Zadatak 241 (Zoran, srednja škola)

Iz formule $y=\frac{2\cdot x-1}{x+1}$ izrazi x.

Rješenje 241

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$y=\frac{2\cdot x-1}{x+1}\Rightarrow y=\frac{2\cdot x-1}{x+1}\ /\cdot(x+1)\Rightarrow y\cdot(x+1)=2\cdot x-1\Rightarrow y\cdot x+y=2\cdot x-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\cdot x-2\cdot x=-1-y\Rightarrow x\cdot(y-2)=-1-y\Rightarrow x\cdot(y-2)=-1-y\ /\cdot\frac{1}{y-2}\Rightarrow x=\frac{-1-y}{y-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-(1+y)}{-(2-y)}\Rightarrow x=\frac{-(1+y)}{-(2-y)}\Rightarrow x=\frac{1+y}{2-y}\Rightarrow x=\frac{y+1}{2-y}.$$

Vježba 241

Iz formule $y=\frac{x-1}{x+1}$ izrazi x.

Rezultat: $x=\frac{1+y}{1-y}.$

Zadatak 242 (Marko, srednja škola)

Dokaži da za svaki realni broj x vrijedi $x^2-x+1>0.$

Rješenje 242

Ponovimo!

$$a\in R\Rightarrow a^2\geq 0\quad,\quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zadani trinom dopunjavamo do potpunog kvadrata. Iz prva dva člana kvadratnog trinoma nalazimo treći član tako da cijeli trinom bude potpuni kvadrat.

$$x^2-x+1=x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\left(x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\left(x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}>0.$$

Vježba 242

Dokaži da za svaki realni broj x vrijedi $x^2-2\cdot x+2>0.$

Rezultat: Dokaz analogan, $(x-1)^2+1\geq 1>0.$

Zadatak 243 (Marko, srednja škola)

Dokaži da za svaki realni broj a vrijedi $a^4-3\cdot a^2-4\cdot a+8>0.$

Rješenje 243

Ponovimo!

$$a\in R\Rightarrow a^2\geq 0\quad,\quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zadani izraz rastavimo na dva trinoma koji su potpuni kvadrati.

$$a^4-3\cdot a^2-4\cdot a+8=a^4-4\cdot a^2+a^2-4\cdot a+4+4=a^4-4\cdot a^2+a^2-4\cdot a+4+4=$$

$$= a^4 - 4 \cdot a^2 + 4 + a^2 - 4 \cdot a + 4 = \left(a^4 - 4 \cdot a^2 + 4\right) + \left(a^2 - 4 \cdot a + 4\right) = \left(a^2 - 2\right)^2 + (a-2)^2 > 0.$$

Budući da izrazi $a^2 - 2$ i $a - 2$ ne mogu istodobno biti jednaki nuli, vrijedi stroga nejednakost.

Vježba 243

Dokaži da za svaki realni broj a vrijedi $a^4 + 3 \cdot a^2 - 2 \cdot a + 2 > 0$.

Rezultat: Dokaz analogan, $\left(a^2 + 1\right)^2 + (a-1)^2 > 0$.

Zadatak 244 (Marko, srednja škola)

Izračunajte $a^{32} + a^{-32}$, ako je $a^2 + a + 1 = 0$.

Rješenje 244

Ponovimo!

$$x^3 - y^3 = (x-y) \cdot \left(x^2 + x \cdot y + y^2\right) \quad , \quad \left(x^n\right)^m = x^{n \cdot m} \quad , \quad x^n \cdot x^m = x^{n+m}.$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad , \quad x^1 = x \quad , \quad 1^n = 1.$$

Zadanu jednadžbu

$$a^2 + a + 1 = 0$$

pomnožimo sa $a - 1$ pri čemu je $a - 1 \neq 0$.

$$a^2 + a + 1 = 0 \Rightarrow a^2 + a + 1 = 0 \;/ \cdot (a-1) \Rightarrow (a-1) \cdot \left(a^2 + a + 1\right) = 0 \Rightarrow a^3 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 = 1.$$

Sada je

- $a^{32} = a^{33} \cdot a^{-1} = \left(a^3\right)^{11} \cdot a^{-1} = 1^{11} \cdot a^{-1} = 1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$
- $a^{-32} = a^{-33} \cdot a^1 = \left(a^3\right)^{-11} \cdot a^1 = 1^{-11} \cdot a = 1 \cdot a = a.$

Konačno je:

$$a^{32} + a^{-32} = \frac{1}{a} + a = \frac{1 + a^2}{a} = \begin{bmatrix} a^2 + a + 1 = 0 \\ a^2 + 1 = -a \end{bmatrix} = \frac{-a}{a} = \frac{-a}{a} = -1.$$

Vježba 244

Izračunajte $a^{32} + a^{-32} + 1$, ako je $a^2 + a + 1 = 0$.

Rezultat: 0.

Zadatak 245 (Ivana B., srednja škola)

Koliko je s ako je $t = \frac{s+r}{s-r}$, gdje je $s \neq r$, $t \neq 1$.

Rješenje 245

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Zadanu jednadžbu pomnožimo sa zajedničkim nazivnikom da bismo se riješili razlomaka.

$$t=\frac{s+r}{s-r}\ \Rightarrow\ t=\frac{s+r}{s-r}\ /\cdot(s-r)\ \Rightarrow\ t\cdot(s-r)=s+r\ \Rightarrow\ t\cdot s-t\cdot r=s+r\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t\cdot s-s=r+t\cdot r\ \Rightarrow\ s\cdot(t-1)=r+r\cdot t\ \Rightarrow\ s\cdot(t-1)=r\cdot(1+t)\ \Rightarrow\ s\cdot(t-1)=r\cdot(1+t)\ /\cdot\frac{1}{t-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s=\frac{r\cdot(1+t)}{t-1}.$$

Vježba 245

Koliko je s ako je $t=\frac{s-r}{s+r}$, gdje je $s\neq -r,\ t\neq 1$.

Rezultat: $s=\frac{r\cdot(1+t)}{1-t}.$

Zadatak 246 (Tiho, srednja škola)

Pojednostavni: $\frac{a^{2\cdot n}-1}{a^{2\cdot n}-b^{2\cdot n}}\cdot\frac{a^n-b^n}{a^n+1}.$

Rješenje 246

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}\qquad,\qquad x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y).$$

$$\frac{a^{2\cdot n}-1}{a^{2\cdot n}-b^{2\cdot n}}\cdot\frac{a^n-b^n}{a^n+1}=\frac{\left(a^n\right)^2-1}{\left(a^n\right)^2-\left(b^n\right)^2}\cdot\frac{a^n-b^n}{a^n+1}=\frac{\left(a^n-1\right)\cdot\left(a^n+1\right)}{\left(a^n-b^n\right)\cdot\left(a^n+b^n\right)}\cdot\frac{a^n-b^n}{a^n+1}=$$

$$=\frac{\left(a^n-1\right)\cdot\left(a^n+1\right)}{\left(a^n-b^n\right)\cdot\left(a^n+b^n\right)}\cdot\frac{a^n-b^n}{a^n+1}=\frac{a^n-1}{a^n+b^n}.$$

Vježba 246

Pojednostavni: $\frac{a^{2\cdot n}-1}{a^{2\cdot n}-b^{2\cdot n}}\cdot\frac{a^n-b^n}{a^n-1}.$

Rezultat: $\frac{a^n+1}{a^n+b^n}.$

Zadatak 247 (Katarina, srednja škola)

Pojednostavni: $\left(\frac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{a\cdot\sqrt{a}-b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):(a+b).$

Rješenje 247

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=x\qquad,\qquad\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}\qquad,\qquad x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y).$$

$$x^n\cdot x^m=x^{n+m}\qquad,\qquad x^1=x.$$

$$\left(\frac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{a\cdot\sqrt{a}-b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):(a+b)=$$

$$=\frac{\left(a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\left(a\cdot\sqrt{a}-b\cdot\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}\cdot\frac{1}{a+b}=$$

$$=\frac{a\cdot\left(\sqrt{a}\right)^2-a\cdot\sqrt{a\cdot b}+b\cdot\sqrt{a\cdot b}-b\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2+a\cdot\left(\sqrt{a}\right)^2+a\cdot\sqrt{a\cdot b}-b\cdot\sqrt{a\cdot b}-b\cdot\left(\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}\cdot\frac{1}{a+b}=$$

$$=\frac{a^2-a\cdot\sqrt{a\cdot b}+b\cdot\sqrt{a\cdot b}-b^2+a^2+a\cdot\sqrt{a\cdot b}-b\cdot\sqrt{a\cdot b}-b^2}{a-b}\cdot\frac{1}{a+b}=$$

$$=\frac{a^2-a\cdot\sqrt{a\cdot b}+b\cdot\sqrt{a\cdot b}-b^2+a^2+a\cdot\sqrt{a\cdot b}-b\cdot\sqrt{a\cdot b}-b^2}{a-b}\cdot\frac{1}{a+b}=$$

$$=\frac{2\cdot a^2-2\cdot b^2}{a-b}\cdot\frac{1}{a+b}=\frac{2\cdot a^2-2\cdot b^2}{(a-b)\cdot(a+b)}=\frac{2\cdot\left(a^2-b^2\right)}{a^2-b^2}=\frac{2\cdot\left(a^2-b^2\right)}{a^2-b^2}=2.$$

Vježba 247

Pojednostavni: $(a+b):\left(\frac{a\cdot\sqrt{a}+b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{a\cdot\sqrt{a}-b\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right).$

Rezultat: $\frac{1}{2}.$

Zadatak 248 (Ante, tehnička škola)MMM

Dokaži da je $a^2+b^2+c^2\geq a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$ za sve realne brojeve a, b i c.

Rješenje 248

Ponovimo!

$$(x-y)^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\quad,\quad x^2\geq 0\ ,\ x\in R.$$

Za realne brojeve x i y uvijek vrijedi nejednakost:

$$(x-y)^2\geq 0\ \Rightarrow\ x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2\geq 2\cdot x\cdot y.$$

1.inačica

Ako nejednakost pomnožimo brojem 2 dobije se:

$$a^2+b^2+c^2\geq a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a\ \Rightarrow\ a^2+b^2+c^2\geq a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a\ /\cdot 2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot c^2\geq 2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot c+2\cdot c\cdot a\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot c^2-2\cdot a\cdot b-2\cdot b\cdot c-2\cdot c\cdot a\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2+a^2-2\cdot a\cdot c+c^2+b^2-2\cdot b\cdot c+c^2\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)+\left(a^2-2\cdot a\cdot c+c^2\right)+\left(b^2-2\cdot b\cdot c+c^2\right)\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geq 0.$$

Kvadrat svakog realnog broja je nenegativan broj (veći ili jednak nuli) pa je zadnja nejednakost točna za sve realne brojeve a, b i c. Budući da su sve nejednakosti međusobno ekvivalentne, slijedi da je i početna nejednakost istinita.

2.inačica

Nejednakost možemo dokazati i obrnutim putem. Napišemo nejednakost koja je istinita za sve realne brojeve

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2-2\cdot a\cdot b+b^2+a^2-2\cdot a\cdot c+c^2+b^2-2\cdot b\cdot c+c^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2 \geq 2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot c^2 \geq 2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot c^2 \geq 2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c \;/:2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c.$$

3.inačica

Napišemo sustav od tri nejednakosti i njihovim zbrajanjem dobije se tvrdnja iz zadatka.

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2 \geq 2\cdot a\cdot b \\ b^2+c^2 \geq 2\cdot b\cdot c \\ c^2+a^2 \geq 2\cdot c\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \geq 2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot c+2\cdot c\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot c^2 \geq 2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot c+2\cdot c\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot c^2 \geq 2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot c+2\cdot c\cdot a \;/:2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a.$$

Vježba 248

Dokaži da je $a+\frac{1}{a} \geq 2$, $a \neq 0$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 249 (Ante, tehnička škola)

Dokaži da za sve realne brojeve a, b, $c \geq 0$ vrijedi:

$$a^2\cdot\left(1+b^2\right)+b^2\cdot\left(1+c^2\right)+c^2\cdot\left(1+a^2\right) \geq 6\cdot a\cdot b\cdot c.$$

Rješenje 249

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2}=a \;,\; a \geq 0 \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Za realne brojeve x i $y \geq 0$ broj:

- $\frac{x+y}{2}$ zove se aritmetička sredina
- $\sqrt{x\cdot y}$ zove se geometrijska.

Aritmetička sredina uvijek je veća ili jednaka od geometrijske sredine.

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x\cdot y}.$$

Uporabom aritmetičke i geometrijske sredine dobije se:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2+b^2\cdot c^2}{2}\ge\sqrt{a^2\cdot b^2\cdot c^2}\\ \dfrac{b^2+c^2\cdot a^2}{2}\ge\sqrt{b^2\cdot c^2\cdot a^2}\\ \dfrac{c^2+a^2\cdot b^2}{2}\ge\sqrt{c^2\cdot a^2\cdot b^2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2+b^2\cdot c^2}{2}\ge a\cdot b\cdot c\\ \dfrac{b^2+c^2\cdot a^2}{2}\ge a\cdot b\cdot c\\ \dfrac{c^2+a^2\cdot b^2}{2}\ge a\cdot b\cdot c\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{a^2+b^2\cdot c^2}{2}\ge a\cdot b\cdot c\ /\cdot 2\\ \dfrac{b^2+c^2\cdot a^2}{2}\ge a\cdot b\cdot c\ /\cdot 2\\ \dfrac{c^2+a^2\cdot b^2}{2}\ge a\cdot b\cdot c\ /\cdot 2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^2+b^2\cdot c^2\ge 2\cdot a\cdot b\cdot c\\ b^2+c^2\cdot a^2\ge 2\cdot a\cdot b\cdot c\\ c^2+a^2\cdot b^2\ge 2\cdot a\cdot b\cdot c\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo}\\ \text{nejednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2\cdot c^2+b^2+c^2\cdot a^2+c^2+a^2\cdot b^2\ge 6\cdot a\cdot b\cdot c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(a^2+a^2\cdot b^2\right)+\left(b^2+b^2\cdot c^2\right)+\left(c^2+c^2\cdot a^2\right)\ge 6\cdot a\cdot b\cdot c\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2\cdot\left(1+b^2\right)+b^2\cdot\left(1+c^2\right)+c^2\cdot\left(1+a^2\right)\ge 6\cdot a\cdot b\cdot c.$$

Vježba 249

Dokaži da za sve realne brojeve a, b, $c\ge 0$ vrijedi:

$$a^2\cdot\left(1+b^2+c^2\right)+b^2\cdot\left(1+c^2\right)+c^2\ge 6\cdot a\cdot b\cdot c.$$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 250 (Tifa, gimnazija)

Racionaliziraj nazivnik: $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Rješenje 250

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=$$

$$=\frac{(x-y)\cdot(x+y)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{(x-y)\cdot(x+y)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}=$$

$$=\frac{(x-y)\cdot(x+y)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}=(x+y)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right).$$

Vježba 250

Racionaliziraj nazivnik: $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Rezultat: $(x+y)\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right).$

Zadatak 251 (Tifa, gimnazija)

Racionaliziraj nazivnik: $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{10}}.$

Rješenje 251

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad,\quad\frac{a}{1}=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{10}}=\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot5}}=\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{1}{2+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\left[\begin{array}{l}\text{racionaliziramo svaki}\\ \text{razlomak posebno}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{1}=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right).$$

Vježba 251

Racionaliziraj nazivnik: $\dfrac{2}{2+\sqrt{8}}.$

Rezultat: $\sqrt{2}-1.$

Zadatak 252 (Maturanti, HTT)

Racionaliziraj izraz: $\dfrac{19}{5-\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}+\dfrac{5}{\sqrt{5}}.$

Rješenje 252

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad,\quad\frac{a}{1}=a.$$

$$\frac{19}{5-\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{5}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionaliziramo svaki}\\ \text{razlomak posebno}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{19}{5-\sqrt{6}}\cdot\frac{5+\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{19\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{\left(5-\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)}+\frac{5\cdot\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{19\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{5^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}+\frac{5\cdot\sqrt{5}}{5}=$$

$$=\frac{19\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{25-6}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{5-6}+\frac{5\cdot\sqrt{5}}{5}=\frac{19\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{19}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{-1}+\sqrt{5}=$$

$$=\frac{19\cdot\left(5+\sqrt{6}\right)}{19}-\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{5}=5+\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{5}=5+\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{5}=5.$$

Vježba 252

Racionaliziraj izraz: $\frac{19}{5-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{5}{\sqrt{5}}$.

Rezultat: 5.

Zadatak 253 (Maturanti, HTT)

Racionaliziraj nazivnik razlomka: $\frac{5}{\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}$.

Rješenje 253

Ponovimo!

$$a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$a^1=a\quad,\quad\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad,\quad\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}.$$

1.inačica

$$\frac{5}{\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}=\frac{5}{\sqrt{\sqrt{5^2\cdot 5}}}=\frac{5}{\sqrt{\sqrt{5^3}}}=\frac{5}{\sqrt[4]{5^3}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\\text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{5}{\sqrt[4]{5^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^3\cdot 5}}=$$

$$=\frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^4}}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{5^4}}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{5}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{5}=\sqrt[4]{5}.$$

2.inačica

$$\frac{5}{\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\\text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{5}{\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}=\frac{5\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}{\left(\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{5\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}{5\cdot\sqrt{5}}=\frac{5\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}{5\cdot\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\\text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5\cdot\sqrt{5}\cdot 5}}{5}=\frac{\sqrt{5^2\cdot\sqrt{5}}}{5}=$$

$$=\frac{5\cdot\sqrt{\sqrt{5}}}{5}=\frac{5\cdot\sqrt{\sqrt{5}}}{5}=\sqrt{\sqrt{5}}=\sqrt[4]{5}.$$

Vježba 253

Racionaliziraj nazivnik razlomka: $\frac{3}{\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}}$.

Rezultat: $\sqrt[4]{3}$.

Zadatak 254 (Maturanti, HTT)

Dokaži: $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} \le \frac{c+d}{d}$.

Rješenje 254

Ponovimo!

$$x \le y \Rightarrow x+z \le y+z.$$

$$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{nejednakosti} \\ \text{pribrojimo 1}\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{a}{b}+1 \le \frac{c}{d}+1 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{1}{1} \le \frac{c}{d}+\frac{1}{1} \Rightarrow \frac{a+b}{b} \le \frac{c+d}{d}.$$

Vježba 254

Dokaži: $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} \le \frac{c-d}{d}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 255 (Maturanti, HTT)

Pojednostavni: $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$.

Rješenje 255

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad , \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{a^m \cdot b^n} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a.$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

1.inačica

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x^3 \cdot x^2 \cdot x^1} = \sqrt[6]{x^6} = \sqrt[6]{x^6} = x.$$

2.inačica

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{3+2+1}{6}} = x^{\frac{6}{6}} = x^{\frac{6}{6}} = x^1 = x.$$

Vježba 255

Pojednostavni: $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5}$.

Rezultat: 5.

Zadatak 256 (Mare, opća gimnazija)

Pojednostavni: $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \left(2 \cdot \sqrt{5} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right)$.

Rješenje 256

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Korijeni se mogu zbrajati i oduzimati samo onda kad su im jednaki radikandi i eksponenti.

$$\sqrt[n]{a} \quad , \quad \text{n je eksponent, a je radikand.}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \left(2 \cdot \sqrt{5} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \left(\frac{1}{3} - 2\right) \cdot \sqrt{5} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{3} = \frac{1-6}{3} \cdot \sqrt{5} + \frac{3+2}{6} \cdot \sqrt{3} =$$

$$=-\frac{5}{3}\cdot\sqrt{5}+\frac{5}{6}\cdot\sqrt{3}=\frac{5}{6}\cdot\sqrt{3}-\frac{5}{3}\cdot\sqrt{5}=\frac{5}{6}\cdot\left(\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{5}\right).$$

Vježba 256

Pojednostavni: $-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{5}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}+\left(2\cdot\sqrt{5}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\right).$

Rezultat: $\frac{5}{6}\cdot\left(2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).$

Zadatak 257 (Mirjana, gimnazija)

Racionaliziraj nazivnik razlomka: $\frac{a}{\sqrt[4]{b}-\sqrt{c}}.$

Rješenje 257

Ponovimo!

$$\left(a^2-b^2\right)=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a\quad,\quad\sqrt[n\cdot m]{a^{p\cdot m}}=\sqrt[n]{a^p}.$$

$$\frac{a}{\sqrt[4]{b}-\sqrt{c}}=\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\\text{nazivnika}\end{bmatrix}=\frac{a}{\sqrt[4]{b}-\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}}{\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt{c}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)}=$$

$$=\frac{a\cdot\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt[4]{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}\right)^2}=\frac{a\cdot\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)}{\sqrt[4]{b^2}-c}=\frac{a\cdot\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)}{\sqrt{b}-c}=\begin{bmatrix}\text{racionalizacija}\\\text{nazivnika}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{a\cdot\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)}{\sqrt{b}-c}\cdot\frac{\sqrt{b}+c}{\sqrt{b}+c}=\frac{a\cdot\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)\cdot\left(\sqrt{b}+c\right)}{\left(\sqrt{b}-c\right)\cdot\left(\sqrt{b}+c\right)}=\frac{a\cdot\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)\cdot\left(\sqrt{b}+c\right)}{\left(\sqrt{b}\right)^2-c^2}=$$

$$=\frac{a\cdot\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt{c}\right)\cdot\left(\sqrt{b}+c\right)}{b-c^2}.$$

Vježba 257

Racionaliziraj nazivnik razlomka: $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$

Rezultat: $\frac{a\cdot\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{b-c}.$

Zadatak 258 (Danijel, gimnazija)

Izvedi formulu za $(a+b+c+d)^2$.

Rješenje 258

Ponovimo!

Kvadrat zbroja:

$$(x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2.$$

Množenje zagrada:

$$(x+y)\cdot(u+v)=x\cdot u+x\cdot v+y\cdot u+y\cdot v.$$

Računamo kvadrat polinoma.

$$(a+b+c+d)^2=\left((a+b)+(c+d)\right)^2=(a+b)^2+2\cdot(a+b)\cdot(c+d)+(c+d)^2=$$

$$=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2+2\cdot(a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d)+c^2+2\cdot c\cdot d+d^2=$$

$$=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2+2\cdot a\cdot c+2\cdot a\cdot d+2\cdot b\cdot c+2\cdot b\cdot d+c^2+2\cdot c\cdot d+d^2=$$

$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot a\cdot d+2\cdot b\cdot c+2\cdot b\cdot d+2\cdot c\cdot d=$$

$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d+c\cdot d).$$

Kvadrat polinoma jednak je zbroju kvadrata svih njegovih članova i dvostrukih umnožaka svakog člana sa svim onim članovima koji dolaze iza njega.

Vježba 258

Izvedi formulu za $(a+b+c)^2$.

Rezultat: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c).$

Zadatak 259 (Danijel, gimnazija)

Racionaliziraj nazivnik razlomka: $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.$

Rješenje 259

Ponovimo!

$$x^3+y^3=(x+y)\cdot\left(x^2-x\cdot y+y^2\right)\quad,\quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}\quad,\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a.$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}\cdot\frac{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b\cdot c}+\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b\cdot c}+\sqrt[3]{c^2}}=$$

$$=\frac{a\cdot\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b\cdot c}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b\cdot c}+\sqrt[3]{c^2}\right)}=\frac{a\cdot\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b\cdot c}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{b}\right)^3+\left(\sqrt[3]{c}\right)^3}=\frac{a\cdot\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b\cdot c}+\sqrt[3]{c^2}\right)}{b+c}.$$

Vježba 259

Racionaliziraj nazivnik razlomka: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}.$

Rezultat: $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a\cdot b}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}.$

Zadatak 260 (Kruno, tehnička škola)

Skraćivanjem izraza $\dfrac{1-(a-3)^2}{4\cdot a-8}$ dobivamo:

$$A)\ \frac{4+a}{4}\qquad B)\ 1\qquad C)\ \frac{4-a}{4}\qquad D)\ \frac{a^2-2}{a-2}.$$

Rješenje 260

Ponovimo!

$$x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y) \quad , \quad (x-y)^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \quad , \quad x\cdot y+x\cdot z=x\cdot(y+z).$$

1.inačica

$$\frac{1-(a-3)^2}{4\cdot a-8}=\frac{1-\left(a^2-6\cdot a+9\right)}{4\cdot(a-2)}=\frac{1-a^2+6\cdot a-9}{4\cdot(a-2)}=\left[\begin{array}{l}\text{transformacija}\\ 1-9=-12+4\end{array}\right]=\frac{-12-a^2+6\cdot a+4}{4\cdot(a-2)}=$$

$$=\frac{6\cdot a-12-a^2+4}{4\cdot(a-2)}=\frac{6\cdot(a-2)-\left(a^2-4\right)}{4\cdot(a-2)}=\frac{6\cdot(a-2)-(a-2)\cdot(a+2)}{4\cdot(a-2)}=\frac{(a-2)\cdot(6-(a+2))}{4\cdot(a-2)}=$$

$$=\frac{(a-2)\cdot(6-(a+2))}{4\cdot(a-2)}=\frac{6-(a+2)}{4}=\frac{6-a-2}{4}=\frac{4-a}{4} \quad , \quad a\neq 2.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\frac{1-(a-3)^2}{4\cdot a-8}=\frac{(1-(a-3))\cdot(1+(a-3))}{4\cdot(a-2)}=\frac{(1-a+3)\cdot(1+a-3)}{4\cdot(a-2)}=\frac{(4-a)\cdot(a-2)}{4\cdot(a-2)}=$$

$$=\frac{(4-a)\cdot(a-2)}{4\cdot(a-2)}=\frac{4-a}{4} \quad , \quad a\neq 2.$$

Odgovor je pod C.

3.inačica

Do rješenja se može doći i na jednostavniji način. Ako se dva izraza podudaraju za bilo koju vrijednost varijable a, oni se moraju podudarati i kad odaberemo konkretnu vrijednost. Tako na primjer, u početnom izrazu možemo uzeti da je a = 3. Za tu vrijednost od a dobije se:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1-(a-3)^2}{4\cdot a-8}\\ a=3\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1-(3-3)^2}{4\cdot 3-8}=\frac{1-0^2}{12-8}=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Za a = 3 računamo vrijednost izraza ponuđenih pod A, B, C i D.
Računamo vrijednost izraza pod A.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{4+a}{4}\\ a=3\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4+3}{4}=\frac{7}{4}\neq\frac{1}{4}.$$

Računamo vrijednost izraza pod B.

$$1\neq\frac{1}{4}.$$

Računamo vrijednost izraza pod C.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{4-a}{4}\\ a=3\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}=\frac{1}{4}. \text{ To je odgovor.}$$

Dakle, odgovor je pod C.
Zadnji odgovor nije potrebno ni provjeravati jer od četiri ponuđena odgovora samo jedan mora biti točan.

Vježba 260

Skraćivanjem izraza $\frac{(a-3)^2-1}{8-4\cdot a}$ dobivamo:

$$A)\ \frac{4+a}{4} \qquad B)\ 1 \qquad C)\ \frac{4-a}{4} \qquad D)\ \frac{a^2-2}{a-2}.$$

Rezultat: Odgovor je pod C.