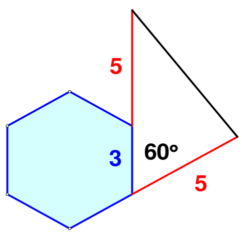
Zadatak 021 (Mira, gimnazija)

Točke $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ uzastopni su vrhovi pravilnog šesterokuta čija stranica ima duljinu 3. Ako njegove stranice $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \ldots, \overline{A_5A_6}, \overline{A_6A_1}$ produžimo preko vrhova $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_1$ za 5, dobit ćemo vrhove $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ novog pravilnog šesterokuta. Nađite stranice novog šesterokuta.

Rješenje 021



Uporabom kosinusovog poučka dobije se duljina stranice novog šesterokuta:

$$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 89 - 40 = 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 49 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow a = 7.$$

Vježba 021

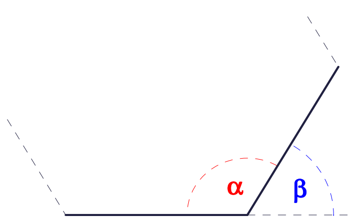
Točke $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ uzastopni su vrhovi pravilnog šesterokuta čija stranica ima duljinu a. Ako njegove stranice $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \ldots, \overline{A_5A_6}, \overline{A_6A_1}$ produžimo preko vrhova $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_1$ za a, dobit ćemo vrhove $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ novog pravilnog šesterokuta. Nađite stranice novog šesterokuta.

Rezultat: $a \cdot \sqrt{3}.$

Zadatak 022 (Davor, gimnazija)

Vanjski je kut pravilnog mnogokuta jednak $\frac{2}{13}$ unutarnjeg. Nađite broj stranica.

Rješenje 022



$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot \pi}{n}.$$

$$\beta = \pi - \alpha = \pi - \frac{(n-2) \cdot \pi}{n} = \frac{n \cdot \pi - (n-2) \cdot \pi}{n} =$$

$$= \frac{n \cdot \pi - n \cdot \pi + 2 \cdot \pi}{n} = \frac{2 \cdot \pi}{n}.$$

Zbog uvjeta zadatka slijedi:

$$\beta = \frac{2}{13} \cdot \alpha \Rightarrow \frac{2 \cdot \pi}{n} = \frac{2}{13} \cdot \frac{(n-2) \cdot \pi}{n} \; / \cdot \frac{13 \cdot n}{2 \cdot \pi} \Rightarrow 13 = n - 2 \Rightarrow n = 15.$$

Vježba 022

Vanjski je kut pravilnog mnogokuta jednak $\frac{1}{13}$ unutarnjeg. Nađite broj stranica.

Rezultat: n = 28.

Zadatak 023 (Ivana, komercijalna škola)

Unutarnji kut pravilnog mnogokuta iznosi 179° 30'. Koliki je broj stranica?

Rješenje 023

$$\frac{(n-2) \cdot 180^0}{n} = 179^0 30' \Rightarrow \frac{180^0 \cdot n - 360^0}{n} = 179^0 30' \Rightarrow \frac{180^0 \cdot n}{n} - \frac{360^0}{n} = 179^0 30' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180^0 - \frac{360^0}{n} = 179^0 30' \Rightarrow 180^0 - 179^0 30' = \frac{360^0}{n} \Rightarrow 179^0 60' - 179^0 30' = \frac{360^0}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{360^0}{n} = 30' \Rightarrow \frac{360^0}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow n = \frac{360^0}{\left(\frac{1}{2}\right)^0} = 720.$$

Vježba 023

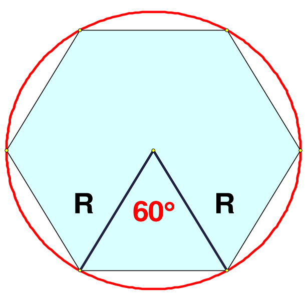
Unutarnji kut pravilnog mnogokuta iznosi 174º. Koliki je broj stranica?

Rezultat: n = 60.

Zadatak 024 (Ivana, komercijalna škola)

Pravilnom šesterokutu površine $9.375 \cdot \sqrt{3}$ opisana je kružnica. Koliki je polumjer te kružnice?

Rješenje 024



Površina pravilnog mnogokuta kojemu je zadan polumjer opisane kružnice R glasi:

$$P_n = \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \alpha .$$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} n = 6 \\ P_6 = 9.375 \cdot \sqrt{3} \\ \alpha = 60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow 9.375 \cdot \sqrt{3} = \frac{6}{2} \cdot R^2 \cdot \sin 60^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9375}{1000} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \;/ \cdot \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow R^2 = \frac{3125}{500} = \left[\begin{array}{l} \text{kratimo s} \\ \text{brojem 125} \end{array}\right] = \frac{25}{4} \Rightarrow R^2 = \frac{25}{4} \;/ \sqrt{\ } \Rightarrow R = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Vježba 024

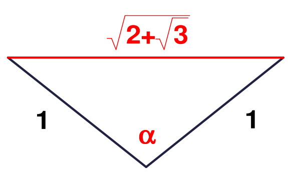
Pravilnom šesterokutu površine $6 \cdot \sqrt{3}$ opisana je kružnica. Koliki je polumjer te kružnice?

Rezultat: R = 2.

Zadatak 025 (Ivana, komercijalna škola)

Duljina stranice pravilnog mnogokuta iznosi 1, a duljina najkraće dijagonale je $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Koliko stranica ima mnogokut?

Rješenje 025



Uporabom kosinusovog poučka $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$ dobije se:

$$\cos \alpha = \frac{1^2 + 1^2 - \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1 + 1 - 2 - \sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150^0 = \frac{5 \cdot \pi}{6} \, rad.$$

Računamo broj stranica:

$$\frac{(n-2) \cdot \pi}{n} = \frac{5 \cdot \pi}{6} \;/ \cdot \frac{6 \cdot n}{\pi} \Rightarrow 6 \cdot (n-2) = 5 \cdot n \Rightarrow 6 \cdot n - 12 = 5 \cdot n \Rightarrow 6 \cdot n - 5 \cdot n = 12 \Rightarrow n = 12.$$

Vježba 025

Duljina stranice pravilnog mnogokuta iznosi 1, a duljina najkraće dijagonale je $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Koliko dijagonala ima mnogokut?

Rezultat: $D_{12} = 54$.

Zadatak 026 (Mira, gimnazija)

Nađi najmanji n za koji je unutarnji kut pravilnog n – terokuta veći od 163 °.

Rješenje 026

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} > 163^0 \Rightarrow \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} > 163^0 \;/\cdot n \Rightarrow (n-2)\cdot 180^0 > 163^0 \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180\cdot n - 360 > 163\cdot n \Rightarrow 180\cdot n - 163\cdot n > 360 \Rightarrow 17\cdot n > 360 \;/:17 \Rightarrow n > 21.18 \Rightarrow n = 22.$$

Vježba 026

Nađi najmanji n za koji je unutarnji kut pravilnog n – terokuta veći od 150 °.

Rezultat: n = 13.

Zadatak 027 (Mario, ekonomska škola)

Pravilnom šesterokutu površine $9.375\cdot\sqrt{3}$ opisana je kružnica. Koliki je njezin polumjer?

Rješenje 027

Ponovimo!

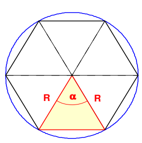
Površina pravilnog mnogokuta (n – terokuta) je

$$P = \frac{n}{2}\cdot R^2 \cdot \sin\alpha,$$

gdje je n broj stranica, R polumjer opisane kružnice, α središnji kut

$$\alpha = \frac{360^0}{n}.$$

Računamo polumjer kružnice koja je opisana pravilnom šesterokutu:



$$\left.\begin{matrix} n=6\;,\;\alpha=\frac{360^0}{n} \\ P=\frac{n}{2}\cdot R^2\cdot\sin\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha=\frac{360^0}{6} \\ P=\frac{6}{2}\cdot R^2\cdot\sin\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha=60^0 \\ P=3\cdot R^2\cdot\sin\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow P=3\cdot R^2\cdot\sin 60^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2=\frac{P}{3\cdot\sin 60^0} \Rightarrow R^2=\frac{9.375\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow R^2=\frac{18.75}{3} \Rightarrow R^2=6.25 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow R=2.5.$$

Vježba 027

Pravilnom šesterokutu površine $9.375\cdot\sqrt{3}$ opisana je kružnica. Koliki je njezin opseg?

Rezultat: 5 · π.

Zadatak 028 (Maturant, strojarska škola)

Pravilni mnogokut ima 6 puta više dijagonala od stranica. Ako je stranica tog pravilnog mnogokuta duljine 4, nađite mu opseg.

Rješenje 028

Ponovimo!

Broj dijagonala mnogokuta (n – terokuta) je:

$$D_n = \frac{n\cdot(n-3)}{2}.$$

Odredimo mnogokut:

$$D_n = 6\cdot n \Rightarrow \frac{n\cdot(n-3)}{2} = 6\cdot n \;/\cdot\frac{2}{n} \Rightarrow n-3=12 \Rightarrow n=15. \text{ petnaesterokut}$$

Opseg pravilnog petnaesterokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n=14 \ , \ a=4 \\ O=n\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow O=15\cdot 4 \Rightarrow O=60.$$

Vježba 028

Pravilni mnogokut ima 6 puta više dijagonala od stranica. Ako je stranica tog pravilnog mnogokuta duljine 10, nađite mu opseg.

Rezultat: 150.

Zadatak 029 (Maturant, strojarska škola)

Unutarnji kut pravilnog mnogokuta jednak je 156°. Koliko dijagonala ima taj mnogokut?

Rješenje 029

Ponovimo!

Unutarnji kut pravilnog mnogokuta (n – terokuta) je:

$$\beta=\frac{(n-2)\cdot 180^{0}}{n}.$$

Odredimo mnogokut:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^{0}}{n}=156^{0} \ / \cdot n \ \Rightarrow (n-2)\cdot 180^{0}=156^{0}\cdot n \Rightarrow 180^{0}\cdot n-360^{0}=156^{0}\cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180^{0}\cdot n-156^{0}\cdot n=360^{0} \Rightarrow 24^{0}\cdot n=360^{0} \ / :24^{0} \ \Rightarrow n=15. \ \text{petnaesterokut}$$

Broj dijagonala petnaesterokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n=15 \\ D_n=\dfrac{n\cdot(n-3)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{15}=\frac{15\cdot(15-3)}{2} \Rightarrow D_{15}=\frac{15\cdot 12}{2} \Rightarrow D_{15}=90.$$

Vježba 029

Unutarnji kut pravilnog mnogokuta jednak je 120°. Koliko dijagonala ima taj mnogokut?

Rezultat: 9.

Zadatak 030 (Maturant, strojarska škola)

U pravilnom mnogokutu obodni kut (između susjednih stranica) 100 puta je veći od pripadnog središnjeg kuta stranice. Nađite broj stranica.

Rješenje 030

Ponovimo!

Unutarnji kut (obodni kut, kut između susjednih stranica) pravilnog mnogokuta (n – terokuta) je:

$$\beta=\frac{(n-2)\cdot\pi}{n}.$$

Središnji kut pravilnog mnogokuta (n – terokuta) iznosi:

$$\alpha=\frac{2\cdot\pi}{n}.$$

Odredimo broj stranica mnogokuta:

$$\beta=100\cdot\alpha \Rightarrow \frac{(n-2)\cdot\pi}{n}=100\cdot\frac{2\cdot\pi}{n} \ / \cdot\frac{n}{\pi} \ \Rightarrow n-2=200 \Rightarrow n=202.$$

Vježba 030

U pravilnom mnogokutu obodni kut (između susjednih stranica) 50 puta je veći od pripadnog središnjeg kuta stranice. Nađite broj stranica.

Rezultat: 102.

Zadatak 031 (Maturant, strojarska škola)

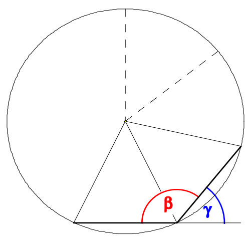
Vanjski je kut pravilnog mnogokuta jednak $\frac{2}{13}$ unutarnjeg. Nađite broj stranica.

Rješenje 031

Ponovimo!

Unutarnji kut (obodni kut, kut između susjednih stranica) pravilnog mnogokuta (n – terokuta) je:

$$\beta = \frac{(n-2)\cdot\pi}{n}.$$



Vanjski kut pravilnog mnogokuta iznosi: kut pravilnog mnogokuta (n – terokuta) iznosi:

$$\gamma = \pi - \beta \Rightarrow \gamma = \pi - \frac{(n-2)\cdot\pi}{n} \Rightarrow \gamma = \frac{n\cdot\pi - n\cdot\pi + 2\cdot\pi}{n} \Rightarrow \gamma = \frac{2\cdot\pi}{n}.$$

Odredimo broj stranica pravilnog mnogokuta:

$$\gamma = \frac{2}{13}\cdot\beta \Rightarrow \frac{2\cdot\pi}{n} = \frac{2}{13}\cdot\frac{(n-2)\cdot\pi}{n} \quad /\cdot\frac{n}{2\cdot\pi} \Rightarrow 1 = \frac{n-2}{13} \Rightarrow n-2 = 13 \Rightarrow n = 15.$$

Vježba 031

Vanjski je kut pravilnog mnogokuta jednak $\frac{2}{5}$ unutarnjeg. Nađite broj stranica.

Rezultat: 7.

Zadatak 032 (Maturant, strojarska škola)

Kružnici je upisan pravilni osmerokut i opisan pravilni šesterokut. Nađite omjer njihovih površina.

Rješenje 032

Ponovimo!

Površine pravilnog mnogokuta (n – terokuta) su:

$$P = \frac{n}{2}\cdot R^2\cdot\sin\alpha \quad , \quad P = n\cdot r^2\cdot tg\frac{\alpha}{2},$$

gdje je n broj stranica, R polumjer opisane kružnice, r polumjer upisane kružnice, α središnji kut

$$\alpha = \frac{2\cdot\pi}{n}.$$

Budući da je istoj kružnici pravilni osmerokut upisan, a pravilni šesterokut opisan, za omjer površina vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{2\cdot\pi}{n}\ ,\ P_n = \frac{n}{2}\cdot R^2\cdot\sin\alpha\ ,\ n = 8 \\ \alpha = \frac{2\cdot\pi}{n}\ ,\ P_n = n\cdot R^2\cdot tg\frac{\alpha}{2}\ ,\ n = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{2\cdot\pi}{8}\ ,\ P_8 = \frac{8}{2}\cdot R^2\cdot\sin\alpha \\ \alpha = \frac{2\cdot\pi}{6}\ ,\ P_6 = 6\cdot R^2\cdot tg\frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{4}\ ,\ P_8 = 4\cdot R^2\cdot\sin\alpha \\ \alpha = \frac{\pi}{3}\ ,\ P_6 = 6\cdot R^2\cdot tg\frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_8 = 4\cdot R^2\cdot\sin\frac{\pi}{4} \\ P_6 = 6\cdot R^2\cdot tg\frac{\pi}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_8}{P_6} = \frac{4\cdot R^2\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{6\cdot R^2\cdot tg\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \frac{P_8}{P_6} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \frac{P_8}{P_6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow P_8 : P_6 = \sqrt{2} : \sqrt{3}.$$

Vježba 032

Kružnici je upisan pravilni osmerokut i opisan pravilni četverokut. Nađite omjer njihovih površina.

Rezultat: $\sqrt{2} : 2.$

Zadatak 033 (Ivana, gimnazija)

Kutovi dva pravilna poligona razlikuju se za 10°, a brojevi vrhova odnose se kao 2 : 3. Nađi razliku broja vrhova tih poligona.

Rješenje 033

Ponovimo!

Kut pravilnog n – terokuta (poligona, mnogokuta) je:

$$\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}.$$

1.inačica

Neka je n_1 broj vrhova prvog, a n_2 broj vrhova drugog pravilnog poligona. Računamo njihov broj:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(n_1-2)\cdot 180^0}{n_1}-\frac{(n_2-2)\cdot 180^0}{n_2}=10^0 \;/:10^0 \\ n_2:n_1=2:3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{(n_1-2)\cdot 18}{n_1}-\frac{(n_2-2)\cdot 18}{n_2}=1 \;/\cdot n_1\cdot n_2 \\ 3\cdot n_2=2\cdot n_1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}18\cdot n_2\cdot(n_1-2)-18\cdot n_1\cdot(n_2-2)=n_1\cdot n_2 \\ n_2=\frac{2}{3}\cdot n_1\end{array}\right\} \Rightarrow 18\cdot\frac{2}{3}\cdot n_1\cdot(n_1-2)-18\cdot n_1\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot n_1-2\right)=n_1\cdot\frac{2}{3}\cdot n_1 \;/\cdot\frac{3}{2\cdot n_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18\cdot(n_1-2)-27\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot n_1-2\right)=n_1 \Rightarrow 18\cdot n_1-36-18\cdot n_1+54=n_1 \Rightarrow n_1=18 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}n_1=18 \\ n_2=\frac{2}{3}\cdot n_1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_2=\frac{2}{3}\cdot 18 \Rightarrow n_2=12.$$

Razlika broja vrhova iznosi:

$$n_1-n_2=18-12=6.$$

2.inačica

Neka je n_1 broj vrhova prvog, a n_2 broj vrhova drugog pravilnog poligona. Računamo njihov broj:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(n_1-2)\cdot 180^0}{n_1}-\frac{(n_2-2)\cdot 180^0}{n_2}=10^0 \;/:10^0 \\ n_2:n_1=2:3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{(n_1-2)\cdot 18}{n_1}-\frac{(n_2-2)\cdot 18}{n_2}=1 \\ n_2=2\cdot x\;,\; n_1=3\cdot x\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(3\cdot x-2)\cdot 18}{3\cdot x}-\frac{(2\cdot x-2)\cdot 18}{2\cdot x}=1 \Rightarrow \frac{(3\cdot x-2)\cdot 6}{x}-\frac{(2\cdot x-2)\cdot 9}{x}=1 \;/\cdot x \Rightarrow 6\cdot(3\cdot x-2)-9\cdot(2\cdot x-2)=x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18\cdot x-12-18\cdot x+18=x \Rightarrow x=6.$$

Razlika broja vrhova iznosi:

$$n_1-n_2=3\cdot x-2\cdot x \Rightarrow n_1-n_2=x \Rightarrow n_1-n_2=6.$$

Vježba 033

Kutovi dva pravilna poligona razlikuju se za 10°, a brojevi vrhova odnose se kao 4 : 6. Nađi zbroj broja vrhova tih poligona.

Rezultat: 30.

Zadatak 034 (Ivana, gimnazija)

Unutarnji kutovi konveksnog mnogokuta (n – terokuta) čine aritmetički niz s razlikom 5°. Ako je najveći kut 160°, koliki je n?

Rješenje 034

Ponovimo!

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik:

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom:

$$S_n=\frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right].$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} d=5^{0}\ ,\ a_n=160^{0} \\ a_n=a_1+(n-1)\cdot d \end{array}\right\} \Rightarrow 160^{0}=a_1+(n-1)\cdot 5^{0} \Rightarrow a_1=160^{0}-(n-1)\cdot 5^{0} \Rightarrow a_1=160^{0}-n\cdot 5^{0}+5^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=165^{0}-n\cdot 5^{0}.$$

Računamo broj stranica n:

$$\left.\begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}\cdot\left[a_1+a_n\right] \\ S_n=(n-2)\cdot 180^{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}\cdot\left[165^{0}-n\cdot 5^{0}+160^{0}\right] \\ S_n=(n-2)\cdot 180^{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}\cdot\left[325^{0}-n\cdot 5^{0}\right] \\ S_n=(n-2)\cdot 180^{0} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\cdot\left[325^{0}-n\cdot 5^{0}\right]=(n-2)\cdot 180^{0}\ /\cdot 2 \Rightarrow n\cdot\left[325^{0}-n\cdot 5^{0}\right]=(n-2)\cdot 360^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cdot 325^{0}-n^{2}\cdot 5^{0}=n\cdot 360^{0}-720^{0} \Rightarrow -n^{2}\cdot 5^{0}+n\cdot 325^{0}-n\cdot 360^{0}+720^{0}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -n^{2}\cdot 5^{0}-n\cdot 35^{0}+720^{0}=0\ /:\left(-5^{0}\right) \Rightarrow n^{2}+7\cdot n-144=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=7\ ,\ c=-144 \\ n_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot 1\cdot(-144)}}{2\cdot 1} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+576}}{2} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{625}}{2} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-7\pm 25}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=\frac{-7+25}{2} \\ n_2=\frac{-7-25}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=\frac{18}{2} \\ n_2=\frac{-32}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=9 \\ n_2=-16\ \text{nema smisla} \end{array}\right\}.$$

Vježba 034

Unutarnji kutovi konveksnog mnogokuta (n – terokuta) čine aritmetički niz s razlikom 5°. Ako je najmanji kut 120°, koliki je n?

Rezultat: 9.

Zadatak 035 (Željko, maturant)

Odredite broj dijagonala mnogokuta kojemu za zbroj veličina unutarnjih kutova vrijedi 1400° < K(n) < 1600°.

Rješenje 035

Ponovimo!

Mnogokut (poligon ili n-terokut) je skup svih točaka ravnine omeđen dužinama. Dijagonale su mnogokuta dužine koje spajaju vrhove mnogokuta, a ne pripadaju istoj stranici.
Broj dijagonala mnogokuta sa n stranica dan je formulom:

$$D(n)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3).$$

Zbroj unutarnjih kutova mnogokuta sa n stranica dan je formulom:

$$K(n)=(n-2)\cdot 180^{0}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} 1400^{0}<K(n)<1600^{0} \\ K(n)=(n-2)\cdot 180^{0} \end{array}\right\} \Rightarrow 1400^{0}<(n-2)\cdot 180^{0}<1600^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1400^{0}<(n-2)\cdot 180^{0}<1600^{0}\ /\cdot\frac{1}{180^{0}} \Rightarrow \frac{1400^{0}}{180^{0}}<n-2<\frac{1600^{0}}{180^{0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{70}{9}<n-2<\frac{80}{9} \Rightarrow \frac{70}{9}<n-2<\frac{80}{9} \; /+2 \Rightarrow \frac{70}{9}+2<n-2+2<\frac{80}{9}+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{70}{9}+2<n-2+2<\frac{80}{9}+2 \Rightarrow \frac{70}{9}+2<n<\frac{80}{9}+2 \Rightarrow \frac{88}{9}<n<\frac{98}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\frac{7}{9}<n<10\frac{8}{9}.$$

Budući da n mora biti prirodan broj, slijedi da je n = 10. Riječ je, dakle, o deseterokutu. Broj dijagonala deseterokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n=10 \\ D(n)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3) \end{array}\right\} \Rightarrow D(10)=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(10-3) \Rightarrow D(10)=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 7 \Rightarrow D(10)=35.$$

Vježba 035

Odredite broj dijagonala iz jednog vrha mnogokuta kojemu za zbroj veličina unutarnjih kutova vrijedi 1400° < K(n) < 1600°.

Rezultat: 2.

Zadatak 036 (Lidija, srednja škola)

Koji mnogokut ima jednak broj stranica i dijagonala?

Rješenje 036

Ponovimo!

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Mnogokut (poligon ili n-terokut) je skup svih točaka ravnine omeđen dužinama. Dijagonale su mnogokuta dužine koje spajaju vrhove mnogokuta, a ne pripadaju istoj stranici.
Broj dijagonala mnogokuta sa n stranica dan je formulom:

$$D(n)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3).$$

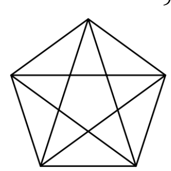
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Budući da traženi mnogokut mora imati jednak broj dijagonala i stranica, slijedi:

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}=n \Rightarrow \frac{n\cdot(n-3)}{2}=n \; /\cdot 2 \Rightarrow n\cdot(n-3)=2\cdot n \Rightarrow n\cdot(n-3)-2\cdot n=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cdot(n-3-2)=0 \Rightarrow n\cdot(n-5)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n=0 \\ n-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1=0 \text{ nema smisla} \\ n_2=5 \end{array}\right\} \Rightarrow n=5.$$



To je peterokut.

Vježba 036

Kojemu mnogokutu je broj dijagonala za tri veći od broja stranica?

Rezultat: Šesterokutu.

Zadatak 037 (Lidija, srednja škola)

Koliki je zbroj unutarnjih kutova mnogokuta koji ima tri puta manje stranica od dijagonala?

Rješenje 037

Ponovimo!

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Mnogokut (poligon ili n-terokut) je skup svih točaka ravnine omeđen dužinama. Dijagonale su mnogokuta dužine koje spajaju vrhove mnogokuta, a ne pripadaju istoj stranici.
Broj dijagonala mnogokuta sa n stranica dan je formulom:

$$D(n)=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3).$$

Zbroj unutarnjih kutova mnogokuta jednak je:

$$K(n)=(n-2)\cdot 180^{0}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kako zapisati da je broj a tri puta manji od broja b?

$$3\cdot a=b \quad , \quad a=\frac{b}{3} \quad , \quad \frac{b}{a}=3.$$

Budući da traženi mnogokut mora imati tri puta manje stranica od dijagonala, slijedi:

$$3\cdot n=\frac{n\cdot(n-3)}{2} \Rightarrow 3\cdot n=\frac{n\cdot(n-3)}{2} \;/\cdot 2 \Rightarrow 6\cdot n=n\cdot(n-3) \Rightarrow 6\cdot n-n\cdot(n-3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cdot(6-(n-3))=0 \Rightarrow n\cdot(6-n+3)=0 \Rightarrow n\cdot(9-n) \Rightarrow \left.\begin{matrix} n=0 \\ 9-n=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n_1=0 \text{ nema smisla} \\ n_2=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n=9.$$

To je deveterokut. Zbroj unutarnjih kutova iznosi:

$$K=(9-2)\cdot 180^{0} \Rightarrow K=7\cdot 180^{0} \Rightarrow K=1260^{0}.$$

Vježba 037

Koliki je zbroj unutarnjih kutova mnogokuta koji ima dva puta više dijagonala od stranica?

Rezultat: Sedmerokut, K = 900°.

Zadatak 038 (Sanja, gimnazija)

Kolika je ploština pravilnog peterokuta upisanog kružnici polumjera 10 cm?

Rješenje 038

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visina je trokuta dužina kojoj je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2} \quad \text{ili} \quad P=\frac{b\cdot v_b}{2} \quad \text{ili} \quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

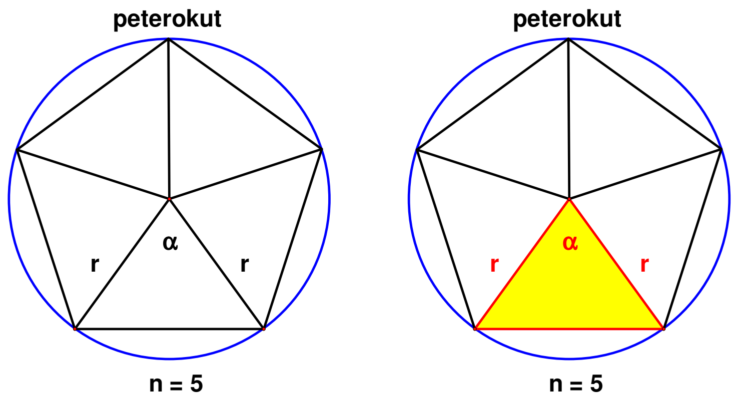
Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.
Mnogokut (poligon ili n-terokut) je skup svih točaka ravnine omeđen dužinama. Pravilni mnogokut je mnogokut kojemu su sve stranice sukladne i svi unutarnji kutovi sukladni. Svakom se pravilnom mnogokutu može upisati i opisati kružnica.
Karakteristični trokut pravilnog mnogokuta (n – terokuta) je jednakokračan trokut koji ima osnovicu jednaku stranici mnogokuta (n – terokuta), a kut nasuprot osnovici

$$\alpha=\frac{360^{0}}{n}.$$

Krak jednakokračnog trokuta jednak je polumjeru r opisane kružnice tom mnogokutu.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Ploština pravilnog mnogokuta sa n stranica jednaka je zbroju ploština n sukladnih trokuta koji čine

mnogokut.
Ako je r polumjer opisane kružnice pravilnom mnogokutu (n – terokutu) njegova ploština iznosi

$$P=\frac{1}{2}\cdot n\cdot r^{2}\cdot\sin\alpha.$$



Računamo ploštinu pravilnog peterokuta upisanog kružnici polumjera r.

$$\left.\begin{array}{l} n=5\ \ ,\ \ r=10\,cm \\ \alpha=\dfrac{360^{0}}{n} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} r=10\,cm \\ \alpha=\dfrac{360^{0}}{5} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} r=10\,cm \\ \alpha=72^{0} \end{array}\right\}\Rightarrow\left[P=\frac{1}{2}\cdot n\cdot r^{2}\cdot\sin\alpha\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(10\ cm)^{2}\cdot\sin 72^{0}\ \Rightarrow\ P=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 100\ cm^{2}\cdot 0.95106\ \Rightarrow\ P=237.77\ cm^{2}.$$

Vježba 038

Kolika je ploština pravilnog peterokuta upisanog kružnici polumjera 1 dm?

Rezultat: 2.38 dm^2.

Zadatak 039 (Mirna, srednja škola)

Kolika je ploština pravilnog peterokuta opisanog kružnici polumjera 10 cm?

Rješenje 039

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visina je trokuta dužina kojoj je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_{a}}{2}\quad \text{ili}\quad P=\frac{b\cdot v_{b}}{2}\quad \text{ili}\quad P=\frac{c\cdot v_{c}}{2}.$$

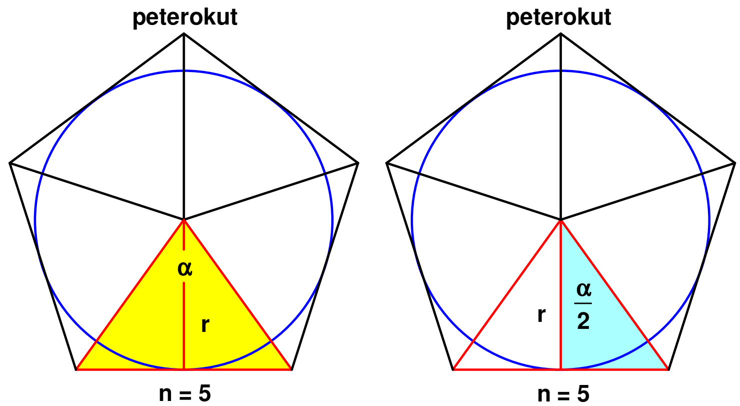
Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.
Mnogokut (poligon ili n-terokut) je skup svih točaka ravnine omeđen dužinama. Pravilni mnogokut je mnogokut kojemu su sve stranice sukladne i svi unutarnji kutovi sukladni. Svakom se pravilnom mnogokutu može upisati i opisati kružnica.
Karakteristični trokut pravilnog mnogokuta (n – terokuta) je jednakokračan trokut koji ima osnovicu jednaku stranici mnogokuta (n – terokuta), a kut nasuprot osnovici

$$\alpha=\frac{360^{0}}{n}.$$

Visina jednakokračnog trokuta jednaka je polumjeru r upisane kružnice tom mnogokutu.
Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

Ploština pravilnog mnogokuta sa n stranica jednaka je zbroju ploština n sukladnih trokuta koji čine mnogokut.
Ako je r polumjer upisane kružnice pravilnom mnogokutu (n – terokutu) njegova ploština iznosi

$$P = n \cdot r^2 \cdot tg \frac{\alpha}{2}.$$



Računamo ploštinu pravilnog peterokuta opisanog kružnici polumjera r.

$$\left.\begin{matrix} n = 5 \ , \ r = 10 \ cm \\ \alpha = \frac{360^0}{n} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 10 \ cm \\ \alpha = \frac{360^0}{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 10 \ cm \\ \alpha = 72^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[P = n \cdot r^2 \cdot tg \frac{\alpha}{2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 5 \cdot (10 \ cm)^2 \cdot tg \frac{72^0}{2} \Rightarrow P = 5 \cdot 100 \ cm^2 \cdot tg \, 36^0 \Rightarrow P = 500 \ cm^2 \cdot 0.72654 \Rightarrow P = 363.27 \ cm^2.$$

Vježba 039

Kolika je ploština pravilnog peterokuta opisanog kružnici polumjera 1 dm?

Rezultat: $3.63 \ dm^2$.

Zadatak 040 (Vedran, tehnička škola)

Kolika je ploština pravilnog četrnaesterokuta opisanog kružnici polumjera 5.5 cm?

Rješenje 040

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visina je trokuta dužina kojoj je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad \text{ili} \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2} \quad \text{ili} \quad P = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica trokuta.
Mnogokut (poligon ili n-terokut) je skup svih točaka ravnine omeđen dužinama. Pravilni mnogokut je mnogokut kojemu su sve stranice sukladne i svi unutarnji kutovi sukladni. Svakom se pravilnom mnogokutu može upisati i opisati kružnica.
Karakteristični trokut pravilnog mnogokuta (n – terokuta) je jednakokračan trokut koji ima osnovicu jednaku stranici mnogokuta (n – terokuta), a kut nasuprot osnovici

$$\alpha = \frac{360^0}{n}.$$

Visina jednakokračnog trokuta jednaka je polumjeru r upisane kružnice tom mnogokutu.

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.
Ploština pravilnog mnogokuta sa n stranica jednaka je zbroju ploština n sukladnih trokuta koji čine mnogokut.
Ako je r polumjer upisane kružnice pravilnom mnogokutu (n – terokutu) njegova ploština iznosi

$$P = n \cdot r^2 \cdot tg\,\frac{\alpha}{2}.$$

Računamo ploštinu pravilnog četrnaesterokuta opisanog kružnici polumjera r.

$$\left.\begin{matrix} n = 14 \;\;,\;\; r = 5.5\ cm \\ \alpha = \frac{360^0}{n} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 5.5\ cm \\ \alpha = \frac{360^0}{14} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 5.5\ cm \\ \alpha = \frac{180^0}{7} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 5.5\ cm \\ \alpha = \frac{180^0}{7} \;\; /:2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 5.5\ cm \\ \frac{\alpha}{2} = \frac{90^0}{7} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[P = n \cdot r^2 \cdot tg\,\frac{\alpha}{2}\right] \Rightarrow P = 14 \cdot (5.5\ cm)^2 \cdot tg\,\frac{90^0}{7} \Rightarrow P = 14 \cdot 30.25\ cm^2 \cdot tg\,\frac{90^0}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 423.5\ cm^2 \cdot 0.22824 \Rightarrow P = 96.66\ cm^2.$$

Vježba 040

Kolika je ploština pravilnog peterokuta opisanog kružnici polumjera 1 dm?

Rezultat: 3.63 dm^2.