Zadatak 021 (Anita, gimnazija)

Dva stošca imaju zajedničku osnovku polumjera 2. Ako se njihovi obujmovi razlikuju za 5π, za koliko se razlikuju visine?

Rješenje 021

Iz razlike obujmova slijedi razlika visina:

$$V_1 - V_2 = 5\pi \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v_1 - \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v_2 = 5\pi \;/ \cdot \frac{3}{\pi} \Rightarrow r^2 \cdot v_1 - r^2 \cdot v_2 = 15 \Rightarrow 4 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 = 15 \;/ : 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = \frac{15}{4} \Rightarrow v_1 - v_2 = 3.75.$$

Vježba 021

Dva stošca imaju zajedničku osnovku polumjera 1. Ako se njihovi obujmovi razlikuju za 5π, za koliko se razlikuju visine?

Rezultat: 15.

Zadatak 022 (Anita, gimnazija)

Žica od volframa duljine 1 m debljine 1 mm pretopljena je u nit žarulje debljine 0.01 mm. Izrazite duljinu niti u kilometrima.

Rješenje 022

Žica ima oblik valjka čiji se obujam računa po formuli:

$$V = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot v,$$

gdje je d promjer (debljina) žice, v duljina žice. Zato je:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{\left(10^{-3}\ m\right)^2 \cdot \pi}{4} \cdot 1\ m = \frac{\left(10^{-5}\ m\right)^2 \cdot \pi}{4} \cdot v \;/ \cdot \frac{4}{\pi} \Rightarrow 10^{-6}\ m^2 \cdot 1\ m = 10^{-10}\ m^2 \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{10^{-6}\ m^3}{10^{-10}\ m^2} = 10^4\ m = 10\ km.$$

Vježba 022

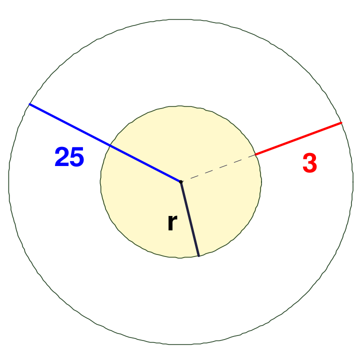
Žica od volframa duljine 10 m debljine 1 mm pretopljena je u nit žarulje debljine 0.01 mm. Izrazite duljinu niti u kilometrima.

Rezultat: 100 km.

Zadatak 023 (Anita, gimnazija)

Šuplju metalnu kuglu vanjskog polumjera 25 i debljine 3 treba pretopiti u punu kuglu. Nađite polumjer pune kugle.

Rješenje 023



Polumjer vanjske kugle je 25, a šupljine 25 – 3 = 22. Tada je volumen šuplje kugle jednak:

$$V = \frac{4}{3} \cdot 25^3 \cdot \pi - \frac{4}{3} \cdot 22^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(25^3 - 22^3\right) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4977 = 6636 \cdot \pi.$$

Polumjer pune kugle dobivene nakon pretapanja iznosi:

$$\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = 6636 \cdot \pi \;/ \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi} \Rightarrow r^3 = 4977 \;/ \sqrt[3]{\ } \Rightarrow r = \sqrt[3]{4977} = 17.07.$$

Vježba 023

Šuplju metalnu kuglu vanjskog polumjera 25 i debljine 3 treba pretopiti u punu kuglu. Nađite promjer pune kugle.

Rezultat: 34.14.

Zadatak 024 (Anita, gimnazija)

Koliko dugo vlakno promjera 2 mm dobijemo od rastaljene plastične mase obujma V = 24π cm³?

Rješenje 024

Polumjer vlakna iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} d = 2\ mm \\ d = 2 \cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow r = 1\ mm.$$

Budući da vlakno ima oblik valjka čiji je obujam (volumen) $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$, duljina h vlakna je:

$$\left.\begin{array}{l} V = 24\pi\ cm^3 = 24000\pi\ mm^3 \\ V = r^2 \cdot \pi \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h = 24000\pi \ /:\pi \Rightarrow r^2 \cdot h = 24000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1^2 \cdot h = 24000 \Rightarrow h = 24000\ mm = 24\ m.$$

Vježba 024

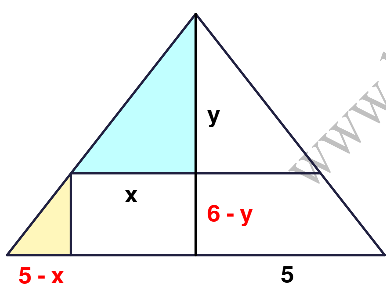
Koliko dugo vlakno promjera 2 mm dobijemo od rastaljene plastične mase obujma V = 12π cm³?

Rezultat: 12 m.

Zadatak 025 (Ivan, gimnazija)

Stožac ima polumjer osnovke R = 5 i visinu h = 6. Na kojoj udaljenosti od osnovke treba povući ravninu usporednu osnovki tako da stožac bude podijeljen na dva dijela jednakih obujmova?

Rješenje 025



Iz sličnosti obojenih trokuta dobiva se razmjer:

$$(5 - x) : (6 - y) = x : y \Rightarrow y \cdot (5 - x) = x \cdot (6 - y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot y - x \cdot y = 6 \cdot x - x \cdot y \Rightarrow 5 \cdot y = 6 \cdot x \Rightarrow x = \frac{5}{6} \cdot y.$$

Budući da stožac mora biti podijeljen na dva dijela jednakih obujmova, vrijedi da je obujam manjeg stošca jednak polovici obujma većeg stošca:

$$\frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \pi \cdot y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \pi \cdot 6\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot y\right)^2 \cdot \pi \cdot y = \frac{1}{6} \cdot 25 \cdot \pi \cdot 6 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{25}{36} \cdot y^3 \cdot \pi = 25 \cdot \pi \ / \cdot \frac{1}{25 \cdot \pi} \Rightarrow \frac{1}{108} \cdot y^3 = 1 \Rightarrow y^3 = 108 \ / \sqrt[3]{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{108} \approx 4.76.$$

Udaljenost od osnovke iznosi:

$$6 - y = 6 - 4.76 \approx 1.24.$$

Vježba 025

Stožac ima polumjer osnovke R = 4 i visinu h = 8. Na kojoj udaljenosti od osnovke treba povući ravninu usporednu osnovki tako da stožac bude podijeljen na dva dijela jednakih obujmova?

Rezultat: 1.65.

Zadatak 026 (Matija, gimnazija)

Zadan je trokut sa stranicama a = 3, b = 4 i c = 5. Tri kugle koje dodiruju ravninu trokuta u vrhovima A, B i C dodiruju se međusobno. Nađite omjer obujmova najveće i najmanje kugle.

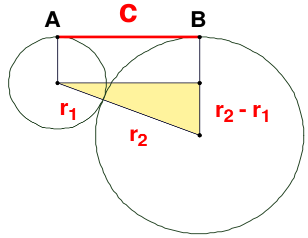
Rješenje 026

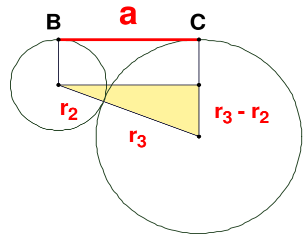
Neka je:

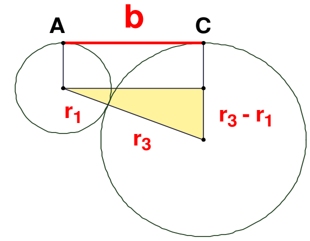
- r_1 polumjer kugle koja dodiruje ravninu trokuta ABC u vrhu A

- r_2 polumjer kugle koja dodiruje ravninu trokuta ABC u vrhu B
- r_3 polumjer kugle koja dodiruje ravninu trokuta ABC u vrhu C.

Odredimo vezu između polumjera kugala i stranica trokuta:







$$(r_1+r_2)^2=(r_2-r_1)^2+c^2 \qquad (r_2+r_3)^2=(r_3-r_2)^2+a^2 \qquad (r_1+r_3)^2=(r_3-r_1)^2+b^2$$

Iz dobivenih jednakosti slijedi:

$$\left.\begin{aligned}(r_1+r_2)^2&=(r_2-r_1)^2+c^2\\(r_2+r_3)^2&=(r_3-r_2)^2+a^2\\(r_1+r_3)^2&=(r_3-r_1)^2+b^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}r_1^2+2\cdot r_1\cdot r_2+r_2^2&=r_2^2-2\cdot r_1\cdot r_2+r_1^2+c^2\\r_2^2+2\cdot r_2\cdot r_3+r_3^2&=r_3^2-2\cdot r_2\cdot r_3+r_2^2+a^2\\r_1^2+2\cdot r_1\cdot r_3+r_3^2&=r_3^2-2\cdot r_1\cdot r_3+r_1^2+b^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}4\cdot r_1\cdot r_2&=c^2\\4\cdot r_2\cdot r_3&=a^2\\4\cdot r_1\cdot r_3&=b^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{pomnožimo sve}\\\text{tri jednakosti}\end{bmatrix}\Rightarrow 64\cdot r_1^2\cdot r_2^2\cdot r_3^2=a^2\cdot b^2\cdot c^2\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow 8\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3=a\cdot b\cdot c\Rightarrow 8\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3=3\cdot 4\cdot 5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1\cdot r_2\cdot r_3=\frac{60}{8}=\frac{15}{2}.$$

Tražimo polumjer kugala (na primjer polumjer r_3):

$$\left.\begin{aligned}r_1\cdot r_2\cdot r_3&=\frac{15}{2}\\4\cdot r_1\cdot r_2&=c^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}r_1\cdot r_2\cdot r_3&=\frac{15}{2}\\4\cdot r_1\cdot r_2&=25\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{podijelimo}\\\text{jednakosti}\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{r_1\cdot r_2\cdot r_3}{4\cdot r_1\cdot r_2}=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{25}{1}}\Rightarrow\frac{r_3}{4}=\frac{15}{50}\ /\cdot 4\Rightarrow r_3=\frac{60}{50}=\frac{6}{5}.$$

Polumjer r_2 iznosi:

$$\left.\begin{aligned}4\cdot r_2\cdot r_3&=a^2\\r_3&=\frac{6}{5}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}4\cdot r_2\cdot r_3&=9\\r_3&=\frac{6}{5}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4\cdot r_2\cdot\frac{6}{5}=9\Rightarrow\frac{24}{5}\cdot r_2=9\ /\cdot\frac{5}{24}\Rightarrow r_2=\frac{45}{24}=\frac{15}{8}.$$

Polumjer r_1 je jednak:

$$\left.\begin{aligned}4\cdot r_1\cdot r_2&=c^2\\r_2&=\frac{15}{8}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}4\cdot r_1\cdot r_2&=25\\r_2&=\frac{15}{8}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 4\cdot r_1\cdot\frac{15}{8}=25\Rightarrow\frac{60}{8}\cdot r_1=25\ /\cdot\frac{8}{60}\Rightarrow r_1=\frac{200}{60}=\frac{10}{3}.$$

Omjer obujmova najveće i najmanje kugle glasi:

$$V_1:V_3=\left(\frac{4}{3}\cdot r_1^3\cdot\pi\right):\left(\frac{4}{3}\cdot r_3^3\cdot\pi\right)=r_1^3:r_3^3=(r_1:r_3)^3=\left(\frac{10}{3}:\frac{6}{5}\right)^3=\left(\frac{10}{3}\cdot\frac{5}{6}\right)^3=\left(\frac{25}{9}\right)^3=\frac{15\,625}{729}=15\,625:729.$$

Vježba 026

Zadan je trokut sa stranicama a = 3, b = 4 i c = 5. Tri kugle koje dodiruju ravninu trokuta u vrhovima A, B i C dodiruju se međusobno. Nađite omjer obujmova najmanje i najveće kugle.

Rezultat: $V_3:V_1=729:15\,625.$

Zadatak 027 (Tajanstvena, ekonomska škola)

Komad leda volumena 1 dm^3 stavimo u lonac oblika valjka polumjera baze 1 dm i rastalimo. Ako se prilikom taljenja volumen leda smanji za 10%, koliko će približno biti visina vode u loncu?

Rješenje 027

$V_l = 1\ dm^3 = 1000\ cm^3, \quad r = 1\ dm = 10\ cm, \quad v = ?$

Budući da se volumen leda smanjio za 10%, volumen vode u loncu (valjkastoj posudi) bit će:

$$V = V_l - \frac{10}{100} \cdot V_l = V_l \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = V_l \cdot \frac{90}{100} = 1000\ cm^3 \cdot \frac{90}{100} = 900\ cm^3.$$

Iz formule za volumen valjka dobije se visina vode u loncu:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow v = \frac{V}{r^2 \cdot \pi} = \frac{900\ cm^3}{(10\ cm)^2 \cdot 3.14} \approx 2.87\ cm.$$

Vježba 027

Komad leda volumena 2 dm^3 stavimo u lonac oblika valjka polumjera baze 1 dm i rastalimo. Ako se prilikom taljenja volumen leda smanji za 10%, koliko će približno biti visina vode u loncu?

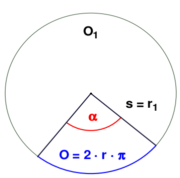
Rezultat: 5.73 cm.

Zadatak 028 (Anita, gimnazija)

Polumjer osnovke stošca je 12 cm i izvodnice 40 cm. Koliki je kut pri vrhu razmotanog plašta stošca?

Rješenje 028

$$r = 12\ cm, \quad r_1 = 40\ cm, \quad O = 2 \cdot r \cdot \pi, \quad O_1 = 2 \cdot r_1 \cdot \pi, \quad \alpha = ?$$



$$O : O_1 = \alpha : 360^0 \Rightarrow \alpha \cdot O_1 = O \cdot 360^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{O \cdot 360^0}{O_1} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot 360^0}{2 \cdot r_1 \cdot \pi} = \frac{r \cdot 360^0}{r_1} = \frac{12\ cm \cdot 360^0}{40\ cm} = 108^0.$$

Vježba 028

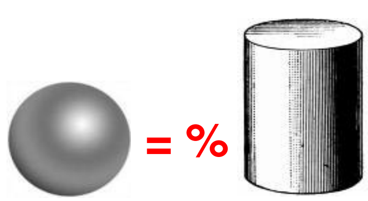
Polumjer osnovke stošca je 8 cm i izvodnice 40 cm. Koliki je kut pri vrhu razmotanog plašta stošca?

Rezultat: 72º.

Zadatak 029 (Anita, gimnazija)

Tekući sadržaj napunjene kugle polumjera r = 3 prelije se u uspravni kružni valjak polumjera r = 3 i visine h = 5. Koliki postotak obujma valjka ispunjuje prelivena tekućina?

Rješenje 029



$$\left.\begin{array}{l} \text{kugla},\ r = 3 \\ V_k = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array}\right\} \Rightarrow V_k = \frac{4}{3} \cdot 3^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot 27 \cdot \pi = 36 \cdot \pi.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{valjak},\ r = 3,\ h = 5 \\ V_v = r^2 \cdot \pi \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow V_v = 3^2 \cdot \pi \cdot 5 = 45 \cdot \pi.$$

Postotak iznosi:

$$\frac{V_k}{V_v} \cdot 100\% = \frac{36 \cdot \pi}{45 \cdot \pi} \cdot 100\% = 80\%.$$

Vježba 029

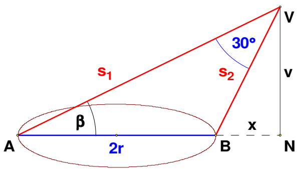
Tekući sadržaj napunjene kugle polumjera r = 3 prelije se u uspravni kružni valjak polumjera r = 3 i visine h = 10. Koliki postotak obujma valjka ispunjuje prelivena tekućina?

Rezultat: 40%.

Zadatak 030 (Mira, gimnazija)

Najkraća i najdulja izvodnica kosog stošca duge su 6 i $6\cdot\sqrt{3}$ cm i zatvaraju kut 30°. Izračunaj obujam stošca.

Rješenje 030



$s_1 = |VA| = 6\cdot\sqrt{3}$, $s_2 = |VB| = 6$, $|VN| = v$,

$|AB| = 2\cdot r$, $|BN| = x$

Da bismo izračunali obujam kosog stošca moramo znati polumjer r njegove baze i visinu v.
Iz trokuta ABV pomoću kosinusovog poučka dobije se polumjer r:

$$\left.\begin{array}{l}\text{kosinusov poučak}\\ a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow |AB|^2=|VA|^2+|VB|^2-2\cdot|VA|\cdot|VB|\cdot\cos 30^0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\cdot r)^2=\left(6\cdot\sqrt{3}\right)^2+6^2-2\cdot 6\cdot\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 4\cdot r^2=108+36-108\Rightarrow 4\cdot r^2=36\ /:4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2=9\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow r=3\ (\text{polumjer baze})\Rightarrow |AB|=2\cdot r=6.$$

Duljinu visine izračunat ćemo na dva načina kako bismo impresionirali profesora  .

1.inačica

Na slici uočimo dva pravokutna trokuta ΔANV i ΔBNV. Uporabom Pitagorina poučka za visinu v vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}v^2=|VA|^2-|AN|^2\\ v^2=|VB|^2-|BN|^2\end{array}\right\}\Rightarrow |VA|^2-|AN|^2=|VB|^2-|BN|^2\Rightarrow\left(6\cdot\sqrt{3}\right)^2-\left(|AB|+|BN|\right)^2=6^2-x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(6\cdot\sqrt{3}\right)^2-(6+x)^2=6^2-x^2\Rightarrow 108-36-12\cdot x-x^2=36-x^2\Rightarrow -12\cdot x=36-108+36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12\cdot x=-36\ /:(-12)\Rightarrow x=3.$$

Duljina visine v jednaka je:

$$v^2=|VB|^2-|BN|^2\Rightarrow v^2=6^2-3^2\Rightarrow v^2=27\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow v=\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 3}=3\cdot\sqrt{3}.$$

2.inačica

Promatrajmo trokut ABV. Budući da je $|VB| = 6 = |AB|$, slijedi da je trokut jednakokračan pa je kut β jednak:

$$\beta=\angle VAB=30^0.$$

Pomoću pravokutnog trokuta VAN dobije se visina v:

$$\sin\beta=\frac{|VN|}{|VA|}\Rightarrow\sin\beta=\frac{v}{6\cdot\sqrt{3}}\Rightarrow v=6\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 30^0=6\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=3\cdot\sqrt{3}.$$

Obujam kosog stošca iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}r=3\ ,\ v=3\cdot\sqrt{3}\\ V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v\end{array}\right\}\Rightarrow V=\frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot\pi\cdot 3\cdot\sqrt{3}=9\cdot\pi\cdot\sqrt{3}.$$

Vježba 030

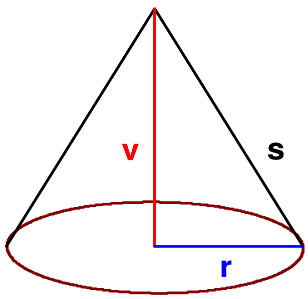
Najkraća i najdulja izvodnica kosog stošca duge su 6 i $6\cdot\sqrt{3}$ cm i zatvaraju kut 30°. Izračunaj visinu stošca.

Rezultat: $v=3\cdot\sqrt{3}.$

Zadatak 031 (Dado, tehnička škola)

Visina i izvodnica stošca odnose se kao 3 : 5. Ako je oplošje stošca 144 · π cm², koliko iznosi obujam (volumen)?

Rješenje 031



$$v : s = 3 : 5 \Rightarrow 5 \cdot v = 3 \cdot s \Rightarrow v = \frac{3}{5} \cdot s.$$

Računamo polumjer r osnovke (baze):

$$r = \sqrt{s^2 - v^2} \Rightarrow r = \sqrt{s^2 - \left(\frac{3}{5} \cdot s\right)^2} \Rightarrow r = \sqrt{s^2 - \frac{9}{25} \cdot s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{16}{25} \cdot s^2} \Rightarrow r = \frac{4}{5} \cdot s.$$

Iz oplošja stošca dobije se duljina izvodnice:

$$O = r \cdot \pi \cdot (r + s) \Rightarrow 144 \cdot \pi = \frac{4}{5} \cdot s \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot s + s\right) \Rightarrow 144 \cdot \pi = \frac{4}{5} \cdot s \cdot \pi \cdot \frac{9}{5} \cdot s \Rightarrow 144 \cdot \pi = \frac{36}{25} \cdot \pi \cdot s^2 \; /:\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 144 = \frac{36}{25} \cdot s^2 \Rightarrow s^2 = \frac{144 \cdot 25}{36} \; /\sqrt{\;} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{144 \cdot 25}{36}} \Rightarrow s = \frac{12 \cdot 5}{6} \Rightarrow s = 10 \Rightarrow \left.\begin{matrix} v = \frac{3}{5} \cdot 10 \\ r = \frac{4}{5} \cdot 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} v = 6 \; cm \\ r = 8 \; cm \end{matrix}\right\}.$$

Obujam stošca iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (8 \; cm)^2 \cdot \pi \cdot 6 \; cm \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 64 \; cm^2 \cdot \pi \cdot 6 \; cm \Rightarrow V = 128 \cdot \pi \; cm^3.$$

Vježba 031

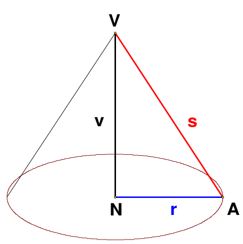
Visina i izvodnica stošca odnose se kao 3 : 5. Ako je oplošje stošca 324 · π cm², koliko iznosi obujam (volumen)?

Rezultat: 432 · π cm³.

Zadatak 032 (Maturant, gimnazija)

Površina plašta stošca triput je veća od površine baze stošca. Ako stožac ima obujam 9 · π, nađite visinu stošca.

Rješenje 032



Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$r \cdot \pi \cdot s = 3 \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow r \cdot \pi \cdot s = 3 \cdot r^2 \cdot \pi \; / \cdot \frac{1}{r \cdot \pi} \Rightarrow s = 3 \cdot r.$$

Uočimo pravokutan trokut NAV. Pomoću Pitagorina poučka dobije se:

$$s^2 = r^2 + v^2 \Rightarrow (3 \cdot r)^2 = r^2 + v^2 \Rightarrow 9 \cdot r^2 = r^2 + v^2 \Rightarrow 8 \cdot r^2 = v^2 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{8} \cdot v^2.$$

Visina stošca iznosi:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow 9 \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot v^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow 9 \cdot \pi = \frac{1}{24} \cdot \pi \cdot v^3 \; / \cdot \frac{24}{\pi} \Rightarrow v^3 = 216 \; /\sqrt[3]{\;} \Rightarrow v = \sqrt[3]{216} \Rightarrow v = 6 \; cm.$$

Vježba 032

Površina plašta stošca triput je veća od površine baze stošca. Ako stožac ima obujam 243 · π, nađite visinu stošca.

Rezultat: 18 cm.

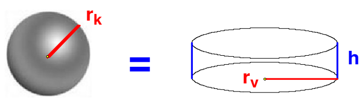
Zadatak 033 (Ana, srednja škola)

U valjkastu posudu polumjera osnovke 6 cm i visine 10 cm spustimo metalnu kuglicu promjera 6 cm. Do koje bi najmanje visine morala biti voda u posudi kako bi se cijela kuglica nakon uranjanja našla pod vodom?

Rješenje 033

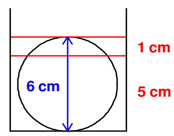
$r_v = 6$ cm, $2 \cdot r_k = 6$ cm => $r_k = 3$ cm, $h = ?$

Kada bismo metalnu kuglicu polumjera r_k pretopili u valjkastu posudu polumjera osnovke r_v, visina h tog valjka iznosila bi:



$$V_k = V_v \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot r_k^3 \cdot \pi = r_v^2 \cdot \pi \cdot h \,/ \cdot \frac{1}{r_v^2 \cdot \pi} \Rightarrow h = \frac{4 \cdot r_k^3}{3 \cdot r_v^2} = \frac{4 \cdot (3\ cm)^3}{3 \cdot (6\ cm)^2} = 1\ cm.$$

Znači, kada se kuglica uroni, razina vode u valjkastoj posudi poveća se za 1 cm. Budući da je promjer kugle 6 cm, u posudi bi moralo biti vode do visine 5 cm kako bi se cijela kugla nakon uranjanja našla pod vodom.



Vježba 033

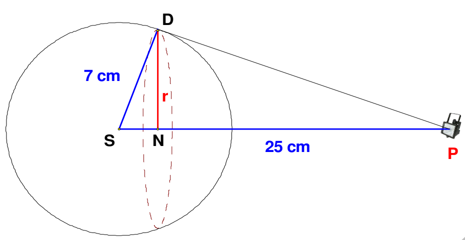
U valjkastu posudu polumjera osnovke 12 cm i visine 10 cm spustimo metalnu kuglicu promjera 12 cm. Do koje bi najmanje visine morala biti voda u posudi kako bi se cijela kuglica nakon uranjanja našla pod vodom?

Rezultat: 10 cm.

Zadatak 034 (Ana, srednja škola)

Kugla polumjera 7 cm osvijetljena je svjetlošću čiji je izvor u točki P udaljenoj od središta kugle 25 cm. Izračunaj duljinu granične crte između osvijetljenog i neosvijetljenog područja na kugli.

Rješenje 034



Sa slike vidi se:

$|SD| = 7$ cm , $|DN| = r$, $|SP| = 25$ cm.

Uočimo pravokutan trokut SPD i pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu katete $|DP|$:

$$|DP|^2 = |SP|^2 - |SD|^2 \Rightarrow |DP|^2 = 25^2 - 7^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |DP|^2 = 625 - 49 \Rightarrow |DP|^2 = 576 \,/ \sqrt{\ } \Rightarrow |DP| = 24\ cm.$$

Sada računamo duljinu $|ND| = r$. To je polumjer kružnice koja je granična crta između osvijetljenog i neosvijetljenog područja na kugli.

1.inačica

Trokuti ΔSND i ΔSPD su slični (jer imaju iste kutove) pa vrijedi razmjer:

$$|SD| : |ND| = |SP| : |DP| \Rightarrow 7 : r = 25 : 24 \Rightarrow 25 \cdot r = 7 \cdot 24 \Rightarrow r = \frac{7 \cdot 24}{25} \Rightarrow r = 6.72\ cm.$$

2.inačica

Površinu pravokutnog trokuta SPD možemo izračunati na dva načina:

$$\frac{|SD| \cdot |DP|}{2} = \frac{|SP| \cdot |ND|}{2} \Rightarrow \frac{7 \cdot 24}{2} = \frac{25 \cdot r}{2} \,/ \cdot \frac{2}{25} \Rightarrow r = \frac{7 \cdot 24}{25} \Rightarrow r = 6.72\ cm.$$

Opseg kružnice (granične crte između osvijetljenog i neosvijetljenog područja na kugli) iznosi:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \Rightarrow O = 2 \cdot 6.72\ cm \cdot \pi \Rightarrow O = 13.44 \cdot \pi\ cm.$$

Vježba 034

Kugla promjera 14 cm osvijetljena je svjetlošću čiji je izvor u točki P udaljenoj od središta kugle 0.25m. Izračunaj duljinu granične crte između osvijetljenog i neosvijetljenog područja na kugli.

Rezultat: 13.44 · π cm.

Zadatak 035 (Los-Habalos, gimnazija)

Najkraća i najduža izvodnica stošca $a = 2 \cdot \sqrt{2}$ i $b = 6$ zatvaraju kut 45°. Nađite površinu baze stošca.

Rješenje 035

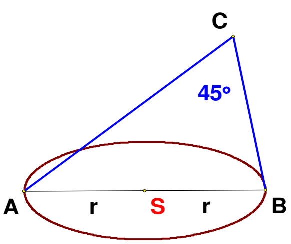
Ponovimo!

Kosinusov poučak

Ako su a, b i c duljine stranica, a α, β i γ nasuprotni kutovi kosokutnog trokuta, tada je:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \ , \ b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \ , \ c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

Sa slike vidi se:



$$a = 2 \cdot \sqrt{2} \quad , \quad b = 6 \quad , \quad |AB| = 2 \cdot r.$$

Uporabom poučka o kosinusima lako se izračuna polumjer baze stošca (baza je krug polumjera r):

$$(2 \cdot r)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 45^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot r^2 = \left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos 45^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot r^2 = 8 + 36 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 4 \cdot r^2 = 8 + 36 - 12 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 4 \cdot r^2 = 44 - 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot r^2 = 20 \ /:4 \Rightarrow r^2 = 5.$$

Površina baze stošca iznosi:

$$P = r^2 \cdot \pi \Rightarrow P = 5 \cdot \pi.$$

Vježba 035

Najkraća i najduža izvodnica stošca $a = 2 \cdot \sqrt{2}$ i $b = 6$ zatvaraju kut 45°. Nađite opseg baze stošca.

Rezultat: $2 \cdot \sqrt{5} \cdot \pi.$

Zadatak 036 (Anita, gimnazija)

Polumjeri baza triju valjaka, visine h = 2, odnose se kao 1 : 2 : 3. Ako je zbroj njihovih volumena 112 · π, nađi polumjer baze najvećeg valjka.

Rješenje 036

h = 2, $r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 2 : 3$, V = 112 · π, $r_3 = ?$

$$\left.\begin{array}{l} r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 2 : 3 \\ V_1 + V_2 + V_3 = V \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1 = k \ , \ r_2 = 2 \cdot k \ , \ r_3 = 3 \cdot k \\ r_1^2 \cdot \pi \cdot h + r_2^2 \cdot \pi \cdot h + r_3^2 \cdot \pi \cdot h = 112 \cdot \pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1 = k \ , \ r_2 = 2 \cdot k \ , \ r_3 = 3 \cdot k \\ r_1^2 \cdot \pi \cdot 2 + r_2^2 \cdot \pi \cdot 2 + r_3^2 \cdot \pi \cdot 2 = 112 \cdot \pi \ /:(2 \cdot \pi) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1 = k \ , \ r_2 = 2 \cdot k \ , \ r_3 = 3 \cdot k \\ r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 56 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 + (2 \cdot k)^2 + (3 \cdot k)^2 = 56 \Rightarrow k^2 + 4 \cdot k^2 + 9 \cdot k^2 = 56 \Rightarrow 14 \cdot k^2 = 56 \ /:14 \Rightarrow k^2 = 4 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow k = 2.$$

Polumjer baze najvećeg valjka iznosi:

$$r_3 = 3 \cdot k \Rightarrow r_3 = 3 \cdot 2 \Rightarrow r_3 = 6.$$

Vježba 036

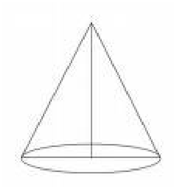
Polumjeri baza triju valjaka, visine h = 2, odnose se kao 1 : 2 : 3. Ako je zbroj njihovih volumena 112 · π, nađi polumjer baze najmanjeg valjka.

Rezultat: $r_1 = 2.$

Zadatak 037 (Sanela, gimnazija)

Polumjer osnovke stošca je 5. Za koliko treba povećati visinu stošca da se njegov obujam uveća za 50 · π?

Rješenje 037



$$\left.\begin{array}{l} V_1=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v \\ V_2=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot(v+x) \\ V_2=V_1+50\cdot\pi \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_1=\frac{1}{3}\cdot 5^2\cdot\pi\cdot v \\ V_2=\frac{1}{3}\cdot 5^2\cdot\pi\cdot(v+x) \\ V_2=V_1+50\cdot\pi \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_1=\frac{1}{3}\cdot 25\cdot\pi\cdot v \\ V_2=\frac{1}{3}\cdot 25\cdot\pi\cdot(v+x) \\ V_2=V_1+50\cdot\pi \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\cdot 25\cdot\pi\cdot(v+x)=\frac{1}{3}\cdot 25\cdot\pi\cdot v+50\cdot\pi\ /\cdot\frac{3}{25\cdot\pi} \Rightarrow v+x=v+6 \Rightarrow x=6.$$

Vježba 037

Polumjer osnovke stošca je 10. Za koliko treba povećati visinu stošca da se njegov obujam uveća za $200\cdot\pi$?

Rezultat: x = 6.

Zadatak 038 (Deny, srednja škola)

Oplošje valjka iznosi $112\cdot\pi$, a duljine polumjera r i visine v odnose se kao 2 : 5. Izračunajte obujam valjka.

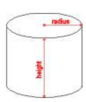
Rješenje 038

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} r:v=2:5 \\ O=2\cdot r\cdot\pi\cdot(r+v) \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot r=2\cdot v \\ 112\cdot\pi=2\cdot r\cdot\pi\cdot(r+v)\ /\cdot\frac{1}{2\cdot\pi} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} v=\frac{5}{2}\cdot r \\ 56=r\cdot(r+v) \end{array}\right\}\Rightarrow 56=r\cdot\left(r+\frac{5}{2}\cdot r\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 56=r\cdot\frac{7}{2}\cdot r \Rightarrow \frac{7}{2}\cdot r^2=56\ /\cdot\frac{2}{7} \Rightarrow r^2=16\ /\sqrt{\ } \Rightarrow r=4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=4 \\ v=\frac{5}{2}\cdot r \end{array}\right\}\Rightarrow v=\frac{5}{2}\cdot 4 \Rightarrow v=10.$$

Obujam valjka iznosi:



$$\left.\begin{array}{l} r=4\ ,\ v=10 \\ V=r^2\cdot\pi\cdot v \end{array}\right\}\Rightarrow V=4^2\cdot\pi\cdot 10 \Rightarrow V=160\cdot\pi.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} r:v=2:5 \\ O=2\cdot r\cdot\pi\cdot(r+v) \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=2\cdot x\ ,\ v=5\cdot x \\ 112\cdot\pi=2\cdot r\cdot\pi\cdot(r+v)\ /\cdot\frac{1}{2\cdot\pi} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=2\cdot x\ ,\ v=5\cdot x \\ 56=r\cdot(r+v) \end{array}\right\}\Rightarrow 56=2\cdot x\cdot(2\cdot x+5\cdot x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 56=2\cdot x\cdot 7\cdot x \Rightarrow 14\cdot x^2=56\ /:14 \Rightarrow x^2=4\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x=2.$$

Obujam valjka iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x=2\ ,\ r=2\cdot x\ ,\ v=5\cdot x \\ V=r^2\cdot\pi\cdot v \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=2\cdot 2\ ,\ v=5\cdot 2 \\ V=r^2\cdot\pi\cdot v \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=4\ ,\ v=10 \\ V=r^2\cdot\pi\cdot v \end{array}\right\}\Rightarrow V=4^2\cdot\pi\cdot 10 \Rightarrow V=160\cdot\pi.$$

Ili

$$\left.\begin{array}{l} x=2\ ,\ r=2\cdot x\ ,\ v=5\cdot x \\ V=r^2\cdot\pi\cdot v \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ V=(2\cdot x)^2\cdot\pi\cdot 5\cdot x \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ V=4\cdot x^2\cdot\pi\cdot 5\cdot x \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ V=20\cdot x^3\cdot\pi \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=20\cdot 2^3\cdot\pi \Rightarrow V=160\cdot\pi.$$

Vježba 038

Oplošje valjka iznosi $112\cdot\pi$, a duljine polumjera i visine odnose se kao 4 : 10. Izračunajte obujam valjka.

Rezultat: $160\cdot\pi$.

Zadatak 039 (Sanela, Anamarija, maturantice gimnazije)

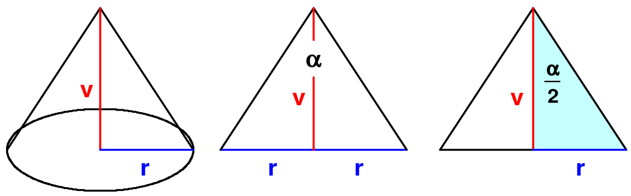
Volumen (obujam) uspravnog kružnog stošca je $27 \cdot \pi$ cm^3. Izračunaj kut pri vrhu osnog presjeka ako je visina stošca v = 3 cm.

Rješenje 039

Iz formule za obujam (volumen) stošca izračunamo polumjer njegove osnovke (baza je krug polumjera r):

$$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v \Rightarrow 27\cdot\pi=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot 3 \Rightarrow 27\cdot\pi=r^2\cdot\pi \;/:\pi \Rightarrow r^2=27 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow r=\sqrt{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{bmatrix} \Rightarrow r=\sqrt{9\cdot 3} \Rightarrow r=3\cdot\sqrt{3}\ cm.$$



Uočimo pravokutan trokut pri osnom presjeku kojemu su katete visina v i polumjer r:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{v} \Rightarrow tg\frac{\alpha}{2}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=tg^{-1}\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}=60^0 \Rightarrow \alpha=120^0.$$

Vježba 039

Volumen (obujam) uspravnog kružnog stošca je $54 \cdot \pi$ cm^3. Izračunaj kut pri vrhu osnog presjeka ako je visina stošca v = 6 cm.

Rezultat: 81° 46'.

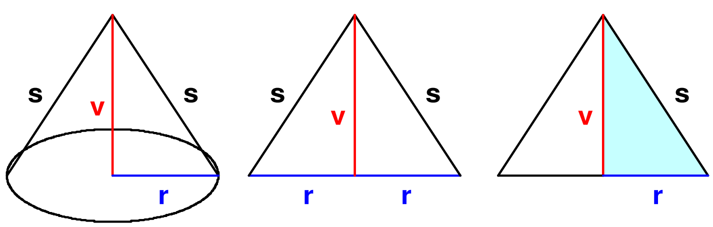
Zadatak 040 (Anamarija, Sanela, maturantice gimnazije)

Izračunaj volumen (obujam) stošca ako mu je oplošje $144 \cdot \pi$ cm^2, a duljine visine v i izvodnice s odnose se kao 3 : 5.

Rješenje 040

1.inačica

$$\left.\begin{matrix} v:s=3:5 \\ O=r\cdot\pi\cdot(r+s)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5\cdot v=3\cdot s \\ 144\cdot\pi=r\cdot\pi\cdot(r+s) \;/:\pi\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} s=\frac{5}{3}\cdot v \\ 144=r\cdot(r+s)\end{matrix}\right\}.$$



Iz osjenčanog pravokutnog trokuta pomoću Pitagorina poučka izračunamo (izrazimo) polumjer r baze kao funkciju visine v:

$$\left.\begin{matrix} s=\frac{5}{3}\cdot v \\ s^2=v^2+r^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\cdot v\right)^2=v^2+r^2 \Rightarrow \frac{25}{9}\cdot v^2-v^2=r^2 \Rightarrow \frac{16}{9}\cdot v^2=r^2 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow r=\frac{4}{3}\cdot v.$$

Računamo duljinu visine v i polumjera r:

$$\left.\begin{matrix} s=\frac{5}{3}\cdot v\ ,\ r=\frac{4}{3}\cdot v \\ 144=r\cdot(r+s)\end{matrix}\right\} \Rightarrow 144=\frac{4}{3}\cdot v\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot v+\frac{5}{3}\cdot v\right) \Rightarrow 144=\frac{4}{3}\cdot v\cdot\frac{9}{3}\cdot v \Rightarrow 144=4\cdot v^2 \Rightarrow 4\cdot v^2=144 \;/:4 \Rightarrow$$

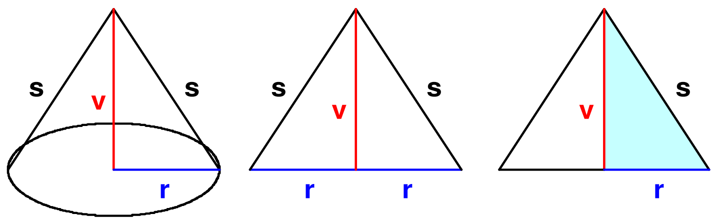
$$\Rightarrow v^2 = 36 \;/\sqrt{} \;\Rightarrow v = 6\ cm \Rightarrow \left.\begin{matrix} v = 6\ cm \\ r = \frac{4}{3}\cdot v \end{matrix}\right\} \Rightarrow r = \frac{4}{3}\cdot 6\ cm \Rightarrow r = 8\ cm.$$

Obujam (volumen) stošca iznosi:

$$\left.\begin{matrix} r = 8\ cm\ ,\ v = 6\ cm \\ V = \frac{1}{3}\cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \end{matrix}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot (8\ cm)^2 \cdot \pi \cdot 6\ cm \Rightarrow V = 128 \cdot \pi\ cm^3.$$

2.inačica

$$\left.\begin{matrix} v : s = 3 : 5 \\ O = r \cdot \pi \cdot (r + s) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} v = 3 \cdot x\ ,\ s = 5 \cdot x \\ 144 \cdot \pi = r \cdot \pi \cdot (r + s) \;/:\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} v = 3 \cdot x\ ,\ s = 5 \cdot x \\ 144 = r \cdot (r + s) \end{matrix}\right\}.$$



Iz osjenčanog pravokutnog trokuta pomoću Pitagorina poučka izračunamo (izrazimo) polumjer r baze kao funkciju od x:

$$\left.\begin{matrix} v = 3 \cdot x\ ,\ s = 5 \cdot x \\ s^2 = v^2 + r^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (5 \cdot x)^2 = (3 \cdot x)^2 + r^2 \Rightarrow 25 \cdot x^2 = 9 \cdot x^2 + r^2 \Rightarrow 25 \cdot x^2 - 9 \cdot x^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 16 \cdot x^2 \;/\sqrt{} \;\Rightarrow r = 4 \cdot x.$$

Računamo x:

$$\left.\begin{matrix} s = 5 \cdot x\ ,\ r = 4 \cdot x \\ 144 = r \cdot (r + s) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 144 = 4 \cdot x \cdot (4 \cdot x + 5 \cdot x) \Rightarrow 144 = 4 \cdot x \cdot 9 \cdot x \Rightarrow 36 \cdot x^2 = 144 \;/:36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \;/\sqrt{} \;\Rightarrow x = 2.$$

Obujam (volumen) stošca iznosi:

$$\left.\begin{matrix} x = 2\ ,\ r = 4 \cdot x\ ,\ v = 3 \cdot x \\ V = \frac{1}{3}\cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 4 \cdot 2\ ,\ v = 3 \cdot 2 \\ V = \frac{1}{3}\cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 8\ ,\ v = 6 \\ V = \frac{1}{3}\cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \end{matrix}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 8^2 \cdot \pi \cdot 6 \Rightarrow V = 128 \cdot \pi\ cm^3.$$

Ili

$$\left.\begin{matrix} x = 2\ ,\ r = 4 \cdot x\ ,\ v = 3 \cdot x \\ V = \frac{1}{3}\cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \\ V = \frac{1}{3}\cdot (4 \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \\ V = 16 \cdot x^2 \cdot \pi \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \\ V = 16 \cdot x^3 \cdot \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 16 \cdot 2^3 \cdot \pi \Rightarrow V = 128 \cdot \pi\ cm^3.$$

Vježba 040

Izračunaj volumen (obujam) stošca ako mu je oplošje $144 \cdot \pi\ cm^2$, a duljine visine v i izvodnice s odnose se kao 6 : 10.

Rezultat: $128 \cdot \pi\ cm^3$.