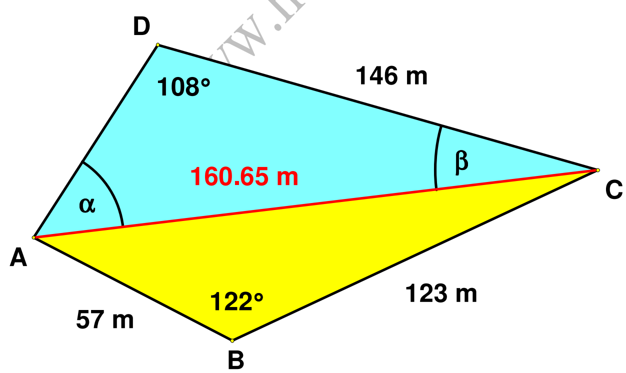
pri čemu je R polumjer opisane kružnice tom trokutu.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



U četverokutu ABCD konstruiramo dijagonalu $\overline{AC}$ i uočimo trokut ABC. Pomoću kosinusovog poučka izračunamo $|AC|$.

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 122^0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 122^0 \; / \sqrt{} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 122^0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |AC| = \sqrt{57^2 + 123^2 - 2 \cdot 57 \cdot 123 \cdot \cos 122^0} \Rightarrow |AC| = 160.65 \; m.$$



U trokutu ΔACD pomoću sinusovog poučka dobije se kut $\alpha = \angle DAC$:

$$\frac{|AC|}{\sin 108^0} = \frac{|DC|}{\sin\alpha} \Rightarrow |AC| \cdot \sin\alpha = |DC| \cdot \sin 108^0 \Rightarrow |AC| \cdot \sin\alpha = |DC| \cdot \sin 108^0 \; / \cdot \frac{1}{|AC|} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{|DC| \cdot \sin 108^0}{|AC|} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|DC| \cdot \sin 108^0}{|AC|}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{146 \cdot \sin 108^0}{160.65}\right) \Rightarrow \alpha = 59^0 48'22''.$$

Potrebno je još u trokutu ΔACD odrediti mjeru kuta $\beta = \angle ACD$:

$$\alpha+\beta+108^0=180^0 \Rightarrow \beta=180^0-\alpha-108^0 \Rightarrow \beta=180^0-59^0 48'22"-108^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=72^0-59^0 48'22" \Rightarrow \beta=71^0 59'60"-59^0 48'22" \Rightarrow \beta=12^0 11'36".$$

Duljinu stranice $\overline{AD}$ možemo izračunati na dva načina:

- sinusov poučak

$$\frac{|AD|}{\sin\gamma}=\frac{|AC|}{\sin 108^0} \Rightarrow \frac{|AD|}{\sin\gamma}=\frac{|AC|}{\sin 108^0} \ / \cdot \sin\gamma \Rightarrow |AD|=\frac{|AC|}{\sin 108^0}\cdot\sin\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AD|=\frac{160.65}{\sin 108^0}\cdot\sin 12^0 11'36" \Rightarrow |AD|=35.68 \ m.$$

- kosinusov poučak

$$|AD|^2=|AC|^2+|DC|^2-2\cdot|AC|\cdot|DC|\cdot\cos\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AD|^2=|AC|^2+|DC|^2-2\cdot|AC|\cdot|DC|\cdot\cos\gamma \ / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AD|=\sqrt{|AC|^2+|DC|^2-2\cdot|AC|\cdot|DC|\cdot\cos\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AD|=\sqrt{160.65^2+146^2-2\cdot 160.65\cdot 146\cdot\cos 12^0 11'36"} \Rightarrow |AD|=35.68 \ m.$$

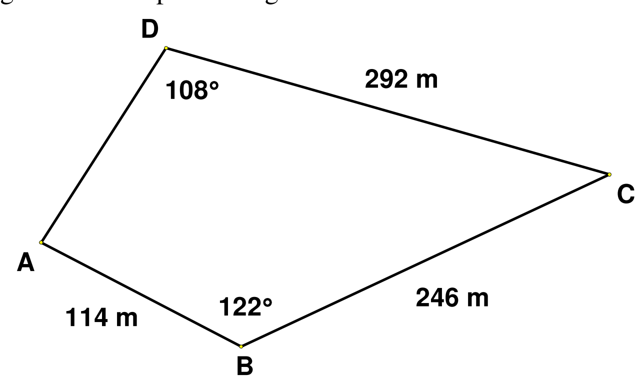
Opseg četverokuta ABCD iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} |AB|=57 \ m \\ |BC|=123 \ m \\ |CD|=146 \ m \\ |AD|=35.68 \ m \end{array}\right\} \Rightarrow \left[O=|AB|+|BC|+|CD|+|AD| \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O=57 \ m+123 \ m+146 \ m+35.68 \ m \Rightarrow O=361.68 \ m.$$

Vježba 084

Odredite opseg četverokuta prikazanog na skici.



Rezultat: 723.36 m.

Zadatak 085 (Amelia, gimnazija)

Neka su a, b, c i d duljine stranica, a P ploština konveksnog četverokuta. Dokažite da vrijedi:

$$P\le\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{d^2}{4}.$$

Rješenje 085

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta zadanog dvjema stranicama i kutom između njih

$$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha \quad , \quad P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta.$$

$$\alpha\in\left\langle 0,\ \pi\right\rangle \ \Rightarrow\ 0<\sin\alpha<1.$$

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad \sqrt[n]{a^n}=a\ ,\ a\geq 0 \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^2\geq 0\ ,\ a\in R.$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a\leq b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c\leq b\cdot c \quad , \quad \left.\begin{matrix} a\geq b\\ c\geq d\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ a+c\geq b+d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\left\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_n\right\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n$ definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\left\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_n\right\}$. Tada je geometrijska sredina G_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n$ definirana izrazom

$$G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Za aritmetičku i geometrijsku sredinu vrijedi nejednakost

$$A\geq G.$$

Znak jednakosti vrijedi, ako je:

$$a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n.$$

Neka su a, b i c tri pozitivna realna broja. Tada je

- aritmetička sredina A brojeva a, b i c definirana izrazom

$$A=\frac{a+b+c}{3}$$

- geometrijska sredina G brojeva a, b i c definirana izrazom

$$G=\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}.$$

Važna nejednakost!

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\leq\frac{1}{4}\cdot\left(x^2+y^2\right).$$

Dokaz 1.
Promatrajmo brojeve x^2 i y^2. Za njih vrijedi:

$$\sqrt{x^2\cdot y^2}\leq\frac{x^2+y^2}{2}\ \Rightarrow\ \sqrt{(x\cdot y)^2}\leq\frac{x^2+y^2}{2}\ \Rightarrow\ \sqrt{(x\cdot y)^2}\leq\frac{x^2+y^2}{2}\ \Rightarrow$$

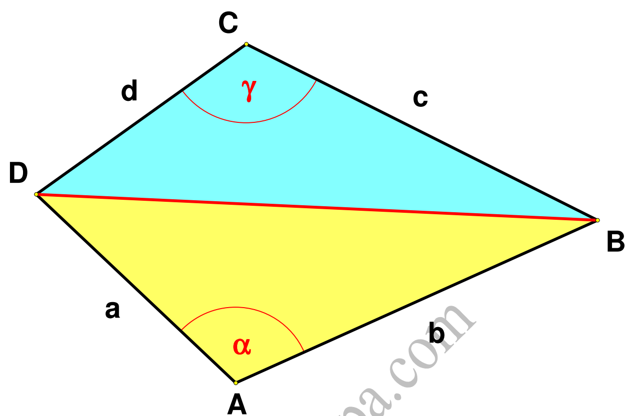
$$\Rightarrow x\cdot y\le\frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow x\cdot y\le\frac{x^2+y^2}{2} \ /\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\le\frac{x^2+y^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\le\frac{1}{4}\cdot\left(x^2+y^2\right).$$

Dokaz 2.
Promatrajmo brojeve x i y. Za njih vrijedi:

$$(x-y)^2\ge 0 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\ge 0 \Rightarrow x^2+y^2\ge 2\cdot x\cdot y \Rightarrow 2\cdot x\cdot y\le x^2+y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x\cdot y\le x^2+y^2 \ /\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2\cdot x\cdot y}{4}\le\frac{x^2+y^2}{4} \Rightarrow \frac{2\cdot x\cdot y}{4}\le\frac{x^2+y^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x\cdot y}{2}\le\frac{x^2+y^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\le\frac{1}{4}\cdot\left(x^2+y^2\right).$$



Budući da je četverokut ABCD konveksan, svaki je njegov kut manji od 180° pa je sinus svakog kuta pozitivan broj manji od 1.

Četverokut ABCD podijelimo, na primjer, dijagonalom $\overline{DB}$ na dva trokuta ΔDAB i ΔBCD.
Za ploštinu trokuta ΔDAB vrijedi:

$$P_{DAB}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\alpha \Rightarrow \left[\sin\alpha<1\right] \Rightarrow P_{DAB}\le\frac{1}{2}\cdot a\cdot b \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\le\frac{1}{4}\cdot\left(a^2+b^2\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{DAB}\le\frac{1}{4}\cdot\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow P_{DAB}\le\frac{1}{4}\cdot a^2+\frac{1}{4}\cdot b^2.$$

Za ploštinu trokuta ΔBCD vrijedi:

$$P_{BCD}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot d\cdot\sin\gamma \Rightarrow \left[\sin\gamma<1\right] \Rightarrow P_{BCD}\le\frac{1}{2}\cdot c\cdot d \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\cdot c\cdot d\le\frac{1}{4}\cdot\left(c^2+d^2\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{BCD}\le\frac{1}{4}\cdot\left(c^2+d^2\right) \Rightarrow P_{BCD}\le\frac{1}{4}\cdot c^2+\frac{1}{4}\cdot d^2.$$

Ploština četverokuta ABCD jednaka je zbroju ploština trokuta ΔDAB i ΔBCD

$$P=P_{DAB}+P_{BCD}$$

pa slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} P_{DAB}\le\frac{1}{4}\cdot a^2+\frac{1}{4}\cdot b^2 \\ P_{BCD}\le\frac{1}{4}\cdot c^2+\frac{1}{4}\cdot d^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo}\\ \text{nejednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{DAB}+P_{BCD}\le\frac{1}{4}\cdot a^2+\frac{1}{4}\cdot b^2+\frac{1}{4}\cdot c^2+\frac{1}{4}\cdot d^2 \Rightarrow \left[P=P_{DAB}+P_{BCD}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\le\frac{1}{4}\cdot a^2+\frac{1}{4}\cdot b^2+\frac{1}{4}\cdot c^2+\frac{1}{4}\cdot d^2 \Rightarrow P\le\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{d^2}{4}.$$

Vježba 085

Neka su a, b i c duljine stranica trokuta ΔABC, a P njegova ploština. Dokažite da vrijedi:

$$P\le\frac{1}{4}\cdot\left(a^2+b^2\right).$$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 086 (Valentina, srednja škola)

Dimenzije kuće su 20 m x 9 m. Oko nje je napravljena ograda koja je 3 metra udaljena od svakog zida. Koliko je dugačka ograda?

Rješenje 086

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).

Opseg pravokutnika

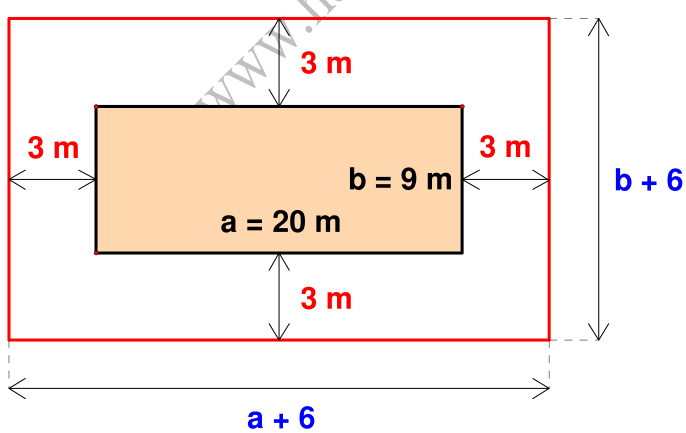
Opseg je zbroj duljina svih stranica pravokutnika

$$O=2\cdot a+2\cdot b.$$

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a?

$$b=a+n \quad , \quad b-n=a \quad , \quad b-a=n.$$

1.inačica



Sa slike vidi se da su dimenzije kuće a = 20 m, b = 9 m, a dimenzije ograde a + 6 i b + 6. Duljina (opseg) ograde iznosi:

$$O=2\cdot(a+6)+2\cdot(b+6) \Rightarrow O=2\cdot(20+6)+2\cdot(9+6) \Rightarrow O=2\cdot 26+2\cdot 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O=52+30 \Rightarrow O=82\ m.$$

2.inačica

Budući da je napravljena ograda 3 metra udaljena od svakog zida, duljina svakog zida uvećana je za 6 m pa je opseg ograde O_1 za

$$4\cdot 6\text{ m}=24\text{ m}$$

veći od opsega temelja kuće O.

$$O_1=O+24 \Rightarrow O_1=2\cdot a+2\cdot b+24 \Rightarrow O_1=2\cdot 20+2\cdot 9+24 \Rightarrow O_1=40+18+24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ O_1 = 82\ m.$$

Vježba 086

Dimenzije kuće su 20 m x 9 m. Oko nje je napravljena ograda koja je 2 metra udaljena od svakog zida. Koliko je dugačka ograda?

Rezultat: 74 m.

Zadatak 087 (Antonija, gimnazija)

Ako se dijagonale romba uvećaju za 2, površina mu poraste za 34. Ako se pak veća dijagonala umanji za 6, a uveća za 4, površina se umanji za 8. Kolika je kraća dijagonala?

Rješenje 087

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Romb je paralelogram koji ima sve stranice jednake duljine. Dijagonale romba raspolavljaju se i međusobno su okomite. Dijagonale romba raspolavljaju njegove kutove. Površina romba dana je izrazom

$$P = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f,$$

gdje su e i f duljine dijagonala.

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a?

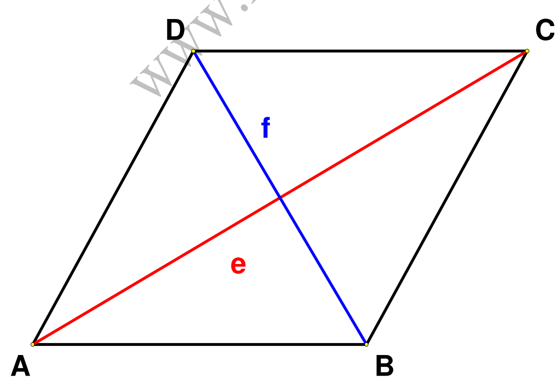
$$b = a + n \quad , \quad b - n = a \quad , \quad b - a = n.$$

Kako zapisati da je broj b za n manji od broja a?

$$b + n = a \quad , \quad b = a - n \quad , \quad a - b = n.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$



Površina romba glasi:

- ako su e i f njegove dijagonale

$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

- ako su dijagonale e i f uvećane za 2

$$P_1 = \frac{(e+2)\cdot(f+2)}{2}$$

- ako je veća dijagonala e umanjena za 6, a manja f uvećana za 4

$$P_2 = \frac{(e-6)\cdot(f+4)}{2}.$$

Iz uvjeta zadatka napišemo pripadne jednadžbe.

Ako se dijagonale romba uvećaju za 2, površina mu poraste za 34 pa vrijedi jednadžba

$$P_1 = P + 34.$$

Ako se veća dijagonala umanji za 6, a manja uveća za 4, površina se umanji za 8 pa možemo napisati jednadžbu

$$P_2 = P - 8.$$

Riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = P + 34 \\ P_2 = P - 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{(e+2)\cdot(f+2)}{2} = \frac{e\cdot f}{2} + 34 \\ \frac{(e-6)\cdot(f+4)}{2} = \frac{e\cdot f}{2} - 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{(e+2)\cdot(f+2)}{2} = \frac{e\cdot f}{2} + 34 \;/\cdot 2 \\ \frac{(e-6)\cdot(f+4)}{2} = \frac{e\cdot f}{2} - 8 \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (e+2)\cdot(f+2) = e\cdot f + 68 \\ (e-6)\cdot(f+4) = e\cdot f - 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e\cdot f + 2\cdot e + 2\cdot f + 4 = e\cdot f + 68 \\ e\cdot f + 4\cdot e - 6\cdot f - 24 = e\cdot f - 16 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e\cdot f + 2\cdot e + 2\cdot f + 4 = e\cdot f + 68 \\ e\cdot f + 4\cdot e - 6\cdot f - 24 = e\cdot f - 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot e + 2\cdot f + 4 = 68 \\ 4\cdot e - 6\cdot f - 24 = -16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot e + 2\cdot f = 68 - 4 \\ 4\cdot e - 6\cdot f = -16 + 24 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot e + 2\cdot f = 64 \\ 4\cdot e - 6\cdot f = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot e + 2\cdot f = 64 \\ 4\cdot e - 6\cdot f = 8 \;/:(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot e + 2\cdot f = 64 \\ -2\cdot e + 3\cdot f = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow 5\cdot f = 60 \Rightarrow 5\cdot f = 60 \;/:5 \Rightarrow f = 12.$$

Vježba 087

Ako se dijagonale romba uvećaju za 2, površina mu poraste za 34. Ako se pak veća dijagonala umanji za 6, a manja uveća za 4, površina se umanji za 8. Kolika je veća dijagonala?

Rezultat: e = 20.

Zadatak 088 (Bax, gimnazija)

Osnovice trapeza imaju duljine a i c. Koliki je omjer površina na koje je trapez razdijeljen srednjicom (spojnicom središta krakova)?

$$A.\ \frac{2\cdot a + c}{a + c} \qquad B.\ \frac{a + c}{a + 2\cdot c} \qquad C.\ \frac{3\cdot a + c}{a + 3\cdot c} \qquad D.\ \frac{a}{c}$$

Rješenje 088

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

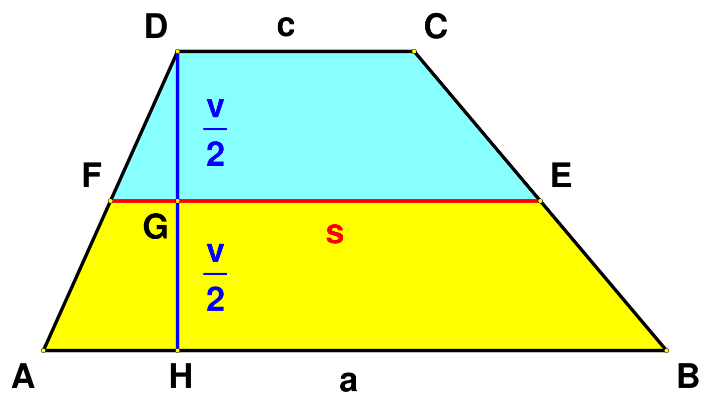
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.

Trapez je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice usporedne (paralelne). Usporedne stranice zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P = \frac{a + c}{2}\cdot v,$$

gdje je v visina trapeza, a i c su duljine osnovica.
Dužina koja spaja polovišta krakova trapeza zove se srednjica trapeza. Duljina srednjice trapeza jednaka je polovici zbroja duljina osnovica trapeza.

$$s = \frac{a+c}{2}.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = a \quad , \quad |CD| = c \quad , \quad |FE| = s \quad , \quad |HG| = |GD| = \frac{v}{2}$$

Srednjica s dijeli trapez ABCD na dva trapeza ABEF i FECD jednakih visina.
Površina:

- trapeza ABEF iznosi

$$P_1 = \frac{a+s}{2} \cdot \frac{v}{2}$$

- trapeza FECD iznosi

$$P_2 = \frac{s+c}{2} \cdot \frac{v}{2}.$$

Računamo kvocijent P_1 i P_2.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{a+s}{2} \cdot \frac{v}{2}}{\frac{s+c}{2} \cdot \frac{v}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{a+s}{2} \cdot \frac{v}{2}}{\frac{s+c}{2} \cdot \frac{v}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{a+s}{1}}{\frac{s+c}{1}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{a+s}{s+c} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{a + \frac{a+c}{2}}{\frac{a+c}{2} + c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{a}{1} + \frac{a+c}{2}}{\frac{a+c}{2} + \frac{c}{1}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{2 \cdot a + a + c}{2}}{\frac{a + c + 2 \cdot c}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{3 \cdot a + c}{2}}{\frac{a + 3 \cdot c}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{3 \cdot a + c}{2}}{\frac{a + 3 \cdot c}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{3 \cdot a + c}{1}}{\frac{a + 3 \cdot c}{1}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{3 \cdot a + c}{a + 3 \cdot c}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 088

Osnovice trapeza imaju duljine 8 i 4. Koliki je omjer površina na koje je trapez razdijeljen srednjicom (spojnicom središta krakova)?

$$A.\ 1.4 \qquad B.\ 1.2 \qquad C.\ 1.6 \qquad D.\ 2.5$$

Rezultat: A.

Zadatak 089 (Ana, gimnazija)

Jedna dijagonala i stranica romba imaju duljinu $8 \cdot \sqrt{3}$. Kolika je duljina druge dijagonale?

$A.\ 20 \qquad B.\ 22 \qquad C.\ 24 \qquad D.\ 26$

Rješenje 089

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Jednakostraničan trokut ima tri jednaka kuta α = 60° i tri jednake stranice.
Ploština jednakostraničnog trokuta duljine stranice a računa se po formuli

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

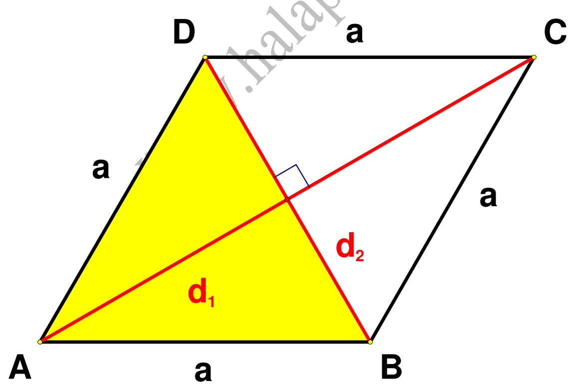
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Četverokut s okomitim dijagonalama koji ima barem jednu os simetrije zove se deltoid. Ploština je deltoida jednaka polovici produkta duljina njegovih dijagonala.

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Romb je deltoid kojemu sjecište dijagonala raspolavlja dijagonale. Stranice romba su sukladne. Romb ima dvije osi simetrije.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a = 8 \cdot \sqrt{3} \ , \ |BD| = d_2 = a = 8 \cdot \sqrt{3}$$

Uočimo da je ploština romba ABCD jednaka dvostrukoj ploštini jednakostraničnog trokuta ABD pa slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} \\ P = 2 \cdot P_{ABD} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 2 \cdot P_{ABD} \Rightarrow \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \left[d_2 = a \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d_1 \cdot a}{2} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{d_1 \cdot a}{2} = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \ / \cdot \frac{2}{a} \Rightarrow d_1 = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow d_1 = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_1 = 8 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow d_1 = 8 \cdot 3 \Rightarrow d_1 = 24.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 089

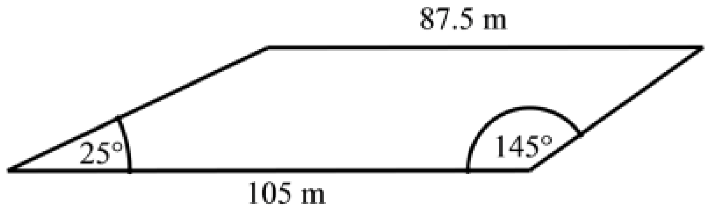
Jedna dijagonala i stranica romba imaju duljinu $16 \cdot \sqrt{3}$. Kolika je duljina druge dijagonale?

$A.\ 40 \qquad B.\ 44 \qquad C.\ 48 \qquad D.\ 52$

Rezultat: C.

Zadatak 090 (4A, TUPŠ)

Zemljište ima oblik trapeza kao na skici. Koliko najmanje metara ograde treba kupiti da bi se ogradilo zemljište?



Rješenje 090

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.
Opseg četverokuta dan je formulom

$$O = a + b + c + d,$$

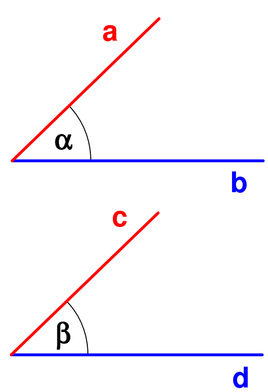
gdje su a, b, c i d duljine njegovih stranica.
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Zbroj veličina svih kutova u trokutu iznosi 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

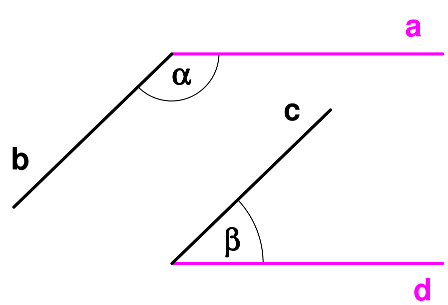
Podsjetimo se poučka o sinusima (sinusovog poučka).
U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

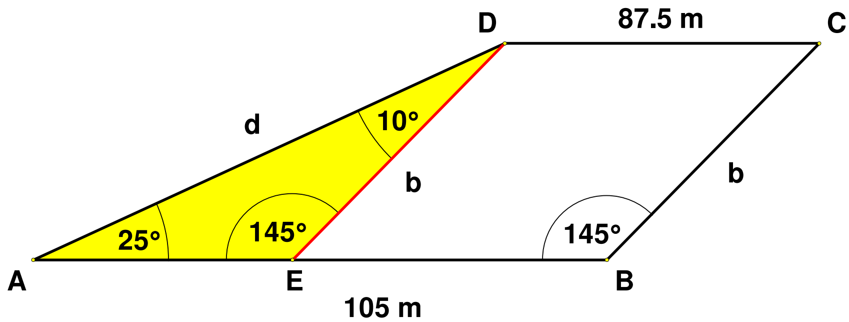
pri čemu je R polumjer opisane kružnice tog trokuta.
Kutovi s paralelnim kracima
Kutovi s paralelnim kracima su sukladni ili su suplementni (zbroj kutova je 180º).



$a \,||\, c \;,\; b \,||\, d \;,\; \alpha = \beta$



$a \,||\, d \;,\; b \,||\, c \;,\; \alpha + \beta = 180^0$



Točkom D konstruiramo usporednicu (paralelu) sa stranicom $\overline{BC}$ četverokuta ABCD. Ta usporednica siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E. Uočimo trokut AED čiji su kutovi:

$$\angle DAE = 25^0 \ , \ \angle AED = 145^0$$

$$\angle EDA = 180^0 - (\angle DAE + \angle AED) = 180^0 - \left(25^0 + 145^0\right) = 180^0 - 170^0 = 10^0$$

Sa slike vidi se:

$$|AB| = 105 \ m \ , \ |BC| = |ED| = b \ , \ |DC| = |EB| = 87.5 \ m \ , \ |DA| = d$$

$$|AE| = |AB| - |EB| = 105 \ m - 87.5 \ m = 17.5 \ m$$

Na trokutu AED dva puta primijenimo sinusov poučak da bismo izračunali duljine stranica b i d četverokuta ABCD.

- $$\frac{|ED|}{\sin 25^0} = \frac{|AE|}{\sin 10^0} \Rightarrow \frac{b}{\sin 25^0} = \frac{|AE|}{\sin 10^0} \Rightarrow \frac{b}{\sin 25^0} = \frac{|AE|}{\sin 10^0} \ / \cdot \sin 25^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{|AE|}{\sin 10^0} \cdot \sin 25^0 \Rightarrow b = \frac{17.5 \ m}{\sin 10^0} \cdot \sin 25^0 \Rightarrow b = 45.59 \ m$$

- $$\frac{|AD|}{\sin 145^0} = \frac{|AE|}{\sin 10^0} \Rightarrow \frac{d}{\sin 145^0} = \frac{|AE|}{\sin 10^0} \Rightarrow \frac{d}{\sin 145^0} = \frac{|AE|}{\sin 10^0} \ / \cdot \sin 145^0 \Rightarrow$$

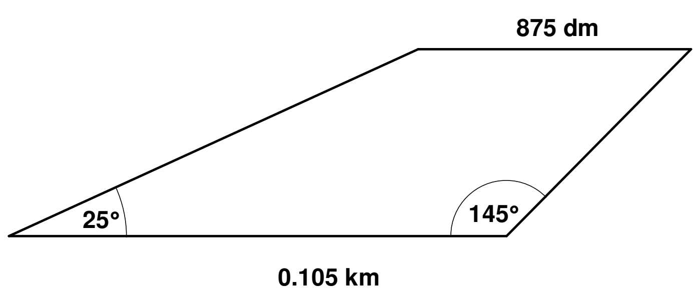
$$\Rightarrow d = \frac{|AE|}{\sin 10^0} \cdot \sin 145^0 \Rightarrow d = \frac{17.5 \ m}{\sin 10^0} \cdot \sin 145^0 \Rightarrow d = 57.80 \ m.$$

Opseg trapeza ABCD iznosi:

$$O = |AB| + b + |DC| + d \Rightarrow O = 105 \ m + 45.59 \ m + 87.5 \ m + 57.8 \ m \Rightarrow O = 295.89 \ m.$$

Vježba 090

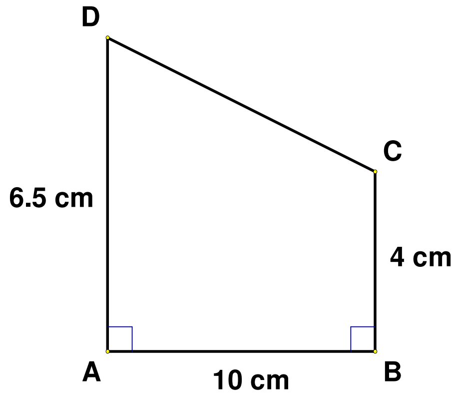
Zemljište ima oblik trapeza kao na skici. Koliko najmanje metara ograde treba kupiti da bi se ogradilo zemljište?



Rezultat: 295.89 m.

Zadatak 091 (Antonio, srednja škola)

Zadan je četverokut ABCD prikazan na skici.
a) Kolika je površina četverokuta ABCD?
b) Koliki je opseg četverokuta ABCD?



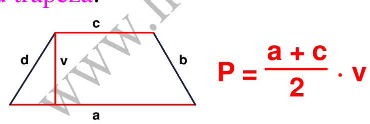
Rješenje 091

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.
Opseg četverokuta dan je formulom

$$O = a + b + c + d,$$

gdje su a, b, c i d duljine njegovih stranica.
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne).
Podsjetimo se formule za površinu trapeza:



Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Površina pravokutnika je jednaka produktu njegove duljine a i širine b.

$$P = a \cdot b.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

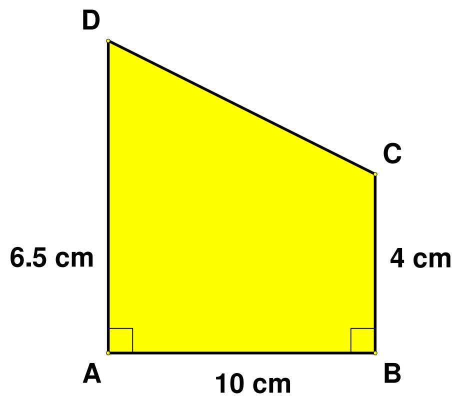
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

a) Računamo površinu četverokuta ABCD.

1.inačica

Četverokut ABCD je trapez jer ima dvije stranice, $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, paralelne. Sa slike vidi se:

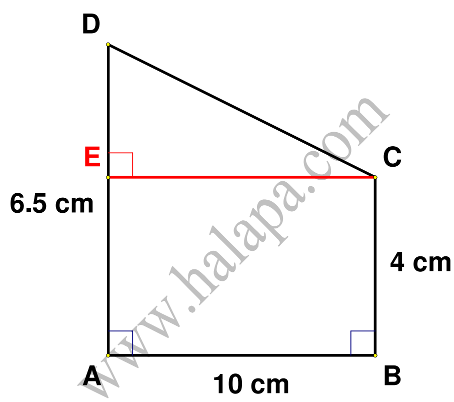


$$|AD| = 6.5\ cm\ ,\ |BC| = 4\ cm\ ,\ |AB| = 10\ cm$$

Površina četverokuta iznosi:

$$P = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |AB| \Rightarrow P = \frac{6.5\ cm + 4\ cm}{2} \cdot 10\ cm \Rightarrow P = 52.5\ cm^2.$$

2.inačica

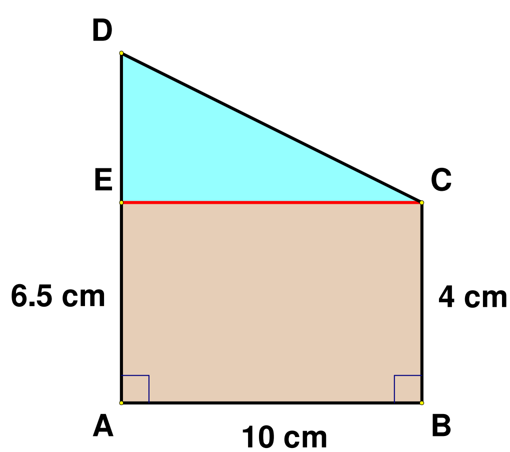


Konstruiramo okomicu iz točke C na stranicu $\overline{AD}$. Neka je točka E njihovo sjecište. Sa slike vidi se:

$$|AD| = 6.5\ cm\ ,\ |BC| = |AE| = 4\ cm\ ,\ |AB| = |EC| = 10\ cm$$

$$|ED| = |AD| - |AE| = 6.5\ cm - 4\ cm = 2.5\ cm$$

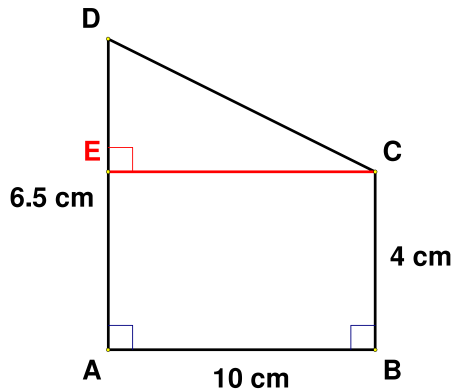
Površina četverokuta ABCD jednaka je zbroju površina pravokutnika ABCE i pravokutnog trokuta ECD.



$$P = P_{ABCE} + P_{ECD} \Rightarrow P = |AB| \cdot |BC| + \frac{|EC| \cdot |ED|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 10 \ cm \cdot 4 \ cm + \frac{10 \ cm \cdot 2.5 \ cm}{2} \Rightarrow P = 40 \ cm^2 + 12.5 \ cm^2 \Rightarrow P = 52.5 \ cm^2.$$

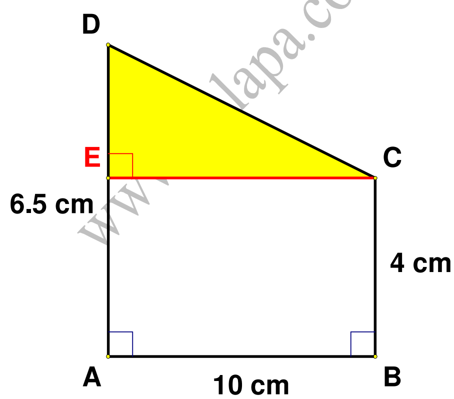
b) Računamo opseg četverokuta ABCD.



Konstruiramo okomicu iz točke C na stranicu $\overline{AD}$. Neka je točka E njihovo sjecište. Sa slike vidi se:

$$|AD| = 6.5 \ cm \ , \ |BC| = |AE| = 4 \ cm \ , \ |AB| = |EC| = 10 \ cm$$

$$|ED| = |AD| - |AE| = 6.5 \ cm - 4 \ cm = 2.5 \ cm$$



Uočimo pravokutan trokut ECD i primijenimo Pitagorin poučak kako bismo izračunali $|CD|$.

$$|CD|^2 = |ED|^2 + |EC|^2 \Rightarrow |CD|^2 = |ED|^2 + |EC|^2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow$$

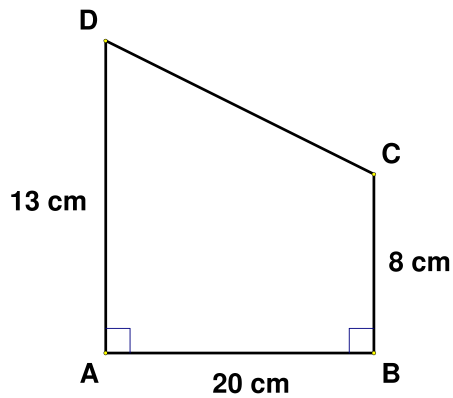
$$\Rightarrow |CD| = \sqrt{|ED|^2 + |EC|^2} \Rightarrow |CD| = \sqrt{(2.5 \ cm)^2 + (10 \ cm)^2} \Rightarrow |CD| = 10.31 \ cm.$$

Opseg četverokuta ABCD je:

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |AD| \Rightarrow O = 10 \ cm + 4 \ cm + 10.31 \ cm + 6.5 \ cm \Rightarrow O = 30.81 \ cm.$$

Vježba 091

Zadan je četverokut ABCD prikazan na skici. Kolika je površina četverokuta ABCD?



Rezultat: 210 cm^2.

Zadatak 092 (Vahelani, gimnazija)

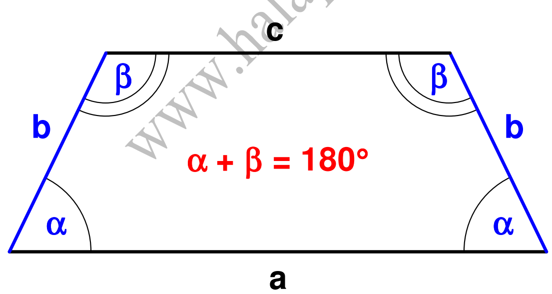
Koliki su kutovi jednakokračnog trapeza ako su njegove osnovice duge 17 cm i 7 cm, a krak je dug 11 cm?

Rješenje 092

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.

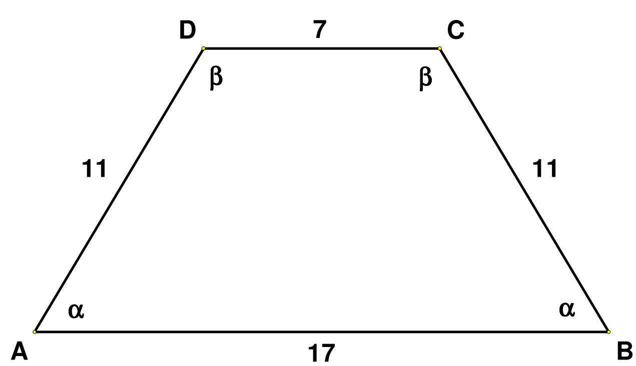
Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne). Trapez je jednakokračan ako su mu nasuprotne neparalelne stranice jednake duljine, a kutovi uz osnovicu sukladni. Nasuprotni kutovi su suplementni (zbroj iznosi 180º).

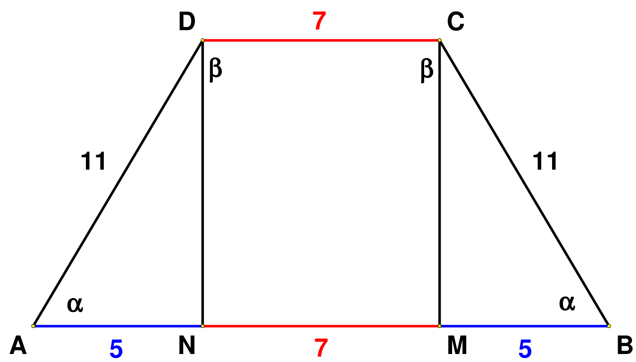


Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

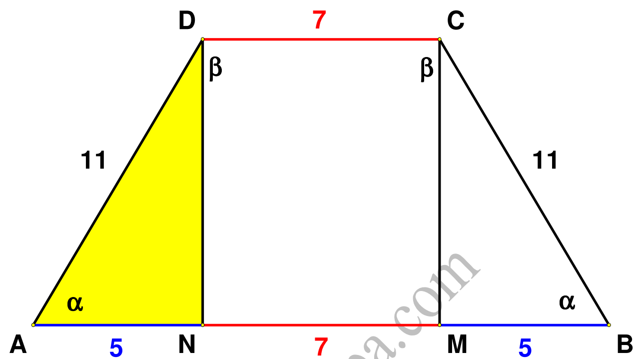
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.





Sa slike vidi se:

$$|AB| = 17 \;,\; |BC| = |AD| = 11 \;,\; |CD| = |NM| = 7 \;,\; |AN| = |MB| = 5$$



Na slici uočimo pravokutan trokut AND i pomoću funkcije kosinus izračunamo kut α.

$$\cos\alpha = \frac{|AN|}{|AD|} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|AN|}{|AD|}\right) \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{11}\right) \Rightarrow \alpha = 62^\circ\, 57'52''.$$

Kut β iznosi:

$$\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \beta = 180^\circ - 62^\circ\, 57'52'' \Rightarrow \beta = 179^\circ\, 59'60'' - 62^\circ\, 57'52'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 117^\circ\, 2'8''.$$

Vježba 092

Koliki su kutovi jednakokračnog trapeza ako su njegove osnovice duge 34 cm i 14 cm, a krak je dug 22 cm?

Rezultat: $\alpha = 62^\circ\, 57'52'',\ \beta = 117^\circ\, 2'8''.$

Zadatak 093 (Vahelani, gimnazija)

Odredi opseg romba kojemu je dulja dijagonala duga 20 cm i sa stranicom zatvara kut od 36° 52' 12".

Rješenje 093

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \;,\; a \geq 0 \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

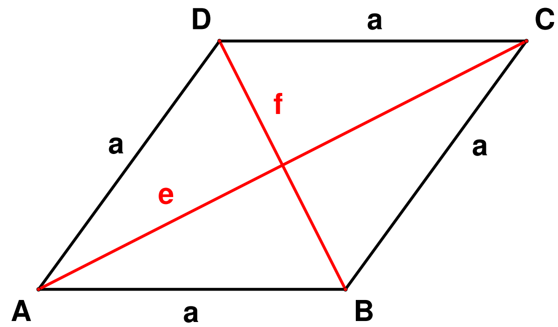
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima

četiri kuta i četiri stranice.
Četverokut s okomitim dijagonalama koji ima barem jednu os simetrije zove se deltoid. Deltoid ima dva para susjednih sukladnih stranica. Romb je deltoid kojemu sjecište dijagonala raspolavlja dijagonale. Opseg romba duljine stranice a izračunavamo po formuli

$$O = 4 \cdot a.$$

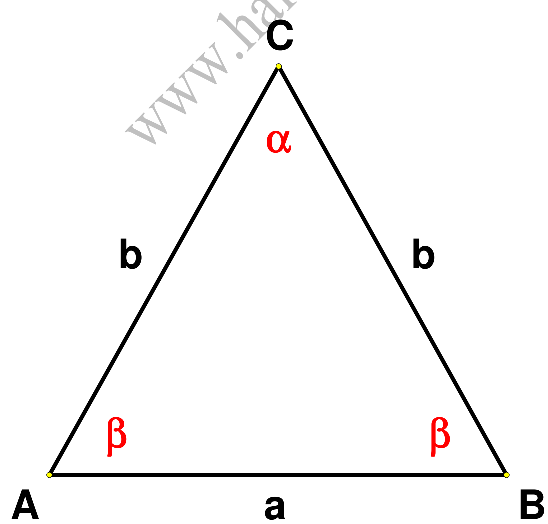


Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:
1) raznostraničan,
2) jednakokračan,
3) jednakostraničan.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta. Zbroj svih kutova u trokutu je 180º.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Za jednakokračan trokut vrijedi:

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^0.$$

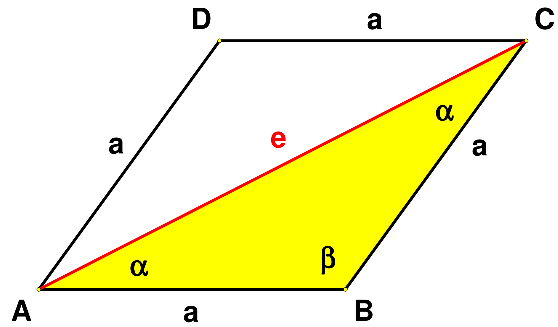


Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



Sa slike vidi se:

$$\left|AC\right| = e \;,\; \left|AB\right| = \left|BC\right| = a \;,\; \angle CAB = \angle BCA = \alpha \;,\; \angle ABC = \beta$$

Trokut ABC je jednakokračan jer ima dvije stranice jednake duljine, $|AB| = |BC|$ pa kut β iznosi:

$$2\cdot\alpha+\beta=180^\circ \Rightarrow \beta=180^\circ-2\cdot\alpha \Rightarrow \beta=180^\circ-2\cdot 36^\circ 52'12'' \Rightarrow \beta=180^\circ-72^\circ 104'24'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[1^\circ=60'\right] \Rightarrow \beta=180^\circ-73^\circ 44'24'' \Rightarrow \beta=179^\circ 59'60''-73^\circ 44'24'' \Rightarrow \beta=106^\circ 15'36''.$$

Uočimo jednakokračan trokut ABC i pomoću poučka o kosinusu izračunamo duljinu stranice a.

$$\left|AC\right|^2=\left|AB\right|^2+\left|BC\right|^2-2\cdot\left|AB\right|\cdot\left|BC\right|\cdot\cos\beta \Rightarrow e^2=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2=2\cdot a^2-2\cdot a^2\cdot\cos\beta \Rightarrow 2\cdot a^2-2\cdot a^2\cdot\cos\beta=e^2 \Rightarrow 2\cdot a^2\cdot(1-\cos\beta)=e^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2\cdot(1-\cos\beta)=e^2 \;/\cdot\frac{1}{2\cdot(1-\cos\beta)} \Rightarrow a^2=\frac{e^2}{2\cdot(1-\cos\beta)} \Rightarrow a^2=\frac{e^2}{2\cdot(1-\cos\beta)} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{\frac{e^2}{2\cdot(1-\cos\beta)}} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{e^2}}{\sqrt{2\cdot(1-\cos\beta)}} \Rightarrow a=\frac{e}{\sqrt{2\cdot(1-\cos\beta)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{20\ cm}{\sqrt{2\cdot\left(1-\cos 106^\circ 15'36''\right)}} \Rightarrow a=12.5\ cm.$$

Opseg romba ABCD iznosi:

$$O=4\cdot a \Rightarrow O=4\cdot 12.5\ cm \Rightarrow O=50\ cm.$$

Vježba 093

Odredi opseg romba kojemu je dulja dijagonala duga 2 dm i sa stranicom zatvara kut od 36° 52' 12".

Rezultat: 50 cm.

Zadatak 094 (Willy, gimnazija)

Zbroj n – 1 kutova konveksnog n – terokuta jednak je 1380°. Kut koji nije u zbroju iznosi:

$$A.\ 10^\circ \qquad B.\ 30^\circ \qquad C.\ 45^\circ \qquad D.\ 60^\circ$$

Rješenje 094

Ponovimo!

$$a<b \Rightarrow a+c<b+c \;,\; c\in R \qquad , \qquad a<b \;,\; c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \qquad , \qquad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Poligon (mnogokut) je skup svih točaka ravnine omeđen dužinama. Ako je omeđen sa n dužina zove

se n – terokut. U konveksnom je poligonu svaki unutarnji kut manji od 180º.
Zbroj unutarnjih kutova poligona od n stranica je

$$K(n) = (n-2) \cdot 180^\circ.$$

Zbroj unutarnjih kutova svakog konveksnog n – terokuta je

$$(n-2) \cdot 180^\circ.$$

U postavljenom zadatku je zbroj n – 1 kutova konveksnog n – terokuta jednak 1380º. Neka je α kut koji nije u zbroju. Tada vrijedi jednadžba:

$$\alpha = (n-2) \cdot 180^\circ - 1380^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ \cdot n - 360^\circ - 1380^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ \cdot n - 1740^\circ.$$

Budući da je poligon konveksan, svaki unutarnju kut mora biti manji od 180º. Dalje slijedi:

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < 180^\circ \cdot n - 1740^\circ < 180^\circ \Rightarrow 0^\circ < 180^\circ \cdot n - 1740^\circ < 180^\circ \ /+1740^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0^\circ + 1740^\circ < 180^\circ \cdot n - 1740^\circ + 1740^\circ < 180^\circ + 1740^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1740^\circ < 180^\circ \cdot n - 1740^\circ + 1740^\circ < 1920^\circ \Rightarrow 1740^\circ < 180^\circ \cdot n < 1920^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1740^\circ < 180^\circ \cdot n < 1920^\circ \ /:180^\circ \Rightarrow 9.667 < n < 10.667 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{n je prirodan} \\ \text{broj} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 10 \Rightarrow \begin{bmatrix} n = 10 \\ \alpha = 180^\circ \cdot n - 1740^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = 180^\circ \cdot 10 - 1740^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 094

Zbroj n – 1 kutova konveksnog n – terokuta jednak je 1050º. Kut koji nije u zbroju iznosi:

$$A.\ 10^\circ \qquad B.\ 30^\circ \qquad C.\ 45^\circ \qquad D.\ 60^\circ$$

Rezultat: B.

Zadatak 095 (Šibenska vesela trojka ☺, gimnazija)

Koliki su opseg i površina trapeza ABCD ako su duljine njegovih stranica jednake: a = 10 cm, c = 6 cm, d = 8.24 cm, a kut α = 72°48'?

Rješenje 095

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.
Trapez je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice usporedne (paralelne). Usporedne stranice zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Ploština trapeza izračunava se po formuli

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v,$$

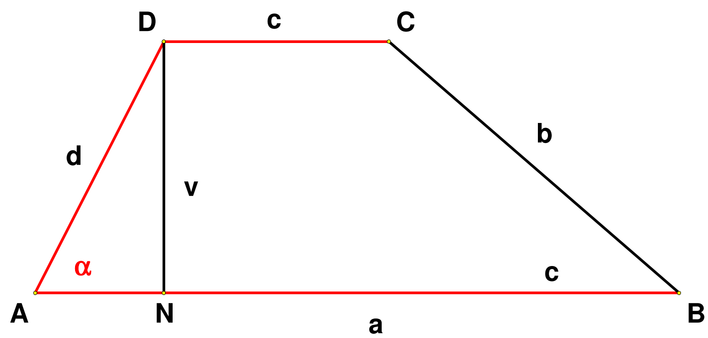
gdje je v visina trapeza.

Opseg trapeza računa se po formuli:

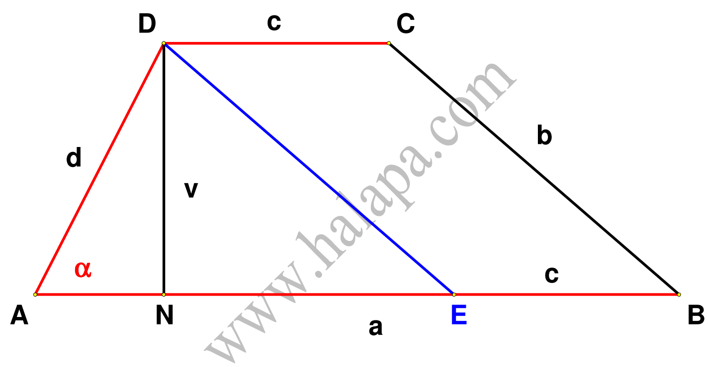
$$O = a + b + c + d,$$

gdje su a, b, c i d duljine njegovih stranica.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$



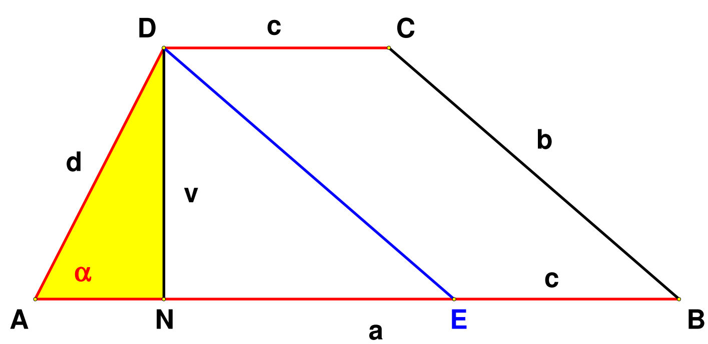
Točkom D konstruiramo dužinu $\overline{DE}$ usporednu sa dužinom $\overline{BC}$.



Sa slike vidi se:

$$|AB| = a = 10 \ cm \quad , \quad |BC| = |DE| = b \quad , \quad |CD| = |EB| = c = 6 \ cm \quad , \quad |AD| = d = 8.24 \ cm$$

$$|AE| = |AB| - |EB| = a - c \quad , \quad |ND| = v \quad , \quad \angle DAN = \alpha = 72^\circ \, 48'$$



Uočimo pravokutan trokut AND i izračunamo duljinu visine v uporabom funkcije sinus.

$$\sin \alpha = \frac{|ND|}{|AD|} \ \Rightarrow \ \sin \alpha = \frac{v}{d} \ \Rightarrow \ \frac{v}{d} = \sin \alpha \ \Rightarrow \ \frac{v}{d} = \sin \alpha \ / \cdot d \ \Rightarrow \ v = d \cdot \sin \alpha.$$

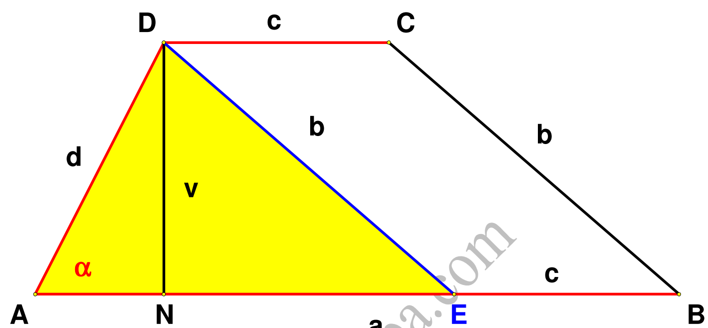
Površina trapeza ABCD iznosi:

$$P=\frac{a+c}{2}\cdot v \Rightarrow \left[v=d\cdot\sin\alpha\right] \Rightarrow P=\frac{a+c}{2}\cdot d\cdot\sin\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} a=10\ cm \\ c=6\ cm \\ d=8.24\ cm \\ \alpha=72^\circ\ 48' \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{10\ cm+6\ cm}{2}\cdot 8.24\ cm\cdot\sin 72^\circ\ 48' \Rightarrow P=\frac{16\ cm}{2}\cdot 8.24\ cm\cdot\sin 72^\circ\ 48' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{16\ cm}{2}\cdot 8.24\ cm\cdot\sin 72^\circ\ 48' \Rightarrow P=8\ cm\cdot 8.24\ cm\cdot\sin 72^\circ\ 48' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{Ponovno} \\ \text{kalkulator} \\ \text{u ruke!} \end{bmatrix} \Rightarrow P=62.97\ cm^2.$$



Da bismo izračunali duljinu stranice b promotrimo trokut AED i uporabom poučka o kosinusu dobije se:

$$|DE|^2=|AD|^2+|AE|^2-2\cdot|AD|\cdot|AE|\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=d^2+(a-c)^2-2\cdot d\cdot(a-c)\cdot\cos\alpha \Rightarrow b^2=d^2+(a-c)^2-2\cdot d\cdot(a-c)\cdot\cos\alpha\ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{d^2+(a-c)^2-2\cdot d\cdot(a-c)\cdot\cos\alpha} \Rightarrow \begin{bmatrix} d=8.24\ cm \\ a=10\ cm \\ c=6\ cm \\ \alpha=72^\circ\ 48' \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{(8.24\ cm)^2+(10\ cm-6\ cm)^2-2\cdot 8.24\ cm\cdot(10\ cm-6\ cm)\cdot\cos 72^\circ\ 48'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\text{Kalkulator!}\right] \Rightarrow b=8.03\ cm.$$

Opseg trapeza iznosi:

$$O=a+b+c+d \Rightarrow \begin{bmatrix} a=10\ cm \\ b=8.03\ cm \\ c=6\ cm \\ d=8.24\ cm \end{bmatrix} \Rightarrow O=10\ cm+8.03\ cm+6\ cm+8.24\ cm \Rightarrow O=32.27\ cm.$$

Vježba 095

Koliki su površina i opseg trapeza ABCD ako su duljine njegovih stranica jednake: a = 1 dm, c = 0.6 dm, d = 82.4 mm, a kut α = 72°48'?

Rezultat: 62.97 cm^2, 32.27 cm.

Zadatak 096 (Dubravko, srednja škola)

Konveksni četverokut ABCD ima prave kutove pri vrhovima B i D. Ako je │BC│=1, │CD│= 4, │DA│= 3, kolika je površina četverokuta ABCD?

Rješenje 096

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Opseg četverokuta dan je formulom

$$O = a + b + c + d,$$

gdje su a, b, c i d duljine njegovih stranica.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Ploština pravokutnog trokuta čije su katete a i b dana je formulom

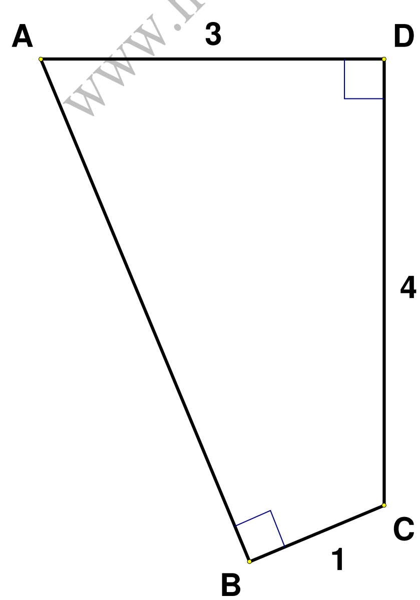
$$P = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

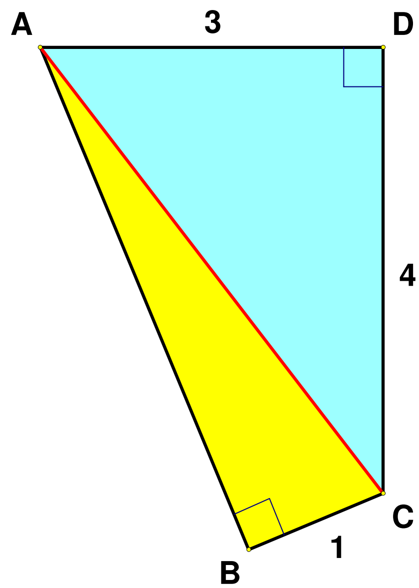
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$



Sa slike vidi se:

$$|BC| = 1, \quad |CD| = 4, \quad |DA| = 3, \quad \angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$$



Primjenjujući Pitagorin poučak na pravokutan trokut CDA dobije se:

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 \Rightarrow |AC|^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow |AC|^2 = 9 + 16 \Rightarrow |AC|^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|^2 = 25 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow |AC| = \sqrt{25} \Rightarrow |AC| = 5.$$

Primjenjujući Pitagorin poučak na pravokutan trokut ABC dobije se:

$$|AB|^2 = |AC|^2 - |BC|^2 \Rightarrow |AB|^2 = 5^2 - 1^2 \Rightarrow |AB|^2 = 25 - 1 \Rightarrow |AB|^2 = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|^2 = 24 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow |AB| = \sqrt{4 \cdot 6} \Rightarrow |AB| = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} \Rightarrow |AB| = 2 \cdot \sqrt{6}.$$

Ploština četverokuta ABCD jednaka je zbroju ploština pravokutnih trokuta ΔCDA i ΔABC.

$$P_{ABCD} = P_{CDA} + P_{ABC} \Rightarrow P_{ABCD} = \frac{|CD| \cdot |DA|}{2} + \frac{|AB| \cdot |BC|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot \sqrt{6} \cdot 1}{2} \Rightarrow P_{ABCD} = \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot \sqrt{6}}{2} \Rightarrow P_{ABCD} = 6 + \sqrt{6}.$$

Vježba 096

Konveksni četverokut ABCD ima prave kutove pri vrhovima B i D. Ako je |BC| = 1, |CD| = 4, |DA| = 3, koliki je opseg četverokuta ABCD?

Rezultat: $O = 8 + 2 \cdot \sqrt{6}.$

Zadatak 097 (Ante, srednja škola)

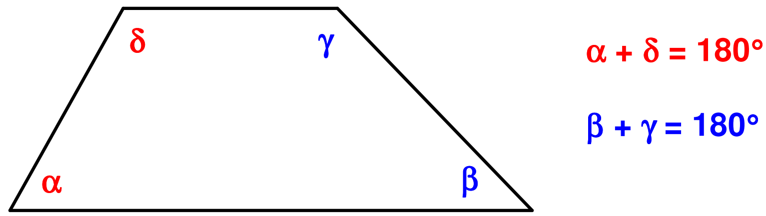
Osnovice trapeza su 13 cm i 5 cm, a kraci 7 cm i 3 cm. Izračunajte kutove trapeza.

Rješenje 097

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne). Kutovi trapeza uz isti krak su suplementni (zbroj je 180°).



Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

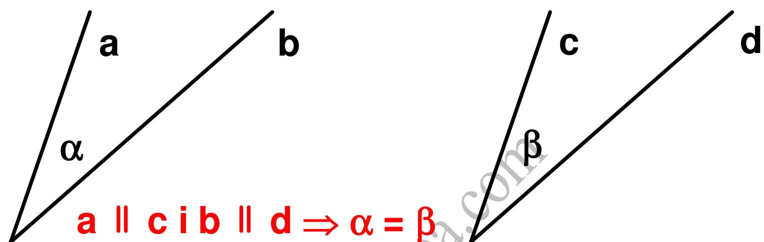
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

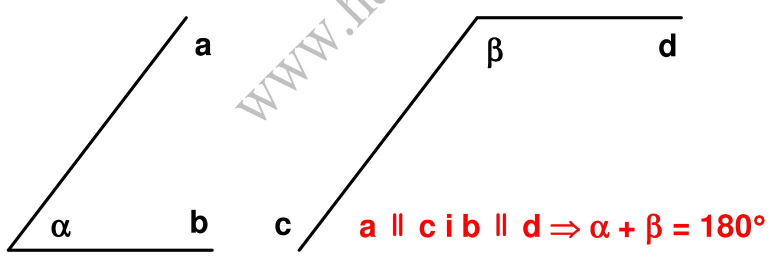
Kutovi s paralelnim kracima su:

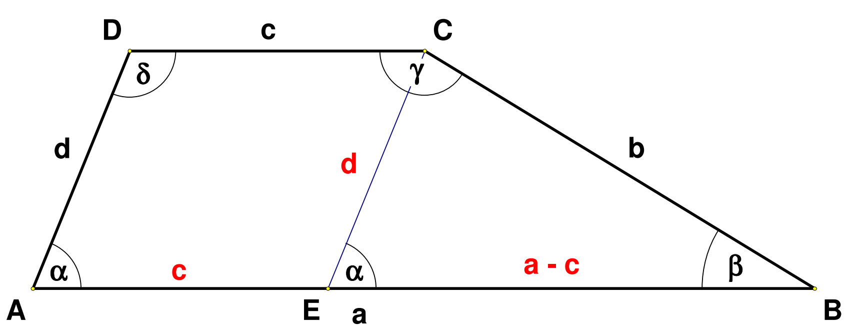
- sukladni



ili

- suplementni





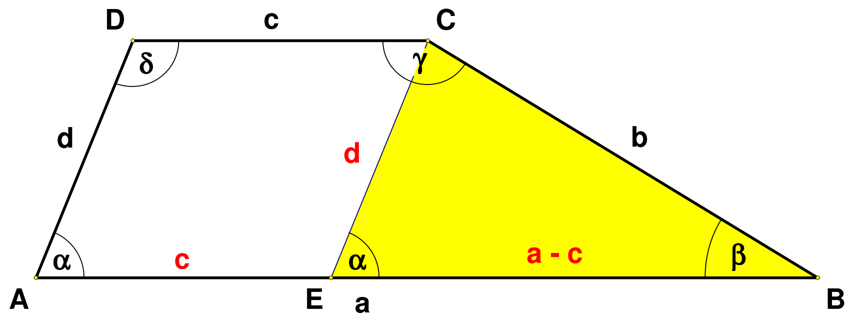
Sa slike vidi se:

$$|AB| = a = 13\ cm\ ,\ |BC| = b = 7\ cm\ ,\ |CD| = |AE| = c = 5\ cm\ ,\ |DA| = |CE| = d = 3\ cm$$

$$|EB| = |AB| - |AE| = a - c = 13\ cm - 5\ cm = 8\ cm$$

$$\angle DAB = \alpha\ ,\ \angle ABC = \beta\ ,\ \angle BCA = \gamma\ ,\ \angle CDA = \delta$$

Uočimo trokut EBC i uporabimo kosinusov poučak da bismo izračunali mjeru kuta α.



$$\left|BC\right|^2=\left|EB\right|^2+\left|CE\right|^2-2\cdot\left|EB\right|\cdot\left|CE\right|\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=(a-c)^2+d^2-2\cdot(a-c)\cdot d\cdot\cos\alpha \Rightarrow 2\cdot(a-c)\cdot d\cdot\cos\alpha=(a-c)^2+d^2-b^2 \Rightarrow$$

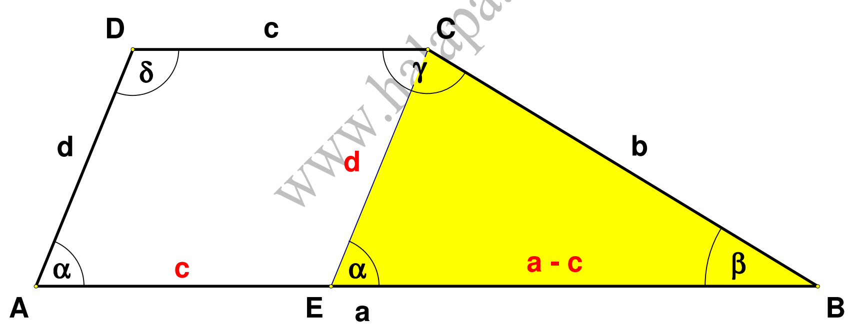
$$\Rightarrow 2\cdot(a-c)\cdot d\cdot\cos\alpha=(a-c)^2+d^2-b^2 \quad /\cdot\frac{1}{2\cdot(a-c)\cdot d} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{(a-c)^2+d^2-b^2}{2\cdot(a-c)\cdot d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\cos^{-1}\left(\frac{(a-c)^2+d^2-b^2}{2\cdot(a-c)\cdot d}\right) \Rightarrow \alpha=\cos^{-1}\left(\frac{(8\ cm)^2+(3\ cm)^2-(7\ cm)^2}{2\cdot 8\ cm\cdot 3\ cm}\right) \Rightarrow \alpha=60^\circ.$$

Mjera kuta δ je:

$$\alpha+\delta=180^\circ \Rightarrow \delta=180^\circ-\alpha \Rightarrow \delta=180^\circ-60^\circ \Rightarrow \delta=120^\circ.$$

Na istom trokutu EBC uporabimo kosinusov poučak da bismo izračunali mjeru kuta β.



$$\left|EC\right|^2=\left|EB\right|^2+\left|BC\right|^2-2\cdot\left|EB\right|\cdot\left|BC\right|\cdot\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2=(a-c)^2+b^2-2\cdot(a-c)\cdot b\cdot\cos\beta \Rightarrow 2\cdot(a-c)\cdot b\cdot\cos\beta=(a-c)^2+b^2-d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(a-c)\cdot b\cdot\cos\beta=(a-c)^2+b^2-d^2 \quad /\cdot\frac{1}{2\cdot(a-c)\cdot b} \Rightarrow \cos\beta=\frac{(a-c)^2+b^2-d^2}{2\cdot(a-c)\cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=\cos^{-1}\left(\frac{(a-c)^2+b^2-d^2}{2\cdot(a-c)\cdot b}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=\cos^{-1}\left(\frac{(8\ cm)^2+(7\ cm)^2-(3\ cm)^2}{2\cdot 8\ cm\cdot 7\ cm}\right) \Rightarrow \beta=21^\circ 47'12''.$$

Mjera kuta γ je:

$$\beta+\gamma=180^\circ \Rightarrow \gamma=180^\circ-\beta \Rightarrow \gamma=180^\circ-21^\circ 47'12'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 179^\circ 59'60'' - 21^\circ 47'12'' \Rightarrow \gamma = 158^\circ 12'48''.$$

Vježba 097

Osnovice trapeza su 1.3 dm i 0.5 dm, a kraci 0.7 dm i 0.3 dm. Izračunajte kutove trapeza.

Rezultat: $\alpha = 60^\circ \;,\; \beta = 21^\circ 47'12'' \;,\; \gamma = 158^\circ 12'48'' \;,\; \delta = 120^\circ.$

Zadatak 098 (Marina, srednja škola)

Dijagonale paralelograma su 16 cm i 10 cm, a kut između dijagonala je 60°. Izračunajte duljine njegovih stranica.

Rješenje 098

Ponovimo!

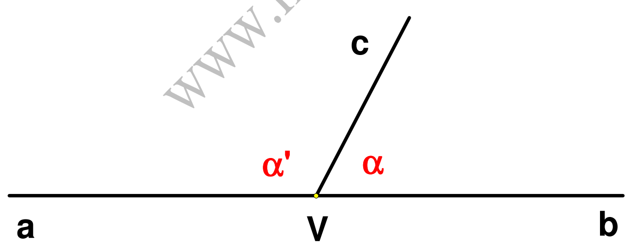
Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Paralelogram je četverokut kojemu oba para nasuprotnih stranica leže na paralelnim pravcima.
Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).
Dijagonala paralelograma je spojnica dva nesusjedna vrha. Paralelogram ima dvije dijagonale koje se međusobno raspolavljaju.
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta,$$

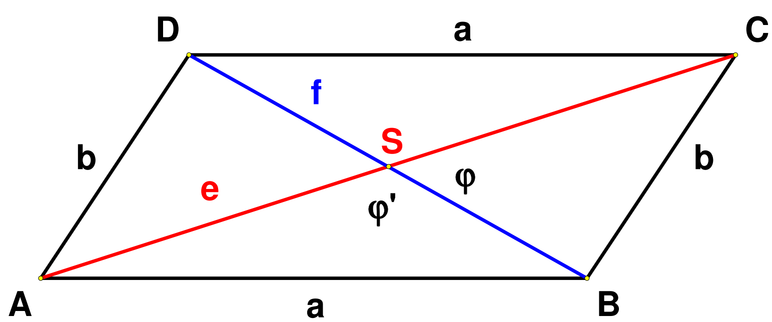
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

Kutovi koji imaju jedan krak zajednički, a unija drugih dvaju krakova je pravac zovu se sukuti.



$$\alpha + \alpha' = 180^\circ.$$

Suplementni su oni kutovi kojima je zbroj mjernih brojeva kutova 180°.



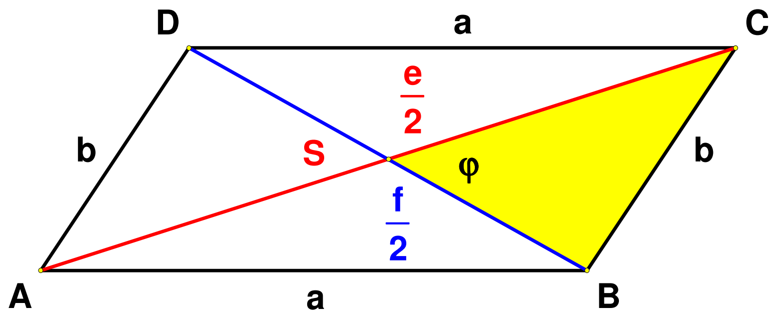
Sa slike vidi se:

$$|AB| = |DC| = a \;,\; |BC| = |AD| = b \;,\; |AC| = e = 16 \; cm \;,\; |BD| = f = 10 \; cm$$

$$|AS| = |SC| = \frac{e}{2} = 8\ cm\ \ ,\ \ |BS| = |SD| = \frac{f}{2} = 5\ cm$$

$$\angle BSC = \varphi = 60^\circ\ \ ,\ \ \angle BSA = \varphi' = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Uočimo trokut BCS i uporabimo kosinusov poučak da bismo izračunali duljinu stranice b.



$$|BC|^2 = |BS|^2 + |SC|^2 - 2 \cdot |BS| \cdot |SC| \cdot \cos\varphi \Rightarrow$$

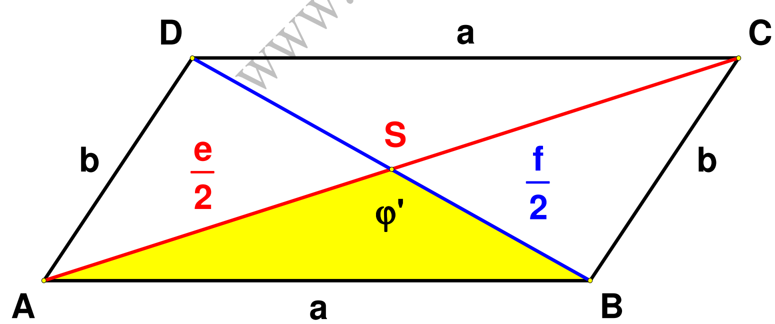
$$\Rightarrow b^2 = \left(\frac{f}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{f}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \cos\varphi \Rightarrow b^2 = (5\ cm)^2 + (8\ cm)^2 - 2 \cdot 5\ cm \cdot 8\ cm \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 25\ cm^2 + 64\ cm^2 - 2 \cdot 5\ cm \cdot 8\ cm \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = 25\ cm^2 + 64\ cm^2 - 2 \cdot 5\ cm \cdot 8\ cm \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 25\ cm^2 + 64\ cm^2 - 40\ cm^2 \Rightarrow b^2 = 49\ cm^2 \Rightarrow b^2 = 49\ cm^2\ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{49\ cm^2} \Rightarrow b = 7\ cm.$$

Uočimo trokut ABS i uporabimo kosinusov poučak da bismo izračunali duljinu stranice a.



$$|AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos\varphi' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\varphi' \Rightarrow a^2 = (8\ cm)^2 + (5\ cm)^2 - 2 \cdot 8\ cm \cdot 5\ cm \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 64\ cm^2 + 25\ cm^2 - 2 \cdot 8\ cm \cdot 5\ cm \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 64\ cm^2 + 25\ cm^2 + 8\ cm \cdot 5\ cm \Rightarrow a^2 = 64\ cm^2 + 25\ cm^2 + 40\ cm^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 129\ cm^2 \Rightarrow a^2 = 129\ cm^2\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a = \sqrt{129\ cm^2} \Rightarrow a = \sqrt{129}\ cm.$$

Vježba 098

Dijagonale paralelograma su 16 cm i 10 cm, a kut između dijagonala je 60°. Izračunajte duljine njegovih stranica.

Rezultat: $a = \sqrt{129}\ cm\ ,\ b = 7\ cm.$

Zadatak 099 (1B, TUPŠ)

A(3, – 7) i B(– 1, – 4) su dva susjedna vrha kvadrata. Izračunati opseg, površinu i duljinu dijagonale kvadrata.

Rješenje 099

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.
Opseg kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$O = 4 \cdot a.$$

Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

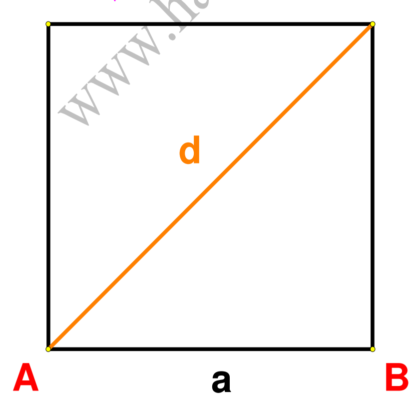
$$P = a^2.$$

Duljina dijagonale d kvadrata izračunava se po formuli

$$d = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Izračunamo duljinu stranice a kvadrata.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(3, -7) \\ B(x_2, y_2) = B(-1, -4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[a = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{(-1-3)^2 + (-4-(-7))^2} \Rightarrow a = \sqrt{(-4)^2 + (-4+7)^2} \Rightarrow a = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{16+9} \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5\ cm.$$

Tada je:

- opseg kvadrata

$$O = 4 \cdot a \Rightarrow O = 4 \cdot 5\ cm \Rightarrow O = 20\ cm$$

- površina kvadrata

$$P = a^2 \Rightarrow P = (5\ cm)^2 \Rightarrow P = 25\ cm^2.$$

- duljina dijagonale kvadrata

$$d = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow d = 5 \cdot \sqrt{2}\ cm.$$

Vježba 099

A(– 3, – 7) i B(1, – 4) su dva susjedna vrha kvadrata. Izračunati opseg kvadrata.

Rezultat: 20 cm.

Zadatak 100 (1B, TUPŠ)

A(– 8, 11) i B(– 5, – 10) su suprotni vrhovi kvadrata. Izračunati dijagonalu, opseg i površinu kvadrata.

Rješenje 100

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.
Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite.
Opseg kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$O = 4 \cdot a.$$

Ploština kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P = a^2.$$

Duljina dijagonale d kvadrata izračunava se po formuli

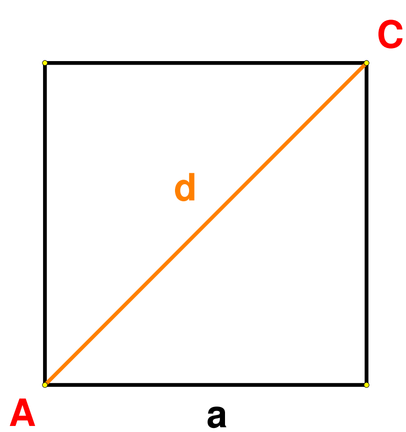
$$d = a \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$



Izračunamo duljinu dijagonale d kvadrata.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right)=A(-8,11) \\ C\left(x_2,\ y_2\right)=C(-5,-10) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ d=|AC|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{(-5-(-8))^2+(-10-11)^2} \Rightarrow d=\sqrt{(-5+8)^2+(-21)^2} \Rightarrow d=\sqrt{3^2+(-21)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{9+441} \Rightarrow d=\sqrt{450} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje}\end{array}\right] \Rightarrow d=\sqrt{225\cdot 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{225}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow d=15\cdot\sqrt{2}\ cm.$$

Tada je:

- duljina stranice a kvadrata

$$a=\frac{d\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a=\frac{15\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a=\frac{15\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{15\cdot 2}{2} \Rightarrow a=\frac{15\cdot 2}{2} \Rightarrow a=15\ cm$$

- opseg kvadrata

$$O=4\cdot a \Rightarrow O=4\cdot 15\ cm \Rightarrow O=60\ cm$$

- površina kvadrata

$$P=a^2 \Rightarrow P=(15\ cm)^2 \Rightarrow P=225\ cm^2.$$

Vježba 100

A(8, 11) i B(5, – 10) su suprotni vrhovi kvadrata. Izračunati duljinu stranice a kvadrata.

Rezultat: 15 cm.