Zadatak 021 (Anaira, gimnazija)

Pojednostavnite izraz:

$$a^{\frac{1}{2}}-\left(a-a^{-2}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)+\left(1-a^{-2}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)+2:a^{\frac{3}{2}}.$$

Rješenje 021

Prije rješavanja samog zadatka podsjetimo se:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\quad a^3-1=(a-1)\cdot\left(a^2+a+1\right),\quad a^2-1=(a-1)\cdot(a+1),$$

$$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a},\qquad \frac{\sqrt{a}}{a}=\frac{\sqrt{a}:\sqrt{a}}{a:\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}},\qquad \frac{\sqrt{a}}{a^2}=\frac{\sqrt{a}:\sqrt{a}}{a^2:\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a^3}}.$$

Možemo sada pisati:

$$a^{\frac{1}{2}}-\left(a-a^{-2}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)+\left(1-a^{-2}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)+2:a^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\sqrt{a}-\left(a-\frac{1}{a^2}\right):\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)+\left(1-\frac{1}{a^2}\right):\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)+\frac{2}{\sqrt{a^3}}=$$

$$=\sqrt{a}-\frac{a^3-1}{a^2}:\frac{a-1}{\sqrt{a}}+\frac{a^2-1}{a^2}:\frac{a+1}{\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{a^3}}=$$

$$=\sqrt{a}-\frac{(a-1)\cdot\left(a^2+a+1\right)}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{a-1}+\frac{(a-1)\cdot(a+1)}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{a+1}+\frac{2}{\sqrt{a^3}}=$$

$$=\sqrt{a}-\frac{a^2+a+1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{1}+\frac{a-1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{a}}{1}+\frac{2}{\sqrt{a^3}}=$$

$$=\sqrt{a}-\frac{a^2+a+1}{\sqrt{a^3}}+\frac{a-1}{\sqrt{a^3}}+\frac{2}{\sqrt{a^3}}=\frac{a^2-a^2-a-1+a-1+2}{\sqrt{a^3}}=\frac{0}{\sqrt{a^3}}=0.$$

Vježba 021

Pojednostavnite izraz: $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}.$

Rezultat: $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$

Zadatak 022 (Gina, gimnazija)

Ako je $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=3$, koliko iznosi $a^3+\dfrac{1}{a^3}$?

Rješenje 022

Koristimo sljedeće formule:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\quad (a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b).$$

Najprije kubiramo izraz:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot\frac{1}{a}+3\cdot a\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=a^3+3\cdot a+3\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}=a^3+\frac{1}{a^3}+3\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right).\qquad(1)$$

Zatim izraz rastavimo u produkt dvije potencije:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2}\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)=3\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right). \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) dobije se:

$$a^{3}+\frac{1}{a^{3}}+3\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)=3\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right) \Rightarrow a^{3}+\frac{1}{a^{3}}=0.$$

Vježba 022

Ako je $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2}=3,$ koliko iznosi $a^{2}+\frac{1}{a^{2}}$?

Rezultat: 1.

Zadatak 023 (Andrijana, Ines, Ivana, Martina, hotelijerska škola)

Izračunajte za $x \neq 0$

$$\frac{2^{2x}+3^{2x}\cdot\left(2\cdot 3^{x}-1\right)}{2^{2x}-3^{2x}}+\frac{2^{3x}-3^{3x}}{2^{2x}-3^{2x}}-\frac{2^{2x}-2^{x}\cdot 3^{x}+3^{2x}}{2^{x}-3^{x}}.$$

Rješenje 023

Zajednički nazivnik je $2^{2x}-3^{2x}$:

$$\frac{2^{2x}+3^{2x}\cdot\left(2\cdot 3^{x}-1\right)}{2^{2x}-3^{2x}}+\frac{2^{3x}-3^{3x}}{2^{2x}-3^{2x}}-\frac{2^{2x}-2^{x}\cdot 3^{x}+3^{2x}}{2^{x}-3^{x}}=$$

$$=\frac{2^{2x}+3^{2x}\cdot\left(2\cdot 3^{x}-1\right)+2^{3x}-3^{3x}-\left(2^{x}+3^{x}\right)\cdot\left(2^{2x}-2^{x}\cdot 3^{x}+3^{2x}\right)}{2^{2x}-3^{2x}}=$$

$$=\left[\,(a+b)\cdot\left(a^{2}-ab+b^{2}\right)=a^{3}+b^{3}\,\right]=$$

$$=\frac{2^{2x}+2\cdot 3^{3x}-3^{2x}+2^{3x}-3^{3x}-\left(2^{3x}+3^{3x}\right)}{2^{2x}-3^{2x}}=\frac{2^{2x}+2\cdot 3^{3x}-3^{2x}+2^{3x}-3^{3x}-2^{3x}-3^{3x}}{2^{2x}-3^{2x}}=$$

$$=\frac{2^{2x}+2\cdot 3^{3x}-3^{2x}+2^{3x}-2\cdot 3^{3x}-2^{3x}}{2^{2x}-3^{2x}}=\frac{2^{2x}-3^{2x}}{2^{2x}-3^{2x}}=1.$$

Vježba 023

Izračunajte za $x \neq 0$, $\frac{2^{2x}-3^{2x}}{2\cdot 2^{x}-2\cdot 3^{x}}$.

Rezultat: $\frac{2^{x}+3^{x}}{2}$.

Zadatak 024 (Lina, hotelijerska škola)

Skratite razlomak: $\frac{2^{n+1}+2}{2^{n}+1}$.

Rješenje 024

Podsjetimo se množenja potencija istih baza:

$$\left[a^{x}\cdot a^{y}=a^{x+y} \quad , \quad a^{x+y}=a^{x}\cdot a^{y}\right]$$

i zakona distribucije množenja prema zbrajanju:

$$\left[a\cdot(b+c)=ab+ac \quad , \quad ab+ac=a\cdot(b+c)\right].$$

Sada je:

$$\frac{2^{n+1}+2}{2^{n}+1}=\frac{2^{n}\cdot 2+2}{2^{n}+1}=\frac{2\cdot\left(2^{n}+1\right)}{2^{n}+1}=2.$$

Vježba 024

Skratite razlomak $\frac{3^{n+1}-3}{3^{n}-1}$.

Rezultat: 3.

Zadatak 025 (Miro, tehnička škola)

Izračunaj: $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a}\right).$

Rješenje 025

$$\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{2\cdot\left(1+\sqrt{a}\right)}+\frac{1}{2\cdot\left(1-\sqrt{a}\right)}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\frac{a+1}{a}=$$

$$=\left(\frac{1}{2\cdot\left(1+\sqrt{a}\right)}\cdot\frac{1-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\frac{1}{2\cdot\left(1-\sqrt{a}\right)}\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\frac{a+1}{a}=$$

$$=\left(\frac{1-\sqrt{a}}{2\cdot(1-a)}+\frac{1+\sqrt{a}}{2\cdot(1-a)}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\frac{a+1}{a}=$$

$$=\left[\left(1-\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt{a}\right)=1-\left(\sqrt{a}\right)^2=1-a\right]=$$

$$=\left(\frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{2\cdot(1-a)}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\frac{a+1}{a}=\left(\frac{2}{2\cdot(1-a)}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\frac{a+1}{a}=\left(\frac{1}{1-a}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\frac{a+1}{a}=$$

$$=\frac{1+a-a^2-1}{1-a^2}\cdot\frac{a+1}{a}=\frac{a-a^2}{1-a^2}\cdot\frac{a+1}{a}=\frac{a\cdot(1-a)}{(1-a)\cdot(1+a)}\cdot\frac{a+1}{a}=1.$$

Vježba 025

Izračunaj: $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}\right)\cdot(1-a).$

Rezultat: 1.

Zadatak 026 (Petra, gimnazija)

Pojednostavnite izraz : $\left(1+\frac{a^2+1-b^2}{2a}\right):\frac{a+b+1}{4ab}.$

Rješenje 026

$$\left(1+\frac{a^2+1-b^2}{2a}\right):\frac{a+b+1}{4ab}=\frac{2a+a^2+1-b^2}{2a}\cdot\frac{4ab}{a+b+1}=\left[x^2+2xy+y^2=(x+y)^2\right]=$$

$$=\frac{(a+1)^2-b^2}{1}\cdot\frac{2b}{a+b+1}=\left[x^2-y^2=(x+y)\cdot(x-y)\right]=$$

$$=\frac{(a+1+b)\cdot(a+1-b)}{1}\cdot\frac{2b}{a+b+1}=2b(a-b+1).$$

Vježba 026

Pojednostavnite izraz: $\left(1+\frac{a^2+1-b^2}{2a}\right):\frac{a+b+1}{2a}.$

Rezultat: a – b + 1.

Zadatak 027 (Anaira, gimnazija, Vedrana, gimnazija)

Kolika je vrijednost izraza: $\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}-1}}+\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}+1}}$?

Rješenje 027

$$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}=2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}\right]=$$

$$=2\cdot\left[\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-1}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+1}\right]==2\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-1\right)\cdot\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+1\right)}=$$

$$=2\cdot\frac{2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-1^2}=2\cdot\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-1^2}=4\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2+2\cdot\sqrt{6}+3-1}=4\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4+2\cdot\sqrt{6}}=4\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\cdot\left(2+\sqrt{6}\right)}=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2}\cdot\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2}=2\cdot\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-2\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-2^2}=2\cdot\frac{\sqrt{12}-2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{18}-2\cdot\sqrt{3}}{6-4}=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{4\cdot3}-2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{9\cdot2}-2\cdot\sqrt{3}}{2}=2\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2}.$$

Vježba 027

Kolika je vrijednost izraza:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}?$$

Rezultat: $2\cdot\sqrt{3}.$

Zadatak 028 (Anaira, gimnazija)

Izračunajte: $\frac{1-2\cdot3^n}{1-3^n}\cdot\frac{1-9^n}{1-4\cdot9^n}+\frac{3^n}{1+2\cdot3^n}.$

Rješenje 028

1. inačica

$$\frac{1-2\cdot3^n}{1-3^n}\cdot\frac{1-9^n}{1-4\cdot9^n}+\frac{3^n}{1+2\cdot3^n}=\frac{1-2\cdot3^n}{1-3^n}\cdot\frac{1-3^{2n}}{1-4\cdot3^{2n}}+\frac{3^n}{1+2\cdot3^n}=\left[a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\right]=$$

$$=\frac{1-2\cdot3^n}{1-3^n}\cdot\frac{\left(1-3^n\right)\cdot\left(1+3^n\right)}{\left(1-2\cdot3^n\right)\cdot\left(1+2\cdot3^n\right)}+\frac{3^n}{1+2\cdot3^n}=\frac{1+3^n}{1+2\cdot3^n}+\frac{3^n}{1+2\cdot3^n}=\frac{1+3^n+3^n}{1+2\cdot3^n}=\frac{1+2\cdot3^n}{1+2\cdot3^n}=1.$$

2. inačica

Zbog jednostavnosti uvedemo supstituciju:

$$3^n=x \quad => \quad 9^n=3^{2n}=x^2$$

pa pišemo:

$$\frac{1-2\cdot3^n}{1-3^n}\cdot\frac{1-9^n}{1-4\cdot9^n}+\frac{3^n}{1+2\cdot3^n}=\frac{1-2\cdot x}{1-x}\cdot\frac{1-x^2}{1-4\cdot x^2}+\frac{x}{1+2\cdot x}=\left[a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\right]=$$

$$=\frac{1-2\cdot x}{1-x}\cdot\frac{(1-x)\cdot(1+x)}{(1-2\cdot x)\cdot(1+2\cdot x)}+\frac{x}{1+2\cdot x}=\frac{1+x}{1+2\cdot x}+\frac{x}{1+2\cdot x}=\frac{1+x+x}{1+2\cdot x}=\frac{1+2\cdot x}{1+2\cdot x}=1.$$

3. inačica

Uzmemo za n neki prirodni broj, ali pri tome pazimo da nam nazivnik nije 0. Stavimo n = 1:

$$\frac{1-2\cdot3^n}{1-3^n}\cdot\frac{1-9^n}{1-4\cdot9^n}+\frac{3^n}{1+2\cdot3^n}=\frac{1-2\cdot3^1}{1-3^1}\cdot\frac{1-9^1}{1-4\cdot9^1}+\frac{3^1}{1+2\cdot3^1}=\frac{1-2\cdot3}{1-3}\cdot\frac{1-9}{1-4\cdot9}+\frac{3}{1+2\cdot3}=$$

$$=\frac{1-6}{1-3}\cdot\frac{1-9}{1-36}+\frac{3}{1+6}=\frac{-5}{-2}\cdot\frac{-8}{-35}+\frac{3}{7}=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=\frac{7}{7}=1.$$

Vježba 028

Izračunajte: $\frac{1-4^n}{1-2^n}-1.$

Rezultat: 2^n.

Zadatak 029 (Ivana, hotelijerska škola)

Pojednostavnite izraz: $\frac{2\cdot x^4-7\cdot x^3+8\cdot x^2-5\cdot x+2}{2\cdot x^2-x+1}.$

Rješenje 029

Članove iz brojnika:

$$-7\cdot x^3,\ 8\cdot x^2,\ -5\cdot x$$

rastavimo na sljedeći način:

$$-7\cdot x^3=-x^3-6\cdot x^3,$$

$$8\cdot x^2=x^2+3\cdot x^2+4\cdot x^2,$$

$$-5\cdot x=-3\cdot x-2\cdot x.$$

Sada je:

$$\frac{2\cdot x^4-7\cdot x^3+8\cdot x^2-5\cdot x+2}{2\cdot x^2-x+1}=\frac{2\cdot x^4-x^3+x^2-6\cdot x^3+3\cdot x^2-3\cdot x+4\cdot x^2-2\cdot x+2}{2\cdot x^2-x+1}=$$

= [grupiramo po tri člana tako da izlučivanjem odgovarajućeg broja dobijemo faktor $2x^2-x+1$] =

$$=\frac{x^2\cdot\left(2\cdot x^2-x+1\right)-3\cdot x\cdot\left(2\cdot x^2-x+1\right)+2\cdot\left(2\cdot x^2-x+1\right)}{2\cdot x^2-x+1}=$$

$$=\frac{\left(2\cdot x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2-3\cdot x+2\right)}{2\cdot x^2-x+1}=x^2-3\cdot x+2.$$

Vježba 029

Pojednostavnite izraz: $\frac{x^2+5\cdot x+6}{x+3}.$

Rezultat: $x+2$.

Zadatak 030 (Ines, hotelijerska škola)

Ako x zadovoljava jednadžbu $2x^2-3x-1=0$, odredi jednadžbu koju zadovoljava $y=x^3$.

Rješenje 030

Iz supstitucije (zamjene) dobije se:

$$y=x^3\ \Rightarrow\ y^2=x^6. \qquad (1)$$

Jednadžbu $2x^2-3x-1=0$ kubiramo:

$$2x^2-3x-1=0\ \Rightarrow\ 2x^2=3x+1\ /^3\ \Rightarrow\ \left[(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 8x^6=27x^3+27x^2+9x+1\ \Rightarrow\left[\text{zbog }(1)\right]\ \Rightarrow\ 8y^2=27y+27x^2+9x+1. \qquad (2)$$

Zadanu jednadžbu $2x^2-3x-1=0$ pomnožimo s 9x:

$$2x^2-3x-1=0\ \Rightarrow\ 2x^2=3x+1\ /\cdot 9x\ \Rightarrow\ 18x^3=27x^2+9x\ \Rightarrow\ \left[\text{zbog }(1)\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 18y=27x^2+9x. \qquad (3)$$

Iz (2) i (3) proizlazi:

$$\left.\begin{array}{l}8y^2=27y+27x^2+9x+1\\ 18y=27x^2+9x\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\text{oduzmemo jednakosti}\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 8y^2-18y=27y+27x^2+9x+1-27x^2-9x\ \Rightarrow\ 8y^2-18y=27y+1\ \Rightarrow\ 8y^2-45y-1=0.$$

Vježba 030

Ako x zadovoljava jednadžbu $2x^2 - 3x - 1 = 0$, odredi jednadžbu koju zadovoljava $y = x^2$.

Rezultat: $4y^2 - 13y + 1 = 0.$

Zadatak 031 (1A, hotelijerska škola)

Ivanu je n godina, Josip je 5 godina mlađi od njega, a 3 godine je stariji od Luke. Koliko sva trojica imaju godina?

Rješenje 031

Prikažimo zadatak tablično:

Osoba	Broj godina iskazan riječima	Broj godina zapisan izrazima
Ivan	Ivan je n godina.	n
Josip	Josip je 5 godina mlađi od Ivana.	n – 5
Luka	Josip je 3 godine stariji od Luke, dakle, Luka je 3 godine mlađi od Josipa.	n – 5 – 3
	Ukupan broj godina:	3n – 13

Vježba 031

Ivanu je n godina, Josip je 2 godina mlađi od njega, a 3 godine je stariji od Luke. Koliko sva trojica imaju godina?

Rezultat: 3n – 7.

Zadatak 032 (Marija, gimnazija)

Izračunaj: $\left(2x+\frac{1}{4}\right)^3.$

Rješenje 032

Podsjetimo se formule za kub binoma (kub zbroja):

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3.$$

Uočimo da je u zadatku a = 2x, b = $\frac{1}{4}$. Sada je:

$$\left(2x+\frac{1}{4}\right)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot 2x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\left[(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\right]=$$

$$=8x^3+3\cdot 4x^2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot 2x\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=8x^3+3x^2+\frac{3}{8}x+\frac{1}{64}.$$

Vježba 032

Izračunaj: $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^3.$

Rezultat: $8x^3+6x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{8}.$

Zadatak 033 (1A, hotelijerska škola)

Ako je $b^2 - a^2 = 24$, te a + b = 8, koliko je a – b + 1?

Rješenje 033

$$\left.\begin{array}{l} b^2-a^2=24 \\ a+b=8 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(b-a)\cdot(b+a)=24 \\ a+b=8\end{array}\right\}\Rightarrow(b-a)\cdot 8=24\ /:8\ \Rightarrow\ b-a=3\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-b=-3 \Rightarrow a-b+1=-3+1=-2.$$

Vježba 033

Ako je $b^2 - a^2 = 24$, te $a + b = 8$, koliko je $a - b + 3$?

Rezultat: $a-b=0.$

Zadatak 034 (Felix, gimnazija)

Skratite razlomak: $\dfrac{49^n+2\cdot 35^n-8\cdot 25^n}{49^n+5\cdot 35^n+4\cdot 25^n}.$

Rješenje 034

Zbog jednostavnosti računanja uvedemo zamjene $x = 7^n$, $y = 5^n$. Sada možemo zapisati razlomak u obliku:

$$\frac{49^n+2\cdot 35^n-8\cdot 25^n}{49^n+5\cdot 35^n+4\cdot 25^n}=\frac{\left(7^2\right)^n+2\cdot(5\cdot 7)^n-8\cdot\left(5^2\right)^n}{\left(7^2\right)^n+5\cdot(5\cdot 7)^n+4\cdot\left(5^2\right)^n}=\left[\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n\ ,\ (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\right]=$$

$$=\frac{\left(7^n\right)^2+2\cdot 5^n\cdot 7^n-8\cdot\left(5^n\right)^2}{\left(7^n\right)^2+5\cdot 5^n\cdot 7^n+4\cdot\left(5^n\right)^2}=\left[\text{zamjena } x=7^n\ ,\ y=5^n\right]=\frac{x^2+2\cdot x\cdot y-8\cdot y^2}{x^2+5\cdot x\cdot y+4\cdot y^2}=$$

$$=\frac{x^2+4\cdot x\cdot y-2\cdot x\cdot y-8\cdot y^2}{x^2+x\cdot y+4\cdot x\cdot y+4\cdot y^2}=\frac{x\cdot(x+4y)-2y\cdot(x+4y)}{x\cdot(x+y)+4y\cdot(x+y)}=\frac{(x+4y)\cdot(x-2y)}{(x+y)\cdot(x+4y)}=$$

$$=\left[\text{budući da je } x+4y\neq 0,\text{ razlomak kratimo}\right]=\frac{x-2y}{x+y}=\frac{7^n-2\cdot 5^n}{7^n+5^n}.$$

Vježba 034

Skratite razlomak: $\dfrac{9^n-4^n}{3^n-2^n}.$

Rezultat: $3^n - 2^n$.

Zadatak 035 (Merika, gimnazija)

Skratite razlomak: $\dfrac{2a^2b-2ab^2}{4a^2b-4ab^2}.$

Rješenje 035

$$\frac{2a^2b-2ab^2}{4a^2b-4ab^2}=\left[\begin{array}{c}\text{izlučimo } 2ab\\ \hline \text{izlučimo } 4ab\end{array}\right]=\frac{2ab\cdot\overbrace{(a-b)}^{1}}{4ab\cdot\underbrace{(a-b)}_{1}}=\frac{2ab}{4ab}=\frac{1}{2}.$$

Vježba 035

Skratite razlomak: $\dfrac{2ab-2b}{a-1}.$

Rezultat: 2b.

Zadatak 036 (Merika, gimnazija)

Skratite razlomak: $\dfrac{a^4+4a^2b^2}{a^5-16ab^4}.$

Rješenje 036

$$\frac{a^4+4a^2b^2}{a^5-16ab^4}=\left[\begin{array}{c}\text{izlučimo } a^2\\ \hline \text{izlučimo } a\end{array}\right]=\frac{a^2\left(a^2+4b^2\right)}{a\cdot\underbrace{\left(a^4-16b^4\right)}_{\text{razlika kvadrata}}}=\frac{a^2\overbrace{\left(a^2+4b^2\right)}^{1}}{a\cdot\left(a^2-4b^2\right)\cdot\underbrace{\left(a^2+4b^2\right)}_{1}}=\frac{\overbrace{a^2}^{a}}{\underbrace{a}_{1}\cdot\left(a^2-4b^2\right)}=\frac{a}{a^2-4b^2}.$$

Vježba 036

Skratite razlomak: $\frac{a^4-4b^4}{a^2-2b^2}$.

Rezultat: $a^2 + 2b^2$.

Zadatak 037 (Merika, gimnazija)

Ako je $\frac{x}{y}+x=\frac{y}{x}+y,\ x\neq y,$ koliko je $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$?

Rješenje 037

Zadanu jednakost zapišimo u obliku

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=y-x \Rightarrow \frac{x^2-y^2}{x\cdot y}=y-x \Rightarrow \frac{(x-y)\cdot(x+y)}{x\cdot y}=-(x-y)\ /:(x-y) \Rightarrow \frac{x+y}{x\cdot y}=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x\cdot y}+\frac{y}{x\cdot y}=-1 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=-1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1.$$

Vježba 037

Ako je $\frac{x}{y}+x=\frac{y}{x}+y,\ x\neq y,$ koliko je $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}$?

Rezultat: – 2.

Zadatak 038 (Merika, gimnazija)

Zbroj dvaju pozitivnih brojeva jednak je zbroju njihovih recipročnih vrijednosti. Koliki je umnožak tih brojeva?

Rješenje 038

Označimo dva pozitivna broja slovima x i y. Tada je:

$$x+y=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \Rightarrow x+y=\frac{x+y}{x\cdot y}\ /:(x+y) \Rightarrow 1=\frac{1}{x\cdot y} \Rightarrow x\cdot y=1.$$

Vježba 038

Poluzbroj dvaju pozitivnih brojeva jednak je zbroju njihovih recipročnih vrijednosti. Koliki je umnožak tih brojeva?

Rezultat: 2.

Zadatak 039 (Merika, gimnazija)

Zapiši u obliku potencije s bazom 2 sljedeći izraz: $3\cdot 2^6 + 10\cdot 2^5$.

Rješenje 039

$$3\cdot 2^6 + 10\cdot 2^5 = 2^5\cdot(3\cdot 2 + 10) = 2^5\cdot(6 + 10) = 2^5\cdot 16 = 2^5\cdot 2^4 = 2^9.$$

Vježba 039

Zapiši u obliku potencije s bazom 2 sljedeći izraz: $3\cdot 2^5 + 10\cdot 2^4$.

Rezultat: 2^8.

Zadatak 040 (Merika, gimnazija)

Ako je $\frac{b}{a}=\frac{2}{3},\ \frac{c}{b}=\frac{3}{4},$ koliko je $\frac{a+b+c}{a-b-c}$?

Rješenje 040

1.inačica

$$\left.\begin{aligned}\frac{b}{a}&=\frac{2}{3}\\ \frac{c}{b}&=\frac{3}{4}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}a&=\frac{3b}{2}\\ c&=\frac{3b}{4}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a+b+c}{a-b-c}=\frac{\frac{3b}{2}+b+\frac{3b}{4}}{\frac{3b}{2}-b-\frac{3b}{4}}=\frac{\frac{6b+4b+3b}{4}}{\frac{6b-4b-3b}{4}}=\frac{13b}{-b}=-13.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{3}\\[2mm] \dfrac{c}{b}=\dfrac{3}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b:a=2:3\\ c:b=3:4\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a:b=3:2\\ b:c=4:3\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Da bismo napisali produženi omjer drugi član prvog}\\ \text{omjera i prvi član drugog omjera moraju biti jednaki}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}a:b=(3\cdot 2):(2\cdot 2)\\ b:c=4:3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a:b=6:4\\ b:c=4:3\end{array}\right\} \Rightarrow a:b:c=6:4:3 \Rightarrow \left.\begin{array}{r}a=6k\\ b=4k\\ c=3k\end{array}\right\}.$$

Vrijednost razlomka jednaka je:

$$\frac{a+b+c}{a-b-c}=\frac{6k+4k+3k}{6k-4k-3k}=\frac{13k}{-k}=-13.$$

Vježba 040

Ako je $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{c}{b}=\dfrac{3}{4}$, koliko je $\dfrac{a-b+c}{a-b-c}$?

Rezultat: – 5.