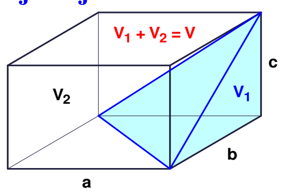
Zadatak 021 (Marko, gimnazija)

Jednom dijagonalom osnovke kvadra položimo ravninu koja na drugoj osnovki prolazi samo jednim vrhom. Nađite omjer obujmova nastalih tijela.

Rješenje 021



Nađimo prvo obujam piramide:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot c = \frac{abc}{6}.$$

Tada je obujam ostatka kocke jednak:

$$V_2 = V - V_1 = abc - \frac{abc}{6} = \frac{5abc}{6}.$$

Omjer nastalih obujmova iznosi:

$$V_1 : V_2 = \frac{abc}{6} : \frac{5abc}{6} = \frac{abc}{6} \cdot \frac{6}{5abc} = \frac{1}{5} = 1 : 5.$$

Vježba 021

Jednom dijagonalom osnovke kvadra položimo ravninu koja na drugoj osnovki prolazi samo jednim vrhom. Nađite obujam nastale piramide.

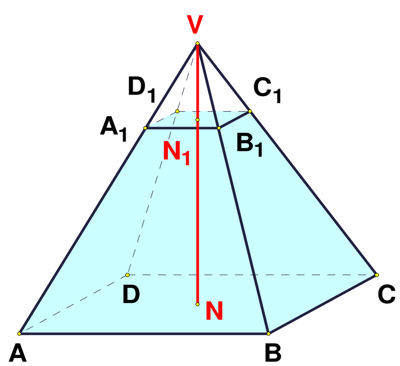
Rezultat: $\frac{abc}{6}.$

Zadatak 022 (Rex, gimnazija)

Ako piramidi volumena 1000 m^3 i visine 10 m odsiječemo vrh paralelno s bazom na 9 m visine od baze, koliki volumen ima preostali dio piramide?

Rješenje 022

V = 1000 m^3, v = 10 m, v_1 = 10 m – 9 m = 1 m, ΔV = ?



$$|VN| = v \quad , \quad |VN_1| = v_1$$

Budući da se volumeni piramida ABCDV i $A_1B_1C_1D_1V$ međusobno odnose kao kubovi njihovih visina v i v_1, slijedi:

$$V : V_1 = v^3 : v_1^3 \Rightarrow V \cdot v_1^3 = V_1 \cdot v^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{V \cdot v_1^3}{v^3} = \frac{1000\ m^3 \cdot (1\ m)^3}{(10\ m)^3} = \frac{1000\ m^3 \cdot 1\ m^3}{1000\ m^3} = 1\ m^3.$$

Preostali dio piramide $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ima volumen:

$$\Delta V = V - V_1 = 1000\ m^3 - 1\ m^3 = 999\ m^3.$$

Vježba 022

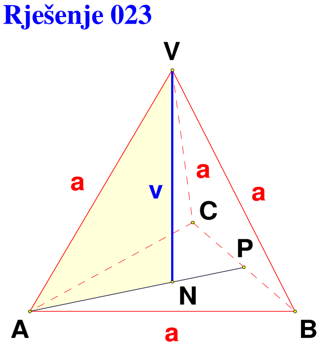
Ako piramidi volumena 1000 m^3 i visine 10 m odsiječemo vrh paralelno s bazom na 8 m visine od baze, koliki volumen ima preostali dio piramide?

Rezultat: 992 m^3.

Zadatak 023 (Anamarija, hotelijerska škola)

Ako je volumen tetraedra 9 m^3 nađi njegovu visinu.

Rješenje 023



Volumen tetraedra je

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v,$$

gdje je B površina jednakostraničnog trokuta:

$$B = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Sa slike vidi se:

$|AV| = a, \quad |NV| = v, \quad |AN| = \frac{2}{3} \cdot |AP| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$, ($\overline{AP}$ je težišnica, a točka N je težište koje težišnicu dijeli u omjeru 2 : 1).

Pomoću Pitagorina poučka nađemo v:

$$|NV|^2 = |AV|^2 - |AN|^2 \Rightarrow v^2 = a^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow v^2 = a^2 - \frac{a^2 \cdot 3}{9} \Rightarrow v^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2}{3} \cdot a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{2} \cdot v^2.$$

Iz formule za volumen dobije se visina v:

$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot v \\ a^2 = \frac{3}{2} \cdot v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot v^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot v \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot v^3 \Rightarrow 9 = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot v^3 \Rightarrow v^3 = \frac{72}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^3 = \frac{72}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow v^3 = \frac{72 \cdot \sqrt{3}}{3} = 24 \cdot \sqrt{3} = 8 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 2^3 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 3} = 2^3 \cdot \sqrt{3^3} = \left(2 \cdot \sqrt{3}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^3 = \left(2 \cdot \sqrt{3}\right)^3 \; / \sqrt[3]{\;} \Rightarrow v = 2 \cdot \sqrt{3} \; m.$$

Vježba 023

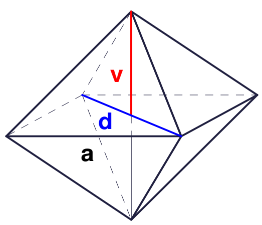
Ako je volumen tetraedra 243 m^3 nađi njegovu visinu.

Rezultat: $6 \cdot \sqrt{3} \; m.$

Zadatak 024 (Marko, gimnazija)

Nađite obujam oktaedra s bridom a.

Rješenje 024



$$\left.\begin{array}{l} d = a \cdot \sqrt{2} \\ v^2 = a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow v^2 = a^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = a^2 - \frac{2 \cdot a^2}{4} \Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot a^2}{4} \; / \sqrt{\;} \Rightarrow v = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Oktaedar je jedno od pet pravilnih tijela i omeđeno je s osam jednakostraničnih trokuta. Volumen oktaedra iznosi:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot B \cdot v = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot \sqrt{2}.$$

Vježba 024

Nađite oplošje oktaedra s bridom a.

Rezultat: $O = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}.$

Zadatak 025 (Vedrana, gimnazija)

Zbroj duljina triju bridova što se sastaju u istom vrhu pravilne trostrane prizme iznosi 12 cm. Ako prizma ima najveću moguću površinu pobočja, kolika je duljina njezine visine?

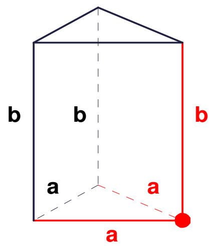
Rješenje 025

Zbroj duljina triju bridova što se sastaju u istom vrhu pravilne trostrane prizme iznosi 12 cm:

$$2 \cdot a + b = 12 \Rightarrow b = 12 - 2 \cdot a.$$

Površina pobočja pravilne trostrane prizme je:

$$P = 3 \cdot a \cdot b = 3 \cdot a \cdot (12 - 2 \cdot a) = 36 \cdot a - 6 \cdot a^2 = -6 \cdot a^2 + 36 \cdot a.$$



Površina pobočja je funkcija duljine brida a:

$$P(a) = -6 \cdot a^2 + 36 \cdot a.$$

To je kvadratna funkcija. Kvadratna funkcija f(x) = a · x² + b · x + c ima ekstrem u točki s apscisom:

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Ekstrem je maksimum ako je a < 0, minimum ako je a > 0.

Zato je duljina brida a pravilne trostrane prizme jednaka:

$$a = -\frac{36}{2 \cdot (-6)} = \frac{36}{12} = 3.$$

Duljina visine b pravilne trostrane prizme iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 12 - 2 \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow b = 12 - 2 \cdot 3 = 12 - 6 = 6 \; cm.$$

Vježba 025

Zbroj duljina triju bridova što se sastaju u istom vrhu pravilne trostrane prizme iznosi 18 cm. Ako prizma ima najveću moguću površinu pobočja, kolika je duljina njezine visine?

Rezultat: $\frac{abc}{6}.$

Zadatak 026 (Vedrana, gimnazija)

Tvornica pakira sok u ambalažu u obliku kvadra sa stranicama 5, 10, 20. Kolika bi bila ušteda u materijalu da ga pakira u ambalažu u obliku kocke?

Rješenje 026

Iz jednakosti volumena kvadra i kocke dobije se duljina brida a kocke:

$$\left.\begin{array}{l} \text{volumen kocke } V = a^3 \\ \text{volumen kvadra } V = a \cdot b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a^3 = 5 \cdot 10 \cdot 20 \Rightarrow a^3 = 1000 \; / \sqrt[3]{\;} \Rightarrow a = \sqrt[3]{1000} = 10.$$

Oplošja kvadra i kocke iznose:

$$\left.\begin{array}{l} \text{oplošje kvadra } O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (5 \cdot 10 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 20) = 2 \cdot (50 + 100 + 200) = 700 \\ \text{oplošje kocke } O = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 10^2 = 6 \cdot 100 = 600 \end{array}\right\}.$$

Ušteda u materijalu je:

$$\frac{700 - 600}{700} \cdot 100\% = \frac{100}{700} \cdot 100\% = 14.29\%.$$

Vježba 026

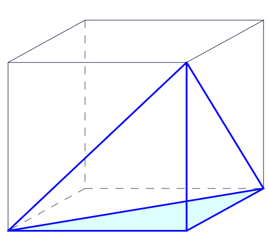
Tvornica pakira sok u ambalažu u obliku kvadra sa stranicama 4, 10, 25. Kolika bi bila ušteda u materijalu da ga pakira u ambalažu u obliku kocke?

Rezultat: 23.08%.

Zadatak 027 (Vedrana, gimnazija)

Ravnina prolazi kroz tri vrha kocke i odsijeca od nje tetraedar. Kako se odnose volumeni dobivenih tijela?

Rješenje 027



Ravnina odsijeca piramidu čiji je volumen:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{6}.$$

Volumen preostalog dijela kocke je:

$$V_2 = a^3 - V_1 = a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5 \cdot a^3}{6}.$$

Omjer volumena dobivenih tijela iznosi:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{5 \cdot a^3}{6}} = \frac{1}{5} \Rightarrow V_1 : V_2 = 1 : 5.$$

Vježba 027

Ravnina prolazi kroz tri vrha kocke i odsijeca od nje tetraedar. Kako se odnose kvadrati volumena dobivenih tijela?

Rezultat: 1 : 25.

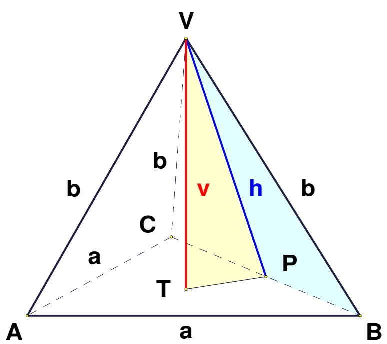
Zadatak 028 (Mira, gimnazija)

Točka V udaljena je od svakog vrha jednakostraničnog trokuta $\sqrt{13}$ cm, a od svake njegove stranice 2 cm. Koliko iznosi udaljenost točke V od ravnine trokuta?

Rješenje 028

Ponovimo!

Težišnicom trokuta nazivamo pravac koji spaja vrh trokuta sa sredinom nasuprotne stranice. Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki – težištu trokuta. Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 (računajući od vrha).



Budući da je točka V jednako udaljena od svakog vrha jednakostraničnog trokuta, nalazi se točno iznad središta (težišta T) trokuta ABC pa zajedno s trokutom definira pravilnu trostranu piramidu ABCV. Svaka pobočka te piramide je jednakokračni trokut s visinom h i stranicom b. Uočimo pravokutni trokut BPV i uporabom Pitagorina poučka lako dobijemo duljinu stranice osnovke a:

$$|BP|^2 = |BV|^2 - |PV|^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} = b^2 - h^2 \; / \cdot 4 \Rightarrow a^2 = 4 \cdot \left(b^2 - h^2\right).$$

Iz pravokutnog trokuta TPV pomoću Pitagorina poučka izračuna se visina v, tj. udaljenost točke V od ravnine trokuta:

$$|VT|^2 = |VP|^2 - |TP|^2 \Rightarrow v^2 = h^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow v^2 = h^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}\right)^2 \Rightarrow v^2 = h^2 - \frac{3 \cdot a^2}{36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = h^2 - \frac{a^2}{12} \Rightarrow v^2 = h^2 - \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot \left(b^2 - h^2\right) \Rightarrow v^2 = h^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(b^2 - h^2\right) \Rightarrow v^2 = h^2 - \frac{1}{3} \cdot b^2 + \frac{1}{3} \cdot h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{4}{3} \cdot h^2 - \frac{1}{3} \cdot b^2 \Rightarrow v^2 = \frac{4}{3} \cdot 2^2 - \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{13}\right)^2 \Rightarrow v^2 = \frac{16}{3} - \frac{13}{3} \Rightarrow v^2 = \frac{3}{3} \Rightarrow v^2 = 1 \; / \sqrt{} \Rightarrow v = 1 \; cm.$$

Vježba 028

Točka V udaljena je od svakog vrha jednakostraničnog trokuta $\sqrt{13}$ cm, a od svake njegove stranice 2 cm. Koliko iznosi kvadrat udaljenosti točke V od ravnine trokuta?

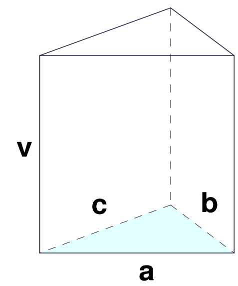
Rezultat: 2 cm.

Zadatak 029 (Ivana, hotelijerska škola)

Površine pobočki uspravne trostrane prizme iznose 64 cm^2, 48 cm^2 i 80 cm^2. Ako je visina prizme 16 cm, koliki je njezin obujam?

Rješenje 029

Uspravna prizma ima pobočke okomite na osnovku.



Pobočke uspravne trostrane prizme su tri pravokutnika čije površine glase:

$$P_1 = a \cdot v \quad , \quad P_2 = b \cdot v \quad , \quad P_3 = c \cdot v.$$

Duljine stranica osnovke iznose:

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot v = 64 \\ b \cdot v = 48 \\ c \cdot v = 80 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \cdot 16 = 64 \;/:16 \\ b \cdot 16 = 48 \;/:16 \\ c \cdot 16 = 80 \;/:16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 3 \\ c = 5 \end{array} \right\}.$$

Osnovka je pravokutni trokut kojemu su katete a = 4, b = 3, a hipotenuza c = 5.
Provjerimo!

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow 25 = 16 + 9 \Rightarrow 25 = 25.$$

Obujam prizme iunosi:

$$V = B \cdot v \Rightarrow \left[B = \frac{a \cdot b}{2} \right] \Rightarrow V = \frac{a \cdot b}{2} \cdot v = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 16 = 96 \; cm^3.$$

Vježba 029

Površine pobočki uspravne trostrane prizme iznose 20 cm², 15 cm² i 25 cm². Ako je visina prizme 5 cm, koliki je njezin obujam?

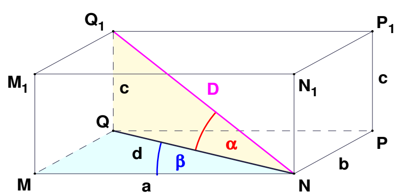
Rezultat: 30 cm³.

Zadatak 030 (Ivana, hotelijerska škola)

Prostorna dijagonala kvadra iznosi 8 dm i s ravninom baze zatvara kut od 30°. Ako dijagonala baze s jednim njegovim bridom zatvara kut od 60°, koliki je obujam (volumen) kvadra?

Rješenje 030

1.inačica



Sa slike vidi se:

$$D = \left| NQ_1 \right| = 8 \; dm \quad , \quad \alpha = \angle QNQ_1 = 30^0,$$

$$\beta = \angle MNQ = 60^0.$$

Uočimo pravokutan trokut QNQ_1 i izračunamo duljinu brida c i duljinu dijagonale baze d:

$$\sin \alpha = \frac{c}{D} \Rightarrow c = D \cdot \sin \alpha \Rightarrow c = 8 \cdot \sin 30^0 \Rightarrow c = 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow c = 4 \; dm,$$

$$\cos \alpha = \frac{d}{D} \Rightarrow d = D \cdot \cos \alpha \Rightarrow d = 8 \cdot \cos 30^0 \Rightarrow d = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = 4 \cdot \sqrt{3} \; dm.$$

Iz pravokutnog trokuta MNQ dobiju se duljine bridova a i b:

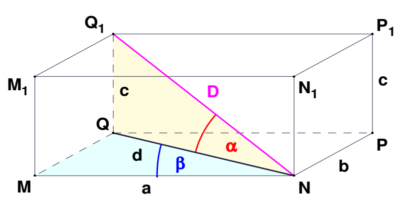
$$\sin \beta = \frac{b}{d} \Rightarrow b = d \cdot \sin \beta \Rightarrow b = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 60^0 \Rightarrow b = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = 6 \; dm,$$

$$\cos \beta = \frac{a}{d} \Rightarrow a = d \cdot \cos \beta \Rightarrow a = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 60^0 \Rightarrow a = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2 \cdot \sqrt{3} \; dm.$$

Obujam kvadra iznosi:

$$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 \cdot 4 \Rightarrow V = 48 \cdot \sqrt{3} \; dm^3.$$

2.inačica

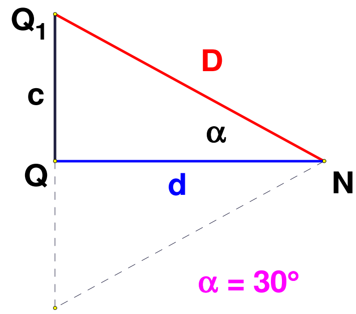


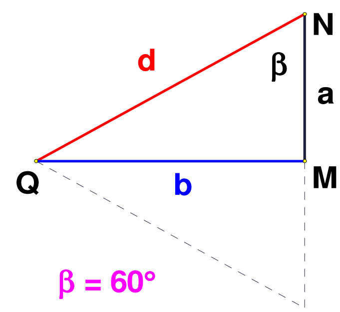
Sa slike vidi se:

$$D = \left| NQ_1 \right| = 8 \; dm \quad , \quad \alpha = \angle QNQ_1 = 30^0,$$

$$\beta = \angle MNQ = 60^0.$$

Zadatak možemo riješiti i bez uporabe trigonometrije nadopunjavanjem pravokutnih trokuta ΔQNQ_1 i ΔMNQ na jednakostranične trokute.





$$c = \frac{D}{2} \Rightarrow c = \frac{8}{2} = 4 \ dm,$$

$$d = \frac{D \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \sqrt{3} \ dm,$$

d – visina jednakostraničnog trokuta

$$a = \frac{d}{2} \Rightarrow c = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \ dm,$$

$$b = \frac{d \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 6 \ dm,$$

b – visina jednakostraničnog trokuta.

Obujam kvadra iznosi:

$$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 \cdot 4 \Rightarrow V = 48 \cdot \sqrt{3} \ dm^3.$$

Vježba 030

Prostorna dijagonala kvadra iznosi 8 dm i s ravninom baze zatvara kut od 30°. Ako dijagonala baze s jednim njegovim bridom zatvara kut od 60°, koliko je oplošje kvadra?

Rezultat: $O = \left(48 + 40 \cdot \sqrt{3}\right) \ dm^2.$

Zadatak 031 (Vedrana, gimnazija)

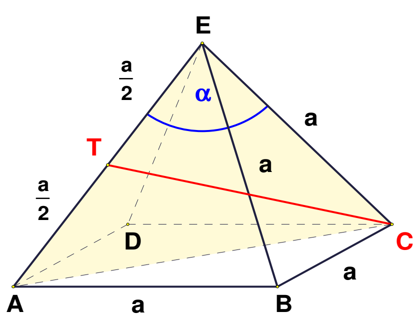
Četverostrana pravilna uspravna piramida ABCDE ima za bazu kvadrat ABCD stranice duge 4 cm, pobočke su jednakostranični trokuti. Ako je točka T polovište brida $\overline{AE}$, kolika je udaljenost točke T do vrha C?

Rješenje 031

Ponovimo!

Kosinusov poučak:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$



Uočimo trokut ACE i odredimo kut $\alpha = \angle CEA$. Budući da je $\overline{AC}$ dijagonala kvadrata ABCD, vrijedi:

$$|AC| = a \cdot \sqrt{2}.$$

Pomoću kosinusovog poučka za trokut ACE nađemo kut α:

$$|AC|^2 = |AE|^2 + |CE|^2 - 2 \cdot |AE| \cdot |CE| \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a \cdot \sqrt{2}\right)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a^2 = 2 \cdot a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \cos\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a^2 = 2 \cdot a^2 - 2 \cdot a^2 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 2 \cdot a^2 \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^0.$$

Trokut ACE je, dakle, pravokutan trokut. Budući da je i trokut CET pravokutan, uporabom Pitagorina poučka dobije se:

$$|TC|^2 = |TE|^2 + |CE|^2 \Rightarrow |TC|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Rightarrow |TC|^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 \Rightarrow |TC|^2 = \frac{5}{4} \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |TC|^2 = \frac{5}{4} \cdot a^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow |TC| = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot a^2} \Rightarrow |TC| = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot a \Rightarrow |TC| = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 4 \ cm \Rightarrow |TC| = 2 \cdot \sqrt{5} \ cm.$$

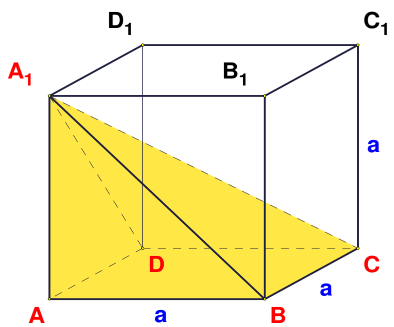
Vježba 031

Četverostrana pravilna uspravna piramida ABCDE ima za bazu kvadrat ABCD stranice duge 6 cm, pobočke su jednakostranični trokuti. Ako je točka T polovište brida $\overline{AE}$, kolika je udaljenost točke T do vrha C?

Rezultat: $3 \cdot \sqrt{5}\ cm.$

Zadatak 032 (Filip, tehnička škola)

U kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ upisana je četverostrana piramida $ABCDA_1$. Ako je oplošje upisane piramide 1 dm^2, koliko je oplošje kocke (u dm^2)?



Rješenje 032

Upisana četverostrana piramida $ABCDA_1$ ima bazu kvadrat ABCD (to je ujedno baza kocke). Njegova površina je:

$$P_{ABCD} = a^2.$$

Četiri pobočke piramide $ABCDA_1$ su pravokutni trokuti:

$$\Delta ABA_1,\ \Delta BCA_1,\ \Delta CDA_1,\ \Delta ADA_1.$$

Uočimo da su dva i dva trokuta sukladna (podudarna):

$$\Delta ABA_1 \cong \Delta ADA_1 \qquad , \qquad \Delta BCA_1 \cong \Delta CDA_1.$$

Za pravokutne trokute ΔABA_1 i ΔADA_1 vrijedi da im se dvije katete poklapaju s bridovima kocke pa njihove površine iznose:

$$P_{ABA_1} = P_{ADA_1} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{1}{2} \cdot a^2.$$

Za pravokutne trokute ΔBCA_1 i ΔDCA_1 vrijedi da za jednu katetu imaju brid kocke, a za drugu plošnu dijagonalu kocke pa su njihove površine:

$$P_{BCA_1} = P_{DCA_1} = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{2}.$$

Oplošje piramide $ABCDA_1$ je:

$$O = P_{ABCD} + P_{ABA_1} + P_{ADA_1} + P_{BCA_1} + P_{DCA_1} \Rightarrow O = a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 2 \cdot a^2 + a^2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow O = a^2 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Budući da je oplošje kocke $O_k = 6 \cdot a^2$, slijedi:

$$\left.\begin{matrix} O = a^2 \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right) \\ O_k = 6 \cdot a^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 = \dfrac{O}{2 + \sqrt{2}} \\ O_k = 6 \cdot a^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_k = 6 \cdot \frac{O}{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_k = 6 \cdot \frac{O}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow O_k = 6 \cdot \frac{O \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)}{4 - 2} \Rightarrow O_k = 6 \cdot \frac{O \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow O_k = 3 \cdot O \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[O = 1\ dm^2\right] \Rightarrow O_k = 3 \cdot 1\ dm^2 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) \Rightarrow O_k = \left(6 - 3 \cdot \sqrt{2}\right)\ dm^2.$$

Vježba 032

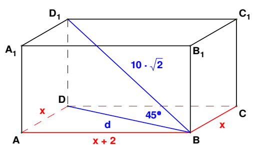
U kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ upisana je četverostrana piramida $ABCDA_1$. Ako je oplošje upisane piramide 2 dm^2, koliko je oplošje kocke (u dm^2)?

Rezultat: $O_k = \left(12 - 6 \cdot \sqrt{2}\right)\ dm^2.$

Zadatak 033 (Maturant, gimnazija)

Prostorna dijagonala kvadra dugačka je $10 \cdot \sqrt{2}$ cm, a prema ravnini osnovke priklonjena je pod kutom 45°. Ako je jedan brid osnovke za 2 cm dulji od drugog, koliki je obujam kvadra?

Rješenje 033



Uočimo pravokutan trokut DBD_1:

$$\cos 45^0 = \frac{d}{10 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow d = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^0 \Rightarrow d = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d = 10 \; cm.$$

Iz pravokutnog trokuta ABD pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$d^2 = x^2 + (x+2)^2 \Rightarrow d^2 = x^2 + x^2 + 4 \cdot x + 4 \Rightarrow 10^2 = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 4 \Rightarrow 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 4 - 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 96 = 0 \; /:2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x - 48 = 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} a = 1 \; , \; b = 2 \; , \; c = -48 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm 14}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = \dfrac{-2 + 14}{2} \\ x_2 = \dfrac{-2 - 14}{2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = \dfrac{12}{2} = 6 \\ x_2 = \dfrac{-16}{2} = -8 \; \text{nema smisla} \end{matrix} \right\}.$$

Trokut DBD_1 je pravokutan jednakokračan pa vrijedi:

$$c = |DD_1| = |DB| = d = 10 \; cm.$$

Obujam kvadra iznosi:

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} a = x + 2 \\ b = x \\ c = 10 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a = 6 + 2 \\ b = 6 \\ c = 10 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a = 8 \; cm \\ b = 6 \; cm \\ c = 10 \; cm \end{matrix} \right\} \Rightarrow V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = 8 \; cm \cdot 6 \; cm \cdot 10 \; cm = 480 \; cm^3.$$

Vježba 033

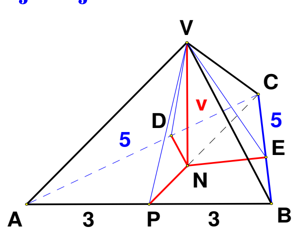
Prostorna dijagonala kvadra dugačka je $10 \cdot \sqrt{2}$ cm, a prema ravnini osnovke priklonjena je pod kutom 45°. Ako je jedan brid osnovke za 2 cm dulji od drugog, koliko je oplošje kvadra?

Rezultat: $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 376 \; cm^2$.

Zadatak 034 (Maturant, gimnazija)

Osnovka trostrane piramide je jednakokračan trokut osnovice 6 cm i kraka 5 cm. Ako pobočke piramide s bazom zatvaraju kut 45°, kolika je duljina visine piramide?

Rješenje 034



Sa slike vidi se:

$$|AB| = 6 \; , \; |BC| = |AC| = 5 \; , \; |AP| = |PB| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = 3.$$

Visina trokuta ABC na stranicu $\overline{AB}$ dobije se pomoću Pitagorina teorema:

$$|PC| = \sqrt{|BC|^2 - |PB|^2} \Rightarrow |PC| = \sqrt{25 - 9} \Rightarrow |PC| = \sqrt{16} \Rightarrow |PC| = 4.$$

Budući da pobočke piramide s bazom zatvaraju kut 45°, slijedi da su trokuti ΔDNV, ΔPNV i ΔNEV pravokutni i jednakokračni. Zato je:

$$v = |VN| = |DN| = |PN| = |EN|.$$

Točka N je središte upisane kružnice trokutu ABC pa duljina visine v iznosi:

$$P_{ABC}=v\cdot s \;\Rightarrow\; v=\frac{P_{ABC}}{s} \;\Rightarrow\; v=\frac{\frac{|AB|\cdot|PC|}{2}}{\frac{|AB|+|BC|+|CA|}{2}} \;\Rightarrow\; v=\frac{|AB|\cdot|PC|}{|AB|+2\cdot|BC|} \;\Rightarrow\; v=\frac{6\cdot 4}{6+2\cdot 5} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; v=\frac{24}{16} \;\Rightarrow\; v=\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; v=1.5\ cm.$$

Vježba 034

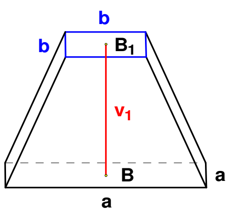
Osnovka trostrane piramide je jednakokračan trokut osnovice 6 cm i kraka 5 cm. Ako pobočke piramide s bazom zatvaraju kut 45°, koliki je obujam piramide?

Rezultat: $6\ cm^3$.

Zadatak 035 (Maturant, gimnazija)

Baza pravilne uspravne krnje piramide je kvadrat stranice 6 cm, a visina joj je 9 cm. Ako je volumen krnje piramide $273\ cm^3$, kolika je duljina stranice kvadrata gornje baze?

Rješenje 035



$$V=\frac{v_1}{3}\cdot\left[B+B_1+\sqrt{B\cdot B_1}\right] \;\Rightarrow\; V=\frac{v_1}{3}\cdot\left[a^2+b^2+\sqrt{a^2\cdot b^2}\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; V=\frac{v_1}{3}\cdot\left[a^2+b^2+a\cdot b\right] \;\Rightarrow\; 273=\frac{9}{3}\cdot\left[36+b^2+6\cdot b\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3\cdot\left[36+b^2+6\cdot b\right]=273\ /:3 \;\Rightarrow\; 36+b^2+6\cdot b=91 \;\Rightarrow\; b^2+6\cdot b-55=0 \;\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=6\ ,\ c=-55 \\ b_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; b_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 1\cdot(-55)}}{2\cdot 1} \;\Rightarrow\; b_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+220}}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{256}}{2} \;\Rightarrow\; b_{1,2}=\frac{-6\pm 16}{2} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} b_1=\dfrac{-6+16}{2} \\ b_2=\dfrac{-6-16}{2}\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} b_1=\dfrac{10}{2} \\ b_2=\dfrac{-22}{2}\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} b_1=5\ cm \\ b_2=-11\ \text{nema smisla}\end{array}\right\}.$$

Vježba 035

Baza pravilne uspravne krnje piramide je kvadrat stranice 6 cm, a visina joj je 9 cm. Ako je volumen krnje piramide $273\ cm^3$, kolika je površina gornje baze?

Rezultat: $25\ cm^2$.

Zadatak 036 (Maturant, gimnazija)

Smanjimo li svaku stranicu kvadra za 10% nađite smanjenje volumena.

Rješenje 036

Volumen kvadra iznosi: $V = a \cdot b \cdot c$.

Volumen kvadra sa smanjenim stranicama je:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=a-0.10\cdot a=0.90\cdot a \\ b_1=b-0.10\cdot b=0.90\cdot b \\ c_1=c-0.10\cdot c=0.90\cdot c\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; V_1=a_1\cdot b_1\cdot c_1 \;\Rightarrow\; V_1=0.90\cdot a\cdot 0.90\cdot b\cdot 0.90\cdot c \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; V_1=0.729\cdot a\cdot b\cdot c \;\Rightarrow\; V_1=0.729\cdot V.$$

Smanjenje volumena izraženo u postotku glasi:

$$p=\frac{V-V_1}{V}\cdot 100\% \;\Rightarrow\; p=\frac{V-0.729\cdot V}{V}\cdot 100\% \;\Rightarrow\; p=\frac{V\cdot(1-0.729)}{V}\cdot 100\% \;\Rightarrow\; p=27.1\%.$$

Vježba 036

Smanjimo li svaku stranicu kvadra za 20% nađite smanjenje volumena.

Rezultat: 48.8%.

Zadatak 037 (Carmen, ekonomska škola)

Ako dijagonalu kocke smanjimo za 10%, za koliko će se smanjiti oplošje?

Rješenje 037

Izrazimo oplošje kocke kao funkciju duljine prostorne dijagonale D:

$$\left.\begin{matrix} O=6\cdot a^{2} \\ D=a\cdot\sqrt{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} O=6\cdot a^{2} \\ a=\frac{D}{\sqrt{3}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow O=6\cdot\left(\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^{2} \Rightarrow O=6\cdot\frac{D^{2}}{3} \Rightarrow O=2\cdot D^{2}.$$

Budući da se duljina dijagonale smanjila za 10%, oplošje kocke iznosi:

$$\left.\begin{matrix} D_1=D-\frac{10}{100}\cdot D \\ O_1=2\cdot D_1^{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} D_1=D-0.10\cdot D \\ O_1=2\cdot D_1^{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} D_1=0.90\cdot D \\ O_1=2\cdot D_1^{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_1=2\cdot(0.90\cdot D)^{2} \Rightarrow O_1=1.62\cdot D^{2}.$$

1.inačica

Oplošje se smanjilo za:

$$p=\frac{O-O_1}{O}\cdot 100\% \Rightarrow p=\frac{2\cdot D^{2}-1.62\cdot D^{2}}{2\cdot D^{2}}\cdot 100\% \Rightarrow p=\frac{2\cdot D^{2}\cdot(1-0.81)}{2\cdot D^{2}}\cdot 100\% \Rightarrow p=19\%.$$

2.inačica

Oplošje se smanjilo za:

$$\left.\begin{matrix} O_1=1.62\cdot D^{2} \\ O=2\cdot D^{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} O_1=1.62\cdot D^{2} \\ D^{2}=\frac{O}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_1=1.62\cdot\frac{O}{2} \Rightarrow O_1=0.81\cdot O \Rightarrow O_1=O-0.19\cdot O \Rightarrow p=19\%.$$

Vježba 037

Ako dijagonalu kocke smanjimo za 20%, za koliko će se smanjiti oplošje?

Rezultat: 36%.

Zadatak 038 (Ivan, kemijska škola)

Brid kocke ima duljinu 2. Četiri vrha kocke, od kojih po tri ne leže na istom pravcu, određuju vrhove pravilnog tetraedra. Nađite njegovo oplošje.

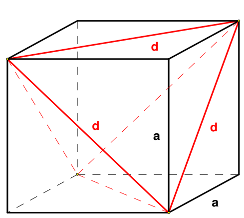
Rješenje 038

Ponovimo!

Ako je a duljina stranice kvadrata, duljina njegove dijagonale iznosi $d=a\cdot\sqrt{2}$.

Oplošje tetraedra duljine brida a je:

$$O=4\cdot\frac{a^{2}\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow O=a^{2}\cdot\sqrt{3}.$$



Sa slike vidi se da je to tetraedar kojem je osnovni brid dijagonala, kvadrata, stranice kocke $d=a\cdot\sqrt{2}$. Oplošje tetraedra iznosi:

$$O=d^{2}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow O=\left(a\cdot\sqrt{2}\right)^{2}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow O=2\cdot a^{2}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O=2\cdot 2^{2}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow O=8\cdot\sqrt{3}.$$

Vježba 038

Brid kocke ima duljinu 4. Četiri vrha kocke, od kojih po tri ne leže na istom pravcu, određuju vrhove pravilnog tetraedra. Nađite njegovo oplošje.

Rezultat: $32\cdot\sqrt{3}$.

Zadatak 039 (Ana, srednja škola)

Osnovni bridovi trostrane piramide dugi su 17, 25 i 28 cm, njezina je visina 20 cm. Sve pobočke piramide prema osnovci nagnute su pod istim kutom. Koliki je taj kut?

Rješenje 039

Ponovimo!

Ako je zadan trokut ABC sa duljinama stranica a, b i c, tada je:

- srednjica trokuta $s=\frac{a+b+c}{2}$
- površina trokuta (Heronova formula) $P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$
- polumjer trokutu upisane kružnice $r=\frac{P}{s}$.

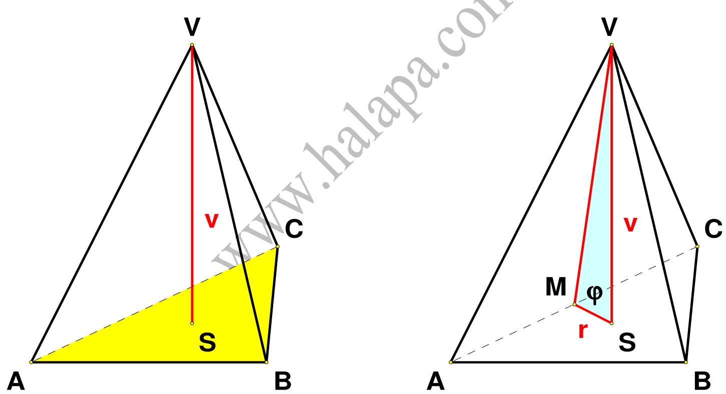
Najprije ćemo izračunati površinu baze trostrane piramide (to je trokut ABC). Budući da su osnovni bridovi trostrane piramide zadani, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a=17\ ,\ b=25\ ,\ c=28 \\ s=\frac{a+b+c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow s=\frac{17+25+28}{2} \Rightarrow s=\frac{70}{2} \Rightarrow s=35 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=17\ ,\ b=25\ ,\ c=28\ ,\ s=35 \\ P=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\sqrt{35\cdot(35-17)\cdot(35-25)\cdot(35-28)} \Rightarrow P=\sqrt{35\cdot 18\cdot 10\cdot 7} \Rightarrow P=\sqrt{44100} \Rightarrow P=210\ cm^2.$$

Polumjer upisane kružnice trokutu ABC iznosi:

$$r=\frac{P}{s} \Rightarrow r=\frac{210\ cm^2}{35\ cm} \Rightarrow r=6\ cm.$$



Uočimo pravokutan trokut MSV. Sa slike vidi se:

$$tg\,\varphi=\frac{|VS|}{|MS|} \Rightarrow tg\,\varphi=\frac{v}{r} \Rightarrow tg\,\varphi=\frac{20\ cm}{6\ cm} \Rightarrow tg\,\varphi=\frac{10}{3} \Rightarrow \varphi=tg^{-1}\left(\frac{10}{3}\right) \Rightarrow \varphi=73^{0}18'2.72''.$$

Vježba 039

Osnovni bridovi trostrane piramide dugi su 17, 25 i 28 cm, njezina je visina 27 cm. Sve pobočke piramide prema osnovci nagnute su pod istim kutom. Koliki je taj kut?

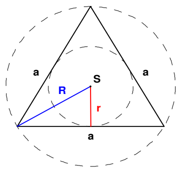
Rezultat: 77° 28' 16.3".

Zadatak 040 (Ana, srednja škola)

Osnovka piramide jednakostraničan je trokut sa stranicom duljine 12 cm. Duljina svakog bočnog brida je 13 cm. Koliki je prikloni kut bočnog brida prema ravnini osnovke piramide? Koliki su prikloni kutovi bočnih strana prema ravnini osnovke?

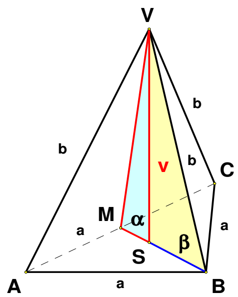
Rješenje 040

Ponovimo!



Ako je zadan jednakostraničan trokut duljine stranice a, tada je:

- polumjer upisane kružnice $r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$
- polumjer opisane kružnice $R = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$.



Sa slike vidi se:

$a = |AB| = |BC| = |CA| = 12\ ,\ b = |AV| = |BV| = |CV| = 13$

$R = |SB| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{3} = 4 \cdot \sqrt{3}\ ,\ r = |MS| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{6} = 2 \cdot \sqrt{3}$

$\alpha = \angle VMB\ ,\ \beta = \angle MBV.$

Najprije izračunamo visinu v = $|VS|$ piramide ABCV. Uočimo pravokutan trokut SBV i primijenimo Pitagorin poučak:

$$|VS|^2 = |BV|^2 - |SB|^2 \Rightarrow |VS|^2 = 13^2 - \left(4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow |VS|^2 = 169 - 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |VS|^2 = 121 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow |VS| = \sqrt{121} \Rightarrow |VS| = 11\ cm.$$

Uporabom pravokutnog trokuta SBV i funkcije kosinus dobije se β, prikloni kut bočnog brida prema ravnini osnovke piramide:

$$\cos\beta = \frac{|SB|}{|BV|} \Rightarrow \cos\beta = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{13} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{13}\right) \Rightarrow \beta = 57^0\, 47'\, 44.8''.$$

Uporabom pravokutnog trokuta MSV i funkcije tangens dobije se α, prikloni kut bočnih strana prema ravnini osnovke piramide:

$$tg\,\alpha = \frac{|VS|}{|MS|} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{11}{2 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{11}{2 \cdot \sqrt{3}}\right) \Rightarrow \alpha = 72^0\, 31'\, 11.4''.$$

Vježba 040

Osnovka piramide jednakostraničan je trokut sa stranicom duljine 12 cm. Duljina svakog bočnog brida je 13 cm. Koliki je obujam piramide?

Rezultat: $132 \cdot \sqrt{3}\ cm^3$.