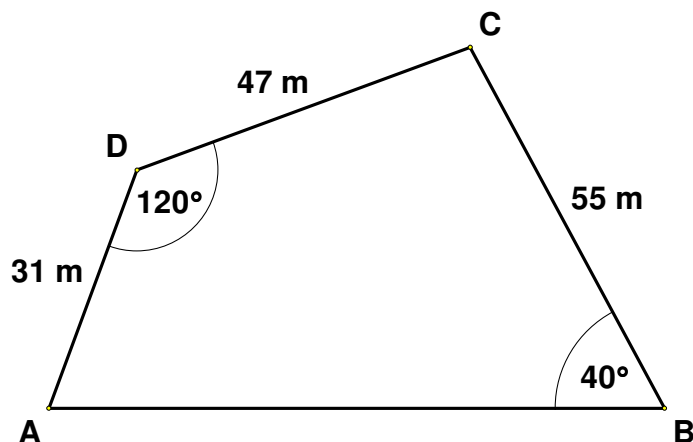


Zadatak 101 (4A, 4B, TUPŠ)

Slika prikazuje oblik zemljišta i neke njegove mjere.



- Izračunajte udaljenost točaka A i C.
- Izračunajte mjeru kuta BAC.
- Kolika je površina zemljišta sa slike?

Rješenje 101

Ponovimo!

$$1^\circ = 60' \quad , \quad 1' = 60'' \quad , \quad b \cdot \frac{a}{b} = a \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Rezolvirati znači jedinice – veličine višega reda pretvoriti u jedinice – veličine nižega reda. Tu množimo s pretvornicima.

Na primjer,

$$4 \text{ h } 15 \text{ min } 20 \text{ s} = 4 \cdot 3600 \text{ s} + 15 \cdot 60 \text{ s} + 20 \text{ s} = 15320 \text{ s}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri stranice.

Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta.

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Zbroj kutova u trokutu je 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Ploština trokuta kojemu su zadane duljine dviju stranica i mjera kuta između njih računa se po formulama:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha.$$

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

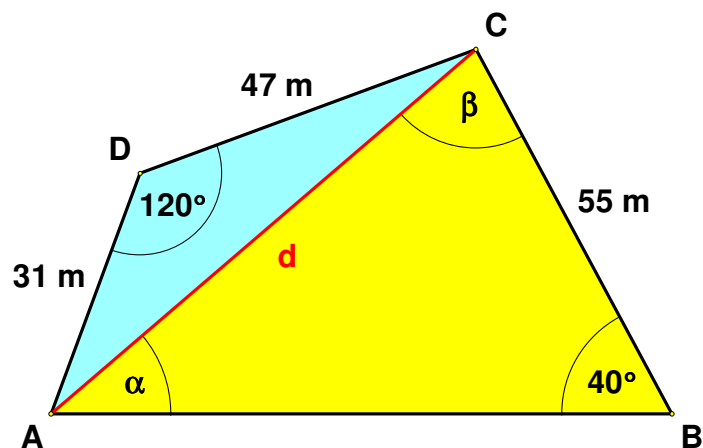
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

Poučak o sinusu

U trokutu ABC vrijedi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma},$$

pri čemu su a, b i c duljine stranica trokuta.



Sa slike vidi se:

$$|BC| = 55, |CD| = 47, |DA| = 31, \angle CDA = 120^\circ, \angle ABC = 40^\circ, \angle CAB = \alpha \\ \angle BCA = \beta, |AC| = d$$

a)

Uočimo trokut ACD. Pomoću poučka o kosinusima dobivamo:

$$|AC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2 - 2 \cdot |CD| \cdot |DA| \cdot \cos \angle CDA \Rightarrow \\ \Rightarrow d^2 = 47^2 + 31^2 - 2 \cdot 47 \cdot 31 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow d^2 = 2209 + 961 - 2914 \cdot (-0.5) \Rightarrow \\ \Rightarrow d^2 = 4627 \Rightarrow d = \sqrt{4627} \Rightarrow d = 68.02 \text{ m.}$$

b)

Računamo mjeru kuta BAC. Uočimo trokut ABC. Iz sinusovog poučka razabiremo da je:

$$\frac{|BC|}{\sin \alpha} = \frac{|AC|}{\sin 40^\circ} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{|BC|} = \frac{\sin 40^\circ}{|AC|} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{|BC|} = \frac{\sin 40^\circ}{|AC|} \cdot |BC| \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin \alpha = \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \sin 40^\circ \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{|BC|}{|AC|} \cdot \sin 40^\circ \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} \left(\frac{55}{68.02} \cdot \sin 40^\circ \right) \Rightarrow \alpha = 31^\circ 18' 56''.$$

c)

U trokutu ABC izračunamo mjeru kuta β . Kut β računamo iz osnovne relacije

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

za kutove trokuta.

$$\angle BCA + \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow \beta + 31^\circ 18' 56'' + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 31^\circ 18' 56'' - 40^\circ \Rightarrow \beta = 140^\circ - 31^\circ 18' 56'' \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta = 139^\circ 59' 60'' - 31^\circ 18' 56'' \Rightarrow \beta = 108^\circ 41' 4''.$$

Da bismo izračunali površinu četverokuta ABCD konstruirat ćemo dijagonalu AC i dobiti dva trokuta: ΔABC i ΔACD . Površina četverokuta ABCD jednaka je zbroju površina trokuta ΔABC i ΔACD .

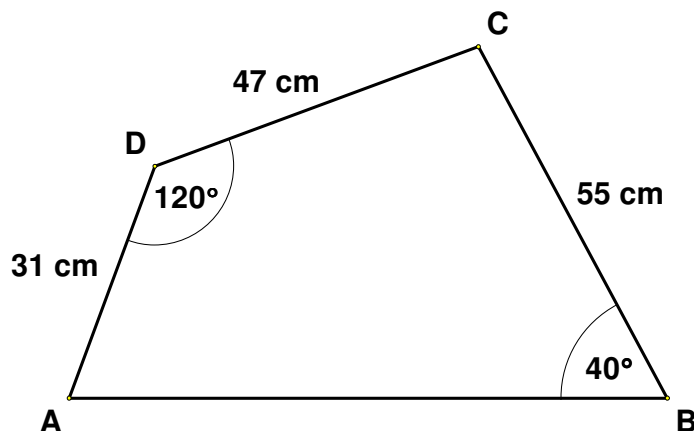
$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} \Rightarrow P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin \beta + \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |DA| \cdot \sin 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 55 \cdot 68.02 \cdot \sin 108^\circ 41' 4'' + \frac{1}{2} \cdot 47 \cdot 31 \cdot \sin 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = 1771.97 + 630.90 \Rightarrow P_{ABCD} = 2402.87 \text{ m}^2.$$

Vježba 101

Slika prikazuje oblik zemljišta i neke njegove mjere.

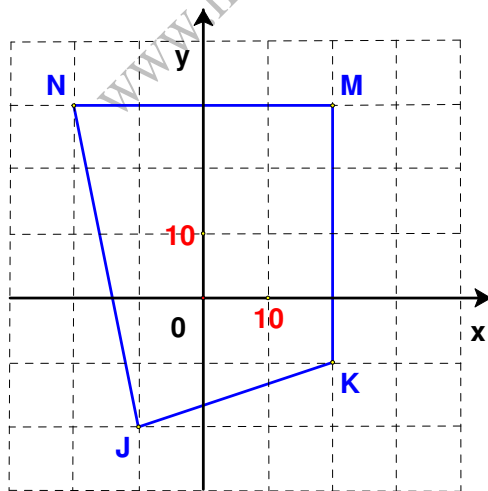


- Izračunajte udaljenost točaka A i C.
- Izračunajte mjeru kuta BAC.
- Kolika je površina zemljišta sa slike?

Rezultat: 68.02 cm, $31^\circ 18' 56''$, 2402.87 cm^2 .

Zadatak 102 (4A, 4B, TUPŠ)

Oblik igrališta ucrtan je u koordinatni sustav. Koordinate točaka zadane su u metrima.



- Koje koordinate ima točka J?
- Koliko metara iznosi najkraći put od točke N do točke J?
- Kolika je ploština dijela igrališta određenoga točkama JMN?

Rješenje 102

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}, \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2}, \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x , $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x , $x < 0$, je $|x| = -x$.

Ako su poznate koordinate vrhova trokuta $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ njegova ploština može se izračunati po jednoj od formula:

- $$P = \frac{1}{2} \cdot |x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)|$$
- $$P = \frac{1}{2} \cdot |y_1 \cdot (x_2 - x_3) + y_2 \cdot (x_3 - x_1) + y_3 \cdot (x_1 - x_2)|.$$

Apsolutna vrijednost osigurava da ploština bude pozitivna. Treba paziti na cikličku izmjenu indeksa u formulama: $1, 2, 3 \rightarrow 2, 3, 1 \rightarrow 3, 1, 2$.

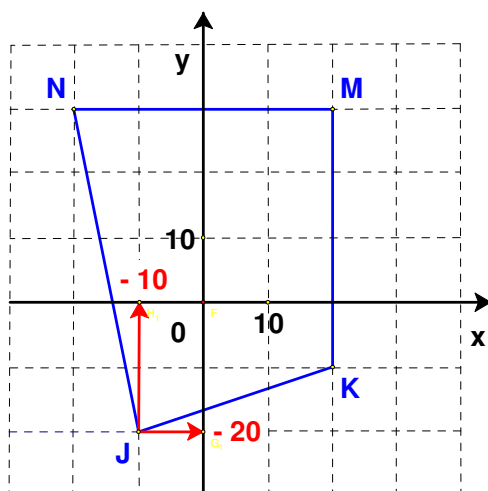
Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

a) Odredimo koordinate točke J.



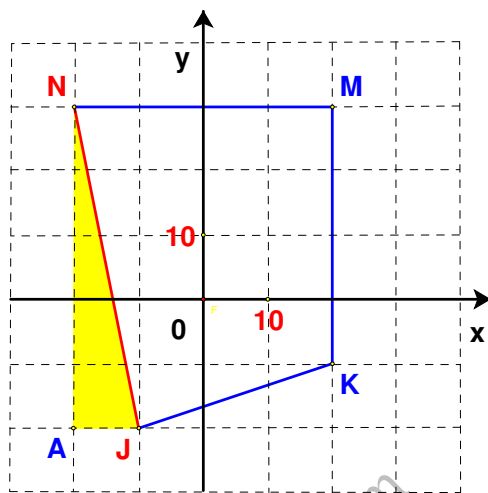
Povučemo točkom J paralelu s y – osi. Ta paralela siječe x – os u točki kojoj je pridružen točno jedan realan broj, – 10.

Povučemo li točkom J paralelu s x – osi ta paralela siječe y – os u točki kojoj je pridružen točno jedan realan broj, – 20.

Tražene koordinate točke J su:

$$J(x, y) = J(-10, -20).$$

b) Računamo najkraći put od točke N do točke J.



1. inačica

Sa slike vidi se:

$$|NA| = 50 \text{ m} , |AJ| = 10 \text{ m}$$

Uočimo pravokutan trokut NAJ s pravim kutom u točki A i hipotenuzom \overline{NJ} . Duljine kateta tog trokuta su $|NA| = 50 \text{ m}$ i $|AJ| = 10 \text{ m}$. Primjenom Pitagorina poučka na trokut NAJ dobije se:

$$\begin{aligned} |NJ|^2 &= |NA|^2 + |AJ|^2 \Rightarrow |NJ|^2 = (50 \text{ m})^2 + (10 \text{ m})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow |NJ|^2 &= 2500 \text{ m}^2 + 100 \text{ m}^2 \Rightarrow |NJ|^2 = 2600 \text{ m}^2 \Rightarrow |NJ|^2 = 2600 \text{ m}^2 \sqrt{} \Rightarrow \\ \Rightarrow |NJ| &= \sqrt{2600 \text{ m}^2} \Rightarrow |NJ| = \sqrt{100 \cdot 26 \text{ m}^2} \Rightarrow |NJ| = \sqrt{100} \cdot \sqrt{26} \text{ m} \Rightarrow \\ \Rightarrow |NJ| &= 10 \cdot \sqrt{26} \text{ m} \Rightarrow |NJ| = 50.99 \text{ m}. \end{aligned}$$

2. inačica

Sa slike vidi se da koordinate točaka N i J glase:

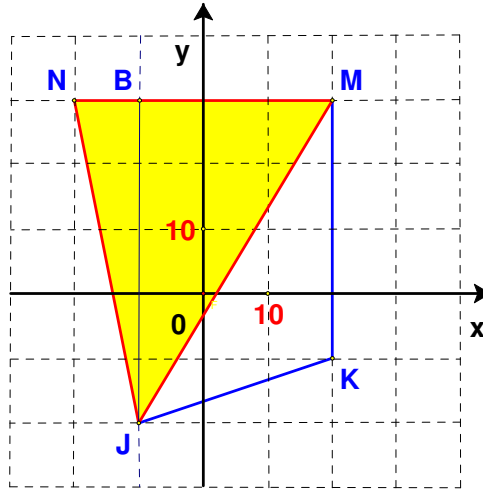
$$\left. \begin{aligned} N(x, y) &= N(-20, 30) \\ J(x, y) &= J(-10, -20) \end{aligned} \right\}$$

Sada treba izračunati udaljenost između točaka N i J.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} N(x_1, y_1) &= N(-20, 30) \\ J(x_2, y_2) &= J(-10, -20) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[|NJ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow |NJ| &= \sqrt{(-10 - (-20))^2 + (-20 - 30)^2} \Rightarrow |NJ| = \sqrt{(-10 + 20)^2 + (-50)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow |NJ| &= \sqrt{10^2 + (-50)^2} \Rightarrow |NJ| = \sqrt{100 + 2500} \Rightarrow |NJ| = \sqrt{2600} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |NJ| = \sqrt{100 \cdot 26} \Rightarrow |NJ| = \sqrt{100} \cdot \sqrt{26} \Rightarrow |NJ| = 10 \cdot \sqrt{26} \Rightarrow |NJ| = 50.99 \text{ m.}$$

c) Računamo ploštinu dijela igrališta određenoga točkama JMN.



1. inačica

Sa slike vidi se:

$$|NM| = 40 \text{ m} , |BJ| = 50 \text{ m}$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.

$$P = \frac{|NM| \cdot |BJ|}{2} \Rightarrow P = \frac{40 \text{ m} \cdot 50 \text{ m}}{2} \Rightarrow P = \frac{2000 \text{ m}^2}{2} \Rightarrow P = \frac{2000 \text{ m}^2}{2} \Rightarrow P = 1000 \text{ m}^2.$$

2. inačica

Sa slike odredimo koordinate vrhova trokuta $N(-20, 30)$, $J(-10, -20)$, $M(20, 30)$ pa njegova ploština iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} N(x_1, y_1) = N(-20, 30) \\ J(x_2, y_2) = J(-10, -20) \\ M(x_3, y_3) = M(20, 30) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[P = \frac{1}{2} \cdot |x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2)| \right] \Rightarrow$$

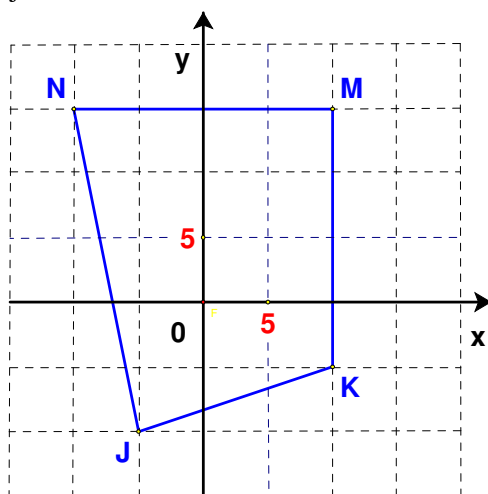
$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot |-20 \cdot (-20 - 30) - 10 \cdot (30 - 30) + 20 \cdot (30 - (-20))| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot |-20 \cdot (-50) - 10 \cdot 0 + 20 \cdot (30 + 20)| \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot |1000 + 20 \cdot 50| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot |1000 + 1000| \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot |2000| \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot 2000 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot 2000 \Rightarrow P = 1000 \text{ m}^2.$$

Vježba 102

Oblik igrališta ucrtan je u koordinatni sustav. Koordinate točaka zadane su u metrima.



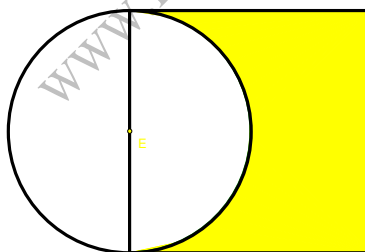
- Koje koordinate ima točka J?
- Koliko metara iznosi najkraći put od točke N do točke J?
- Kolika je ploština dijela igrališta određenoga točkama JMN?

Rezultat: $J(-5, -10)$, 25.50 m, 250 m².

Zadatak 103 (Marija, ekonomska škola)

U polovištu jedne stranice kvadrata nalazi se središte kružnice (vidi sliku). Ako je duljina stranice kvadrata 8 cm, tada površina osjenčanog lika iznosi:

- A. $(64 - 8 \cdot \pi) \text{ cm}^2$ B. $(64 - 16 \cdot \pi) \text{ cm}^2$ C. $56 \cdot \pi \text{ cm}^2$ D. $48 \cdot \pi$



Rješenje 103

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°.

Kvadrat je četverokut kojemu su sve stranice sukladne, a dijagonale međusobno sukladne i okomite. Površina kvadrata duljine stranice a izračunava se po formuli

$$P = a^2.$$

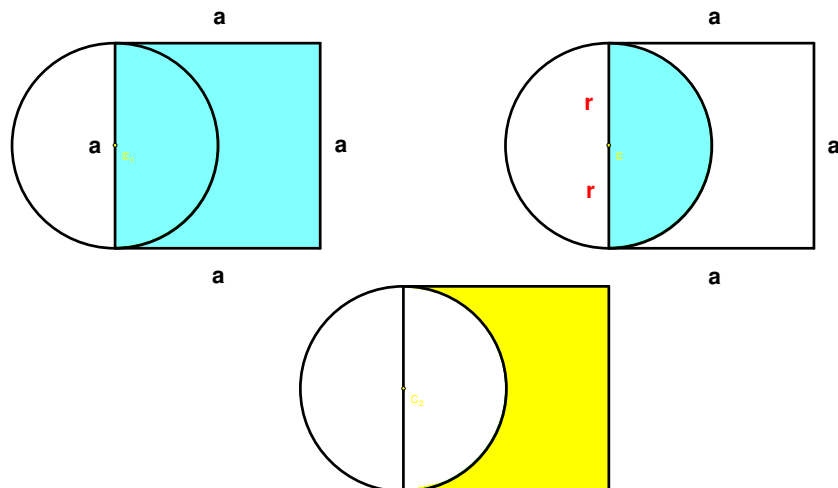
Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju $r > 0$ (polumjeru kruga).

Ploština kruga polumjera r iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$



Sa slika vidi se da je površina osjenčanog (žutog) dijela jednaka razlici površine kvadrata i površine pola kruga. Stranica kvadrata je istodobno promjer kruga pa vrijedi:

$$2 \cdot r = a \Rightarrow 2 \cdot r = a \quad / : 2 \Rightarrow r = \frac{a}{2}$$

Površina osjenčanog lika iznosi:

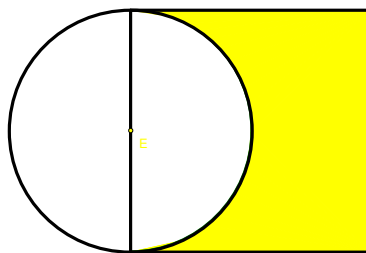
$$\begin{aligned}
 P &= a^2 - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \Rightarrow P = 8^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^2 \cdot \pi \Rightarrow \\
 \Rightarrow P &= 64 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^2 \cdot \pi \Rightarrow P = 64 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \pi \Rightarrow P = 64 - \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \pi \Rightarrow P = 64 - \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \pi \Rightarrow \\
 &\Rightarrow P = (64 - 8 \cdot \pi) \text{ cm}^2.
 \end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

Vježba 103

U polovištu jedne stranice kvadrata nalazi se središte kružnice (vidi sliku). Ako je duljina stranice kvadrata 4 cm, tada površina osjenčanog lika iznosi:

- A. $(16 - 4 \cdot \pi) \text{ cm}^2$ B. $(16 - 2 \cdot \pi) \text{ cm}^2$ C. $36 \cdot \pi \text{ cm}^2$ D. $8 \cdot \pi$



Rezultat: B.

Zadatak 104 (Davor, ekonomska škola)

Iz limenog kruga promjera 180 cm treba izraditi pravokutnik maksimalne površine čija je duljina dva puta veća od širine. Kolike su dimenzije tog pravokutnika?

Rješenje 104

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Kako zapisati "broj a je n puta veći od broja b?"

$$a = n \cdot b \quad , \quad \frac{a}{n} = b \quad , \quad \frac{a}{b} = n.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180° .

Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne).

Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90°).

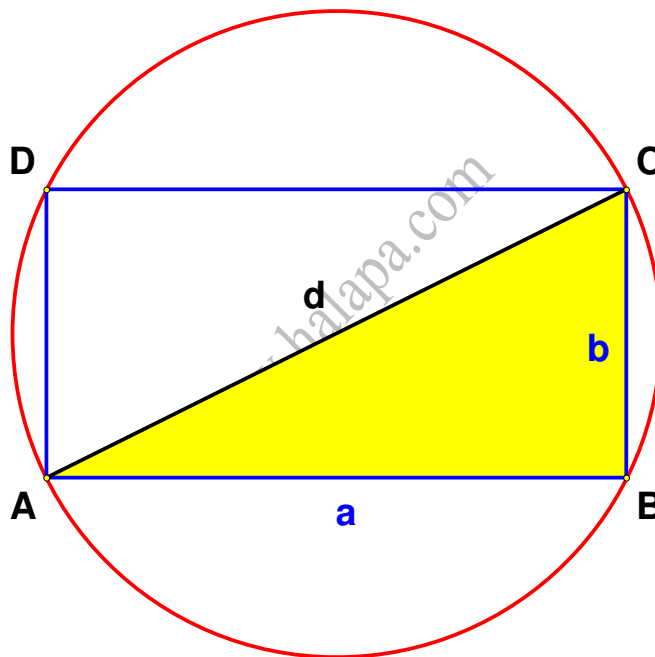
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90°). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Sa slike vidi se:

$$|AB| = |CD| = a \quad , \quad |BC| = |AD| = b \quad , \quad |AC| = d$$

Uočimo da je promjer kruga dijagonala upisanog pravokutnika ABCD. Trokut ABC je pravokutan pa vrijedi Pitagorin poučak:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow [a = 2 \cdot b] \Rightarrow d^2 = (2 \cdot b)^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 4 \cdot b^2 + b^2 \Rightarrow d^2 = 5 \cdot b^2 \Rightarrow 5 \cdot b^2 = d^2 \Rightarrow [d = 180 \text{ cm}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot b^2 = (180 \text{ cm})^2 \Rightarrow 5 \cdot b^2 = 32400 \text{ cm}^2 \Rightarrow 5 \cdot b^2 = 32400 \text{ cm}^2 \quad /:5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 6480 \text{ cm}^2 \Rightarrow b^2 = 6480 \text{ cm}^2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow b = \sqrt{6480 \text{ cm}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{1296 \cdot 5 \text{ cm}^2} \Rightarrow b = \sqrt{1296} \cdot \sqrt{5 \text{ cm}^2} \Rightarrow b = 36 \cdot \sqrt{5} \text{ cm}.$$

Računamo a.

$$\left. \begin{array}{l} b = 36 \cdot \sqrt{5} \text{ cm} \\ a = 2 \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2 \cdot 36 \cdot \sqrt{5} \text{ cm} \Rightarrow a = 72 \cdot \sqrt{5} \text{ cm}.$$

Vježba 104

Iz limenog kruga promjera 18 dm treba izraditi pravokutnik maksimalne površine čija je širina dva puta manja od duljine. Kolike su dimenzije tog pravokutnika?

Rezultat: $a = 72 \cdot \sqrt{5} \text{ cm}$, $b = 36 \cdot \sqrt{5} \text{ cm}$.

Zadatak 105 (4B, TUPŠ)

U jednakokračnome trapezu duljine krakova jednake su duljini kraće osnovice. Ako je mjera kuta između kraka i jedne dijagonale 105° , kolika je mjera kuta između kraka i dulje osnovice?

- A. 20° B. 35° C. 45° D. 50°

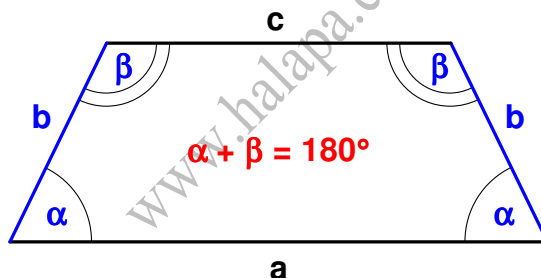
Rješenje 105

Ponovimo!

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180° .

Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha nekog mnogokuta ili poliedra.

Trapez je četverokut koji ima dvije suprotne stranice usporedne. Usporedne stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne (usporedne). Trapez je jednakokračan ako su mu nasuprotne neparalelne stranice jednake duljine, a kutovi uz osnovicu sukladni. Nasuprotni kutovi su suplementni (zbroj iznosi 180°).



Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Na osnovi odnosa među duljinama stranica trokut može biti:

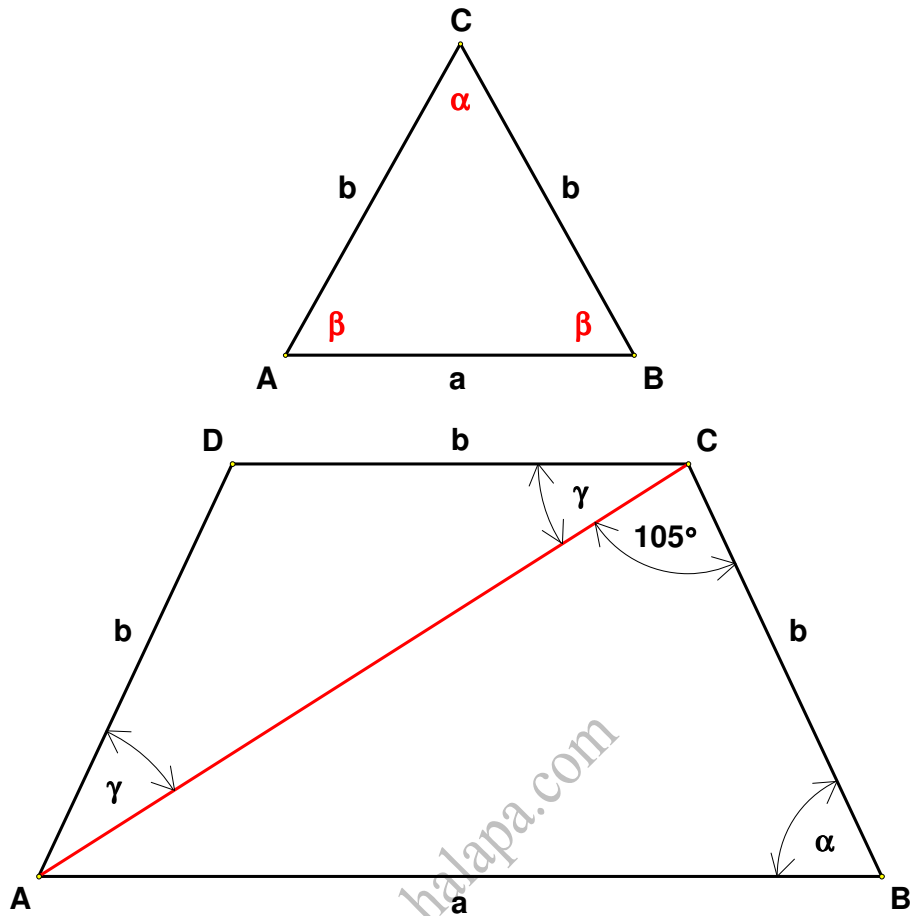
- 1) raznostraničan,
- 2) jednakokračan,
- 3) jednakostraničan.

Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta. Zbroj svih kutova u trokutu je 180° .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Za jednakokračan trokut vrijedi:

$$\alpha + 2 \cdot \beta = 180^\circ.$$



Sa slike vidi se:

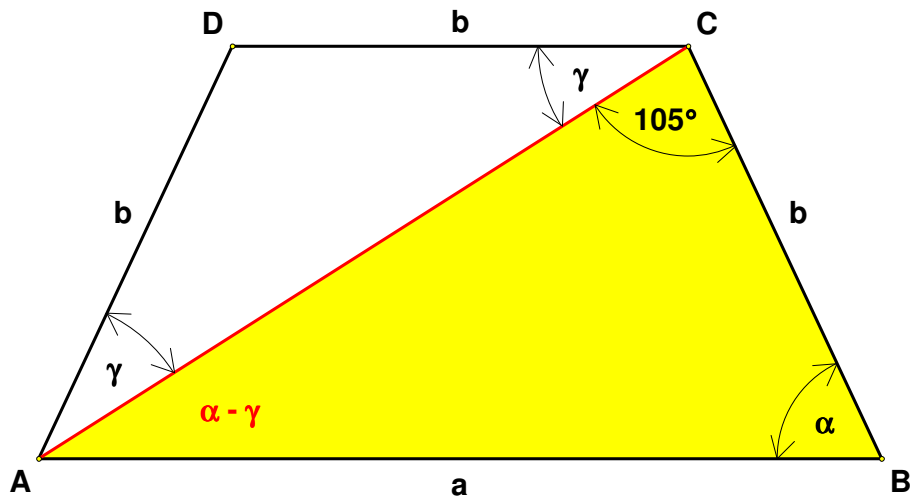
$$|AB| = a, |BC| = |CD| = |DA| = b, \angle BCA = 105^\circ, \angle DAB = \angle ABC = \alpha$$

$$\angle ACD = \angle DAC = \gamma, \angle BCD = \angle CDA = 105^\circ + \gamma$$

1.inačica

Kutovi uz krak trapeza ABCD suplementni su pa vrijedi:

$$\alpha + 105^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 75^\circ.$$



U trokutu ABC valjane su sljedeće relacije:

- $\angle CAB = \alpha - \gamma$
- $\alpha - \gamma + \alpha + 105^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha - \gamma + \alpha = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow 2 \cdot \alpha - \gamma = 75^\circ$.

Iz sustava jednačica dobijemo mjeru kuta α .

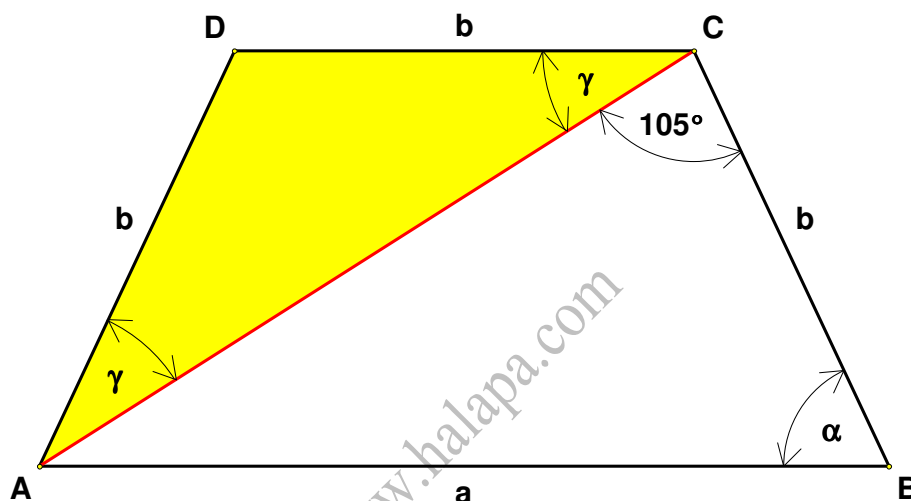
$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \gamma = 75^\circ \\ 2 \cdot \alpha - \gamma = 75^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenta} \end{array} \right] \Rightarrow 3 \cdot \alpha = 150^\circ \Rightarrow 3 \cdot \alpha = 150^\circ \quad /: 3 \Rightarrow \alpha = 50^\circ.$$

Odgovor je pod D.

2. inačica

Kutovi uz krak trapeza ABCD suplementni su pa vrijedi:

$$\alpha + 105^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow \alpha + \gamma = 75^\circ.$$



Za jednakokrani trokut ACD vrijedi:

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma + \angle CDA = 180^\circ &\Rightarrow \left[\angle CDA = 105^\circ + \gamma \right] \Rightarrow \gamma + \gamma + 105^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 \cdot \gamma = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow 3 \cdot \gamma = 75^\circ \Rightarrow 3 \cdot \gamma = 75^\circ \quad /: 3 \Rightarrow \gamma = 25^\circ. \end{aligned}$$

Iz sustava jednačica dobijemo mjeru kuta α .

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \gamma = 75^\circ \\ \gamma = 25^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + 25^\circ = 75^\circ \Rightarrow \alpha = 75^\circ - 25^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 105

U jednakokranoj trapezu duljine krakova jednake su duljini kraće osnovice. Ako je mjera kuta između kraka i jedne dijagonale 25° , kolika je mjera kuta između kraka i dulje osnovice?

- A. 20° B. 35° C. 45° D. 50°

Rezultat: D.

Zadatak 106 (Asterix, gimnazija)

Opseg paralelograma iznosi 39 cm, a duljine visina paralelograma odnose se kao 5 : 8. Odredite duljinu kraće stranice toga paralelograma.

Rješenje 106

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180° .

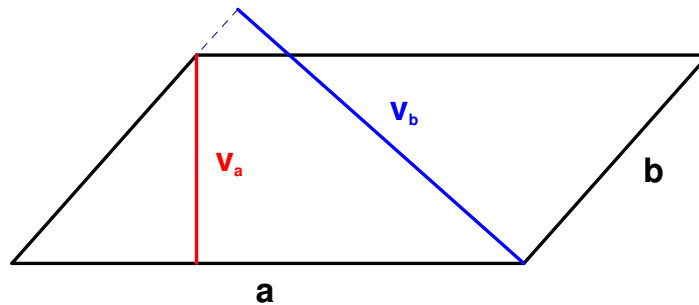
Paralelogram je četverokut kojemu su po dvije nasuprotne stranice paralelne.

Opseg paralelograma je zbroj duljina svih stranica paralelograma

$$O = 2 \cdot a + 2 \cdot b.$$

Površina paralelograma jednaka je umnošku osnovice (baze) i pripadne visine:

$$P = a \cdot v_a \text{ ili } P = b \cdot v_b.$$



Ako su a i b brojevi, kažemo da je kvocijent $a : b$, $b \neq 0$ omjer brojeva a i b .

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \text{ i } c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Za opseg paralelograma vrijedi

$$\left. \begin{array}{l} O = 2 \cdot a + 2 \cdot b \\ O = 39 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot a + 2 \cdot b = 39.$$

Duljine visina paralelograma odnose se kao $5 : 8$.

$$v_a : v_b = 5 : 8 \Rightarrow \frac{v_a}{v_b} = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{v_b}{v_a} = \frac{8}{5}.$$

Ploština paralelograma može se izračunati na dva načina:

$$\begin{aligned} P_a = P_b &\Rightarrow a \cdot v_a = b \cdot v_b \Rightarrow a \cdot v_a = b \cdot v_b \cdot \frac{1}{b \cdot v_a} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{v_b}{v_a} \Rightarrow \left[\frac{v_b}{v_a} = \frac{8}{5} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{8}{5} \cdot b \Rightarrow a = \frac{8}{5} \cdot b. \end{aligned}$$

Iz sustava jednačica dobijemo duljinu kraće stranice b .

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot a + 2 \cdot b = 39 \\ a = \frac{8}{5} \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array} \right] \Rightarrow 2 \cdot \frac{8}{5} \cdot b + 2 \cdot b = 39 \Rightarrow \frac{16}{5} \cdot b + 2 \cdot b = 39 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{16}{5} \cdot b + 2 \cdot b = 39 \cdot \frac{5}{5} \Rightarrow 16 \cdot b + 10 \cdot b = 195 \Rightarrow 26 \cdot b = 195 \Rightarrow \\ \Rightarrow 26 \cdot b = 195 \cdot \frac{1}{26} \Rightarrow b = 7.5 \text{ cm.}$$

Vježba 106

Opseg paralelograma iznosi 3.9 dm, a duljine visina paralelograma odnose se kao 10 : 16. Odredite duljinu kraće stranice toga paralelograma.

Rezultat: 7.5 cm.

www.halapa.com