Zadatak 041 (Silvija, maturantica gimnazije)

Za kut α pri vrhu osnog presjeka uspravnog stošca vrijedi $\cos\alpha=\frac{1}{8}$, a duljina izvodnice stošca je s = 4. Koliki je volumen stošca?

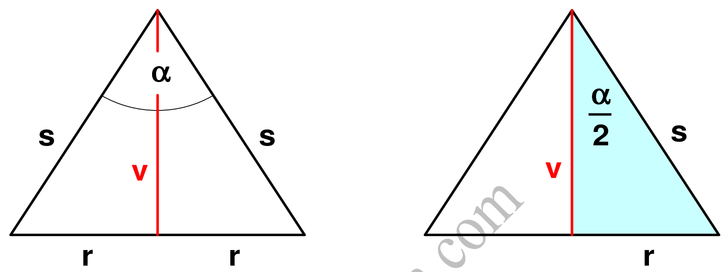
Rješenje 041

Ponovimo!

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{1}{8}\\ \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha}\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{8+1}{16}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{9}{16}} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}.$$



Uočimo osjenčan pravokutan trokut kojemu su katete visina v i polumjer r osnovke, a hipotenuza izvodnica s. Tada je:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{v}{s} \Rightarrow v=s\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow v=4\cdot\frac{3}{4} \Rightarrow v=3.$$

Pomoću Pitagorina poučka slijedi:

$$r^2=s^2-v^2 \Rightarrow r=\sqrt{s^2-v^2} \Rightarrow r=\sqrt{4^2-3^2} \Rightarrow r=\sqrt{16-9} \Rightarrow r=\sqrt{7}.$$

Obujam (volumen) stošca iznosi:

$$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v \Rightarrow V=\frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2\cdot\pi\cdot 3 \Rightarrow V=7\cdot\pi.$$

Vježba 041

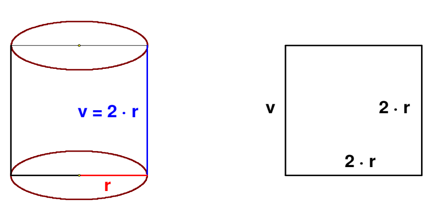
Za kut α pri vrhu osnog presjeka uspravnog stošca vrijedi $\cos\alpha=\frac{1}{8}$, a duljina izvodnice stošca je s = 4. Koliko je oplošje stošca?

Rezultat: $O=\sqrt{7}\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{7}+4\right).$

Zadatak 042 (Rea, gimnazija)

Osni presjek valjka je kvadrat površine 100 cm². Nađite obujam valjka.

Rješenje 042



Iz površine kvadrata dobiju se duljine polumjera r i visine v:

$$P=2\cdot r\cdot 2\cdot r\ \Rightarrow\ P=4\cdot r^{2}\ \Rightarrow\ 4\cdot r^{2}=100\ /:4\ \Rightarrow\ r^{2}=25\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ r=5\ cm\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=5\ cm \\ v=2\cdot r \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ v=2\cdot 5\ cm\ \Rightarrow\ v=10\ cm.$$

Obujam valjka iznosi:

$$V=r^{2}\cdot\pi\cdot v\ \Rightarrow\ V=(5\ cm)^{2}\cdot\pi\cdot 10\ cm\ \Rightarrow\ V=250\cdot\pi\ cm^{3}.$$

Vježba 042

Osni presjek valjka je kvadrat površine 16 cm^2. Nađite obujam valjka.

Rezultat: $16\cdot\pi\ cm^{3}.$

Zadatak 043 (Rea, gimnazija)

Čaša oblika kružnog stošca napunjena je tekućinom do pola visine. Koliki dio volumena stošca ispunjava tekućina?

Rješenje 043

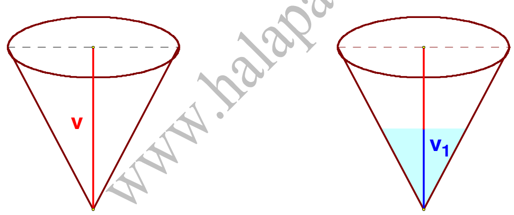
Ponovimo!

Obujmovi sličnih tijela odnose se kao kubovi duljina pripadnih visina, tj. ako je

$$\frac{v_1}{v}=k,$$

tada je

$$\frac{V_1}{V}=k^{3}.$$



Neka je v visina čaše, v_1 visina napunjenog dijela čaše. Računamo omjer:

$$\left.\begin{array}{l} v_1=\frac{1}{2}\cdot v \\ \frac{V_1}{V}=\frac{v_1^{3}}{v^{3}} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \frac{V_1}{V}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot v\right)^{3}}{v^{3}}\ \Rightarrow\ \frac{V_1}{V}=\frac{\frac{1}{8}\cdot v^{3}}{v^{3}}\ \Rightarrow\ \frac{V_1}{V}=\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ V_1=\frac{1}{8}\cdot V.$$

Vježba 043

Čaša oblika kružnog stošca napunjena je tekućinom do trećine visine. Koliki dio volumena stošca ispunjava tekućina?

Rezultat: $V_1=\frac{1}{27}\cdot V.$

Zadatak 044 (Tina, ekonomska škola)

Kvadrat stranice a svinut je u plašt uspravnog valjka. Nađite obujam tog valjka.

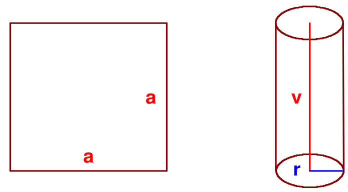
Rješenje 044

Budući da je opseg (kruga) baze valjka jednak duljini a stranice kvadrata, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O=2\cdot r\cdot\pi \\ O=a \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ 2\cdot r\cdot\pi=a\ \Rightarrow\ r=\frac{a}{2\cdot\pi}.$$

Visina v valjka jednaka je duljini a stranice kvadrata:

$$v = a.$$



Obujam valjka iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow V = \left(\frac{a}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot \pi \cdot a \Rightarrow V = \frac{a^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \pi \cdot a \Rightarrow V = \frac{a^3}{4 \cdot \pi}.$$

Vježba 044

Kvadrat stranice 10 svinut je u plašt uspravnog valjka. Nađite obujam tog valjka.

Rezultat: $\frac{250}{\pi}.$

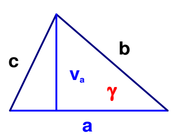
Zadatak 045 (Goran, gimnazija)

Koliki je obujam kosog stožca kojemu je najdulja izvodnica $s_1 = 6 \cdot \sqrt{3}\ cm$, najkraća $s_2 = 6$ cm, a kut među njima je $\alpha = 30°$.

Rješenje 045

$$\left(a \cdot \sqrt{b}\right)^2 = a^2 \cdot b \ , \ b \ge 0 \quad , \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a \ , \ a \ge 0.$$

Površina trokuta



$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

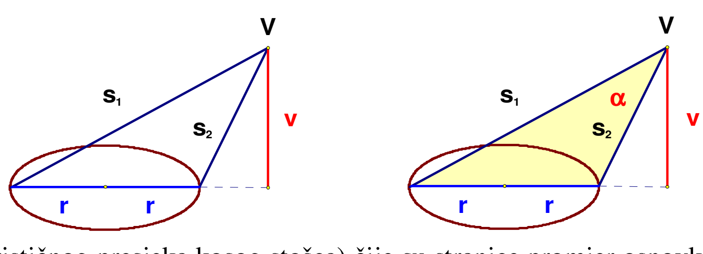
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma.$$

Osnovka ili baza stošca je krug. Točku V nazivamo vrhom stošca. Visina stošca v udaljenost je vrha V do ravnine baze. Obujam uspravnog ili kosog stošca s polumjerom osnovke r i visinom v iznosi

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$



Iz trokuta (karakterističnog presjeka kosog stošca) čije su stranice promjer osnovke 2 · r, izvodnice s_1, s_2 pomoću kosinusova poučka dobije se polumjer osnovke stošca:

$$(2 \cdot r)^2 = s_1^2 + s_2^2 - 2 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow (2 \cdot r)^2 = \left(6 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 \cdot \cos 30^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 \cdot r)^2 = 108 + 36 - 72 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (2 \cdot r)^2 = 144 - 108 \Rightarrow (2 \cdot r)^2 = 36 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r = 6 \ /:2 \Rightarrow r = 3\ cm.$$

Visina v dobije se iz formula za površinu trokuta. Uočimo osjenčani trokut (karakteristični presjek kosog stošca) na slici kojemu su stranice promjer osnovke $2 \cdot r$, izvodnice s_1, s_2.

$$\frac{2 \cdot r \cdot v}{2} = \frac{1}{2} \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{2 \cdot r \cdot v}{2} = \frac{1}{2} \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \sin\alpha \Rightarrow r \cdot v = \frac{1}{2} \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 \cdot \sin 30^0 \Rightarrow 3 \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 3 \cdot v = 9 \cdot \sqrt{3} \ /:3 \Rightarrow v = 3 \cdot \sqrt{3}\ cm.$$

Obujam kosog stošca iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r = 3 \ , \ v = 3 \cdot \sqrt{3} \\ V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow V = 9 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}\ cm^3.$$

Vježba 045

Koliki je obujam kosog stošca kojemu je najdulja izvodnica $s_1 = 20$ cm, najkraća $s_2 = 10$ cm, a polumjer baze $r = 5 \cdot \sqrt{3}\ cm$?

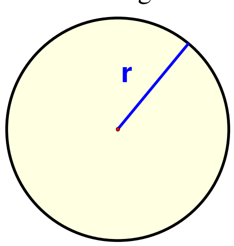
Rezultat: $250 \cdot \pi$ cm^3.

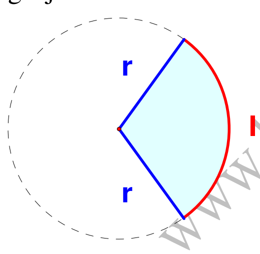
Zadatak 046 (Marijan, gimnazija)

Kada se plašt stošca razvije u ravninu dobije se polukrug. Koliko iznosi kut na vrhu osnog presjeka tog stošca?

Rješenje 046

Površina kruga i kružnog isječka





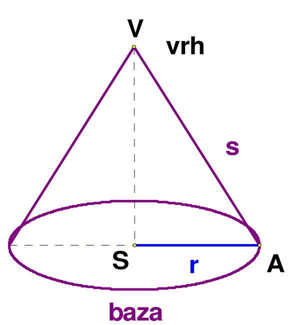
Površina kruga polumjera r:

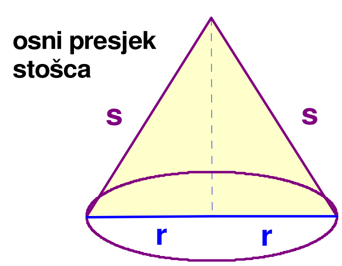
$$P = r^2 \cdot \pi.$$

Površina kružnog isječka duljine luka l i polumjera kruga r:

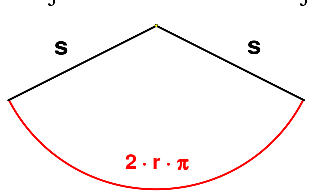
$$P = \frac{1}{2} \cdot r \cdot l.$$

Stožac je rotacijsko tijelo nastalo rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete. Uspravni stožac jest tijelo izgrađeno od dužina koje povezuju vrh stošca smješten točno iznad središta njegove kružne baze, s točkama njegove kružne baze. Pravac određen točkama V i S zove se os stošca. Dužinu $\overline{AV}$ zovemo izvodnicom stošca i označavamo sa s.





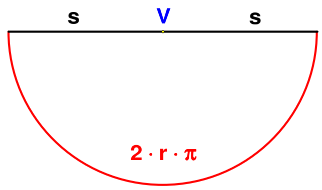
Plašt stošca može se rezanjem po izvodnici prostrijeti u ravninu. Dobiva se kružni isječak polumjera s i duljine luka $2 \cdot r \cdot \pi$. Zato je površina plašta jednaka:



$$P = \frac{1}{2} \cdot s \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot s \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \Rightarrow P = r \cdot \pi \cdot s.$$

Stožac je jednakostraničan ako je

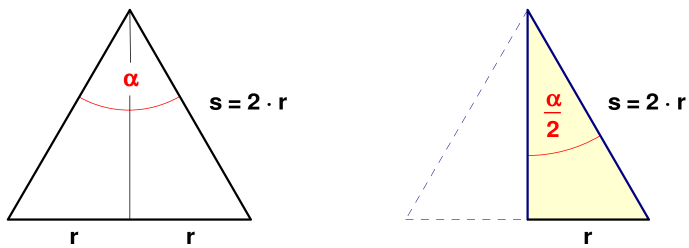
$$s = 2 \cdot r.$$



Budući da se razvojem plašta stošca u ravninu dobio polukrug polumjera s, površina polukruga jednaka je površini plašta stošca:

$$\frac{1}{2}\cdot s^2\cdot\pi = r\cdot\pi\cdot s \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot s^2\cdot\pi = r\cdot\pi\cdot s \;/\cdot\frac{2}{s\cdot\pi} \;\Rightarrow\; s = 2\cdot r.$$

Dobili smo jednakostraničan stožac. Kut na vrhu osnog presjeka tog stošca iznosi:



$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s} \;\Rightarrow\; \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{2\cdot r} \;\Rightarrow\; \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{2\cdot r} \;\Rightarrow\; \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=30^0 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2}=30^0 \;/\cdot 2 \;\Rightarrow\; \alpha=60^0.$$

Vježba 046

Kada se plašt stošca razvije u ravninu dobije se četvrtina kruga. Koliko iznosi kut na vrhu osnog presjeka tog stošca?

Rezultat: 28° 57' 18''.

Zadatak 047 (Natalija, srednja škola)

Promjeri triju kugala u omjeru su 1 : 2 : 6. Koliko je puta obujam najveće kugle veći od zbroja obujmova dviju manjih?

Rješenje 047

Ponovimo!

Obujam kugle polumjera r iznosi:

$$V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi.$$

Obujam kugle promjera d iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} d=2\cdot r \\ V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=\frac{d}{2} \\ V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow V=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^3\cdot\pi \;\Rightarrow\; V=\frac{4}{3}\cdot\frac{d^3}{8}\cdot\pi \;\Rightarrow\; V=\frac{1}{6}\cdot d^3\cdot\pi.$$

Budući da je zadan omjer promjera triju kugala, slijedi:

$$d_1 : d_2 : d_3 = 1 : 2 : 6 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} d_1 = k \\ d_2 = 2\cdot k \\ d_3 = 6\cdot k \end{array}\right\}.$$

Računamo omjer obujma najveće kugle i zbroja obujmova dviju manjih.

$$\frac{V_3}{V_1+V_2}=\frac{\frac{1}{6}\cdot d_3^3\cdot\pi}{\frac{1}{6}\cdot d_1^3\cdot\pi+\frac{1}{6}\cdot d_2^3\cdot\pi} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2}=\frac{\frac{1}{6}\cdot d_3^3\cdot\pi}{\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot\left(d_1^3+d_2^3\right)} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2}=\frac{\frac{1}{6}\cdot d_3^3\cdot\pi}{\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot\left(d_1^3+d_2^3\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2}=\frac{d_3^3}{d_1^3+d_2^3} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2}=\frac{(6\cdot k)^3}{k^3+(2\cdot k)^3} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2}=\frac{216\cdot k^3}{k^3+8\cdot k^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2}=\frac{216\cdot k^3}{9\cdot k^3} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2}=24.$$

Vježba 047

Promjeri triju kugala u omjeru su 2 : 4 : 12. Koliko je puta obujam najveće kugle veći od zbroja obujmova dviju manjih?

Rezultat: 24 puta.

Zadatak 048 (Boro, srednja škola)

Kugla ima obujam 288 · π cm^3. Koliki joj je polumjer?

Rješenje 048

Ponovimo!

$$\sqrt[3]{a^3}=a.$$

Kugla polumjera r ima obujam (volumen):

$$V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi.$$

Polumjer kugle iznosi:

$$V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi \Rightarrow V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi \;/\cdot\frac{3}{4\cdot\pi} \Rightarrow r^3=\frac{3\cdot V}{4\cdot\pi} \Rightarrow r^3=\frac{3\cdot V}{4\cdot\pi}\;/\sqrt[3]{\ } \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3\cdot V}{4\cdot\pi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 288\cdot\pi\ cm^3}{4\cdot\pi}} \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 288\cdot\pi\ cm^3}{4\cdot\pi}} \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{3\cdot 288\ cm^3}{4}} \Rightarrow r=\sqrt[3]{3\cdot 72\ cm^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\sqrt[3]{216\ cm^3} \Rightarrow r=\sqrt[3]{(6\ cm)^3} \Rightarrow r=6\ cm.$$

Vježba 048

Kugla ima obujam 36 · π cm^3. Koliki joj je polumjer?

Rezultat: 3 cm.

Zadatak 049 (Brankica, srednja škola)

Polumjeri triju kugli odnose se kao 1 : 2 : 3. Dokaži da je obujam najveće kugle jednak trostrukom zbroju obujmova manjih dviju.

Rješenje 049

Ponovimo!

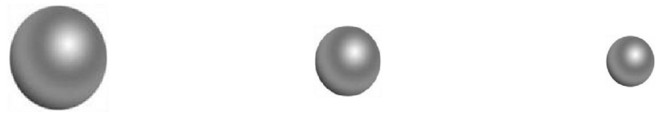
$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kugla polumjera r ima obujam (volumen):

$$V=\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi.$$



Za polumjere triju kugli vrijedi:

$$r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 2 : 3 \Rightarrow \left.\begin{matrix} r_1 = k \\ r_2 = 2 \cdot k \\ r_3 = 3 \cdot k \end{matrix}\right\}.$$

Obujam V_3 najveće kugle iznosi:

$$V_3 = \frac{4}{3} \cdot r_3^3 \cdot \pi.$$

Obujmovi V_1 i V_2 manjih kugli iznose:

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi \quad , \quad V_2 = \frac{4}{3} \cdot r_2^3 \cdot \pi.$$

Računamo omjer obujma V_3 najveće kugle i zbroja obujmova $V_1 + V_2$ manjih dviju.

$$\frac{V_3}{V_1+V_2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot r_3^3 \cdot \pi}{\frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi + \frac{4}{3} \cdot r_2^3 \cdot \pi} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot r_3^3 \cdot \pi}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(r_1^3 + r_2^3\right)} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot r_3^3 \cdot \pi}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(r_1^3 + r_2^3\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2} = \frac{r_3^3}{r_1^3 + r_2^3} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2} = \frac{(3 \cdot k)^3}{k^3 + (2 \cdot k)^3} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2} = \frac{3^3 \cdot k^3}{k^3 + 2^3 \cdot k^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2} = \frac{27 \cdot k^3}{k^3 + 8 \cdot k^3} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2} = \frac{27 \cdot k^3}{9 \cdot k^3} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2} = \frac{27 \cdot k^3}{9 \cdot k^3} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2} = \frac{27}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_3}{V_1+V_2} = 3 \Rightarrow V_3 = 3 \cdot \left(V_1 + V_2\right).$$

Vježba 049

Polumjeri triju kugli odnose se kao 2 : 4 : 6. Dokaži da je obujam najveće kugle jednak trostrukom zbroju obujmova manjih dviju.

Rezultat: Dokaz analogan.

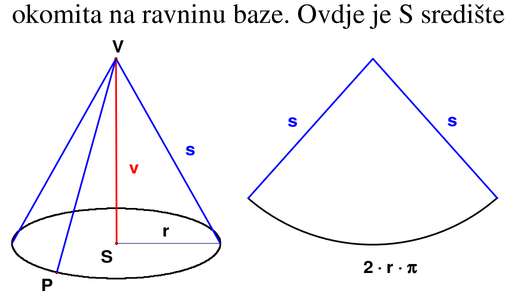
Zadatak 050 (Ivana, gimnazija)

Opseg osnog presjeka uspravnog stošca iznosi 48 cm, a površina plašta je $128 \cdot \pi$ cm^2 . Koliko je oplošje stošca?

Rješenje 050

Ponovimo!

Osnovka ili baza stošca je krug. Točku V nazivamo vrhom stošca. Visina stošca v udaljenost je vrha V do ravnine baze. Plašt stošca opisuju izvodnice $\overline{VP}$ kad točka P putuje obodom kruga. Stožac je uspravan ako je spojnica $\overline{VS}$ okomita na ravninu baze. Ovdje je S središte kruga.



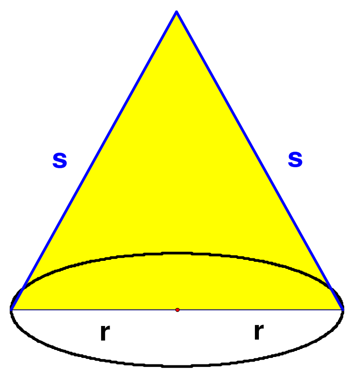
Plašt stošca može se rezanjem po izvodnici prostrijeti u ravninu. Dobiva se kružni isječak polumjera s i duljine luka 2 · r · π.
Oplošje uspravnog stošca s bazom polumjera r i izvodnicom s iznosi:

$$O = r \cdot \pi \cdot (r + s).$$

Površina plašta je:

$$P = r \cdot \pi \cdot s.$$

Presjek stošca s ravninom koja prolazi njegovim vrhom i bilo kojim promjerom baze nazivamo osni presjek. Ako je stožac uspravan, onda je osni presjek jednakokračan trokut s osnovicom duljine 2 · r i krakom duljine s.



Računamo oplošje stošca.
Budući da je zadan opseg osnog presjeka uspravnog stošca, slijedi:

$$\left.\begin{matrix} O = 2 \cdot r + 2 \cdot s \\ O = 48 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot r + 2 \cdot s = 48 \Rightarrow 2 \cdot r + 2 \cdot s = 48 \;/:2 \Rightarrow r + s = 24.$$

Budući da je zadana površina plašta uspravnog stošca, slijedi:

$$\left.\begin{matrix} P = r \cdot \pi \cdot s \\ P = 128 \cdot \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow r \cdot \pi \cdot s = 128 \cdot \pi \Rightarrow r \cdot \pi \cdot s = 128 \cdot \pi \;/:\pi \Rightarrow r \cdot s = 128.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se:

$$\left.\begin{matrix} r + s = 24 \\ r \cdot s = 128 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} s = 24 - r \\ r \cdot s = 128 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow r \cdot (24 - r) = 128 \Rightarrow 24 \cdot r - r^2 = 128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -r^2 + 24 \cdot r - 128 = 0 \Rightarrow -r^2 + 24 \cdot r - 128 = 0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow r^2 - 24 \cdot r + 128 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} r^2 - 24 \cdot r + 128 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -24 \;,\; c = 128 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \;,\; b = -24 \;,\; c = 128 \\ r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot 1 \cdot 128}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 512}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{24 \pm 8}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r_1 = \dfrac{24 + 8}{2} \\ r_2 = \dfrac{24 - 8}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r_1 = \dfrac{32}{2} \\ r_2 = \dfrac{16}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} r_1 = 16 \\ r_2 = 8 \end{matrix}\right\}.$$

Sada računamo pripadne izvodnice.

- $\left.\begin{matrix} r + s = 24 \\ r = 16 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 16 + s = 24 \Rightarrow s = 24 - 16 \Rightarrow s = 8.$

Nema smisla jer svaka stranica trokuta mora biti manja od zbroja preostalih dviju stranica.

- $\left.\begin{matrix} r+s=24 \\ r=8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 8+s=24 \Rightarrow s=24-8 \Rightarrow s=16.$

Oplošje stošca iznosi:

$$\left.\begin{matrix} r=8\ cm\ ,\ s=16\ cm \\ O=r\cdot\pi\cdot(r+s) \end{matrix}\right\} \Rightarrow O=8\ cm\cdot\pi\cdot(8\ cm+16\ cm) \Rightarrow O=192\cdot\pi\ cm^2.$$

Vježba 050

Opseg osnog presjeka uspravnog stošca iznosi 4.8 dm, a površina plašta je $1.28\cdot\pi\ dm^2$. Koliko je oplošje stošca?

Rezultat: $1.92\cdot\pi\ dm^2.$

Zadatak 051 (Ivana, gimnazija)

Površina presjeka krnjeg stošca ravninom koja prolazi polovištem njegove visine paralelno osnovici jednaka je $225\cdot\pi\ cm^2$. Obujam stošca iznosi $2800\cdot\pi\ cm^3$, duljina visine je 12 cm. Koliki su polumjeri osnovica ovog stošca?

Rješenje 051

Ponovimo!

Krnji stožac dobiva se presijecanjem stošca ravninom paralelnom s ravninom baze. Krnji stožac kojemu baze imaju polumjere R i r, a visina iznosi v, ima obujam

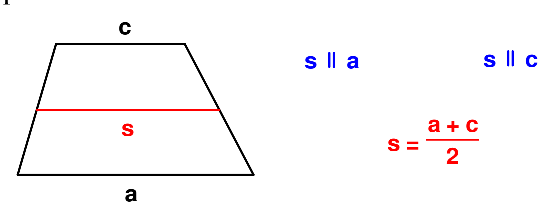
$$V=\frac{\pi\cdot v}{3}\cdot\left(R^2+R\cdot r+r^2\right).$$

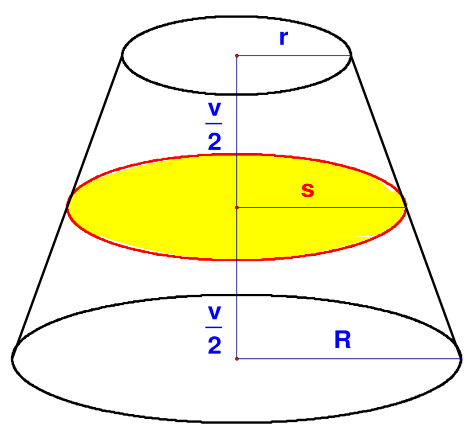
Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S (središta) manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).

Ploština kruga duljine polumjera r izračunava se po formuli

$$P=r^2\cdot\pi.$$

Trapez je četverokut kojemu su barem dvije stranice paralelne. Usporedne (paralelne) stranice trapeza zovu se osnovice, a druge dvije zovu se kraci trapeza. Dužina koja spaja polovišta krakova trapeza zove se srednjica trapeza. Srednjica trapeza paralelna je s osnovicama trapeza i jednaka je polovici zbroja duljina osnovica trapeza.

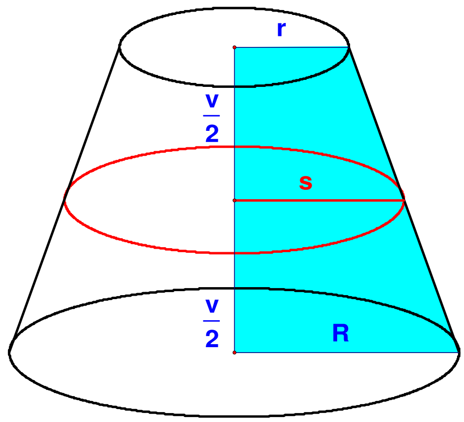




Presjek krnjeg stošca ravninom koja prolazi polovištem njegove visine paralelno osnovici je krug čiji polumjer s iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} P = s^2 \cdot \pi \\ P = 225 \cdot \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow s^2 \cdot \pi = 225 \cdot \pi \Rightarrow s^2 \cdot \pi = 225 \cdot \pi \;/: \pi \Rightarrow s^2 = 225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^2 = 225 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow s = \sqrt{225} \Rightarrow s = 15.$$



Sa slike vidi se da je s srednjica trapeza kojemu je R donja osnovica, a r gornja osnovica. Zato vrijedi:

$$s = \frac{R + r}{2} \Rightarrow s = \frac{R + r}{2} \;/\cdot 2 \Rightarrow R + r = 2 \cdot s \Rightarrow R + r = 2 \cdot 15 \Rightarrow R + r = 30.$$

Budući da je zadan obujam krnjeg stošca i visina, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{\pi \cdot v}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \\ V = 2800 \cdot \pi \;\;,\;\; v = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\pi \cdot 12}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = 2800 \cdot \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi \cdot 12}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = 2800 \cdot \pi \Rightarrow 4 \cdot \pi \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = 2800 \cdot \pi \;/\cdot \frac{1}{4 \cdot \pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 + R \cdot r + r^2 = 700.$$

Iz sustava jednadžbi dobiju se polumjeri osnovica krnjeg stošca.

$$\left.\begin{array}{l} R + r = 30 \\ R^2 + R \cdot r + r^2 = 700 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r = 30 - R \\ R^2 + R \cdot r + r^2 = 700 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 + R \cdot (30 - R) + (30 - R)^2 = 700 \Rightarrow R^2 + 30 \cdot R - R^2 + 900 - 60 \cdot R + R^2 = 700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 + 30 \cdot R - R^2 + 900 - 60 \cdot R + R^2 = 700 \Rightarrow 30 \cdot R + 900 - 60 \cdot R + R^2 = 700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 \cdot R + 900 - 60 \cdot R + R^2 - 700 = 0 \Rightarrow R^2 - 30 \cdot R + 200 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} R^2 - 30 \cdot R + 200 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -30 \;,\; c = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -30 \;,\; c = 200 \\ R_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 4 \cdot 1 \cdot 200}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

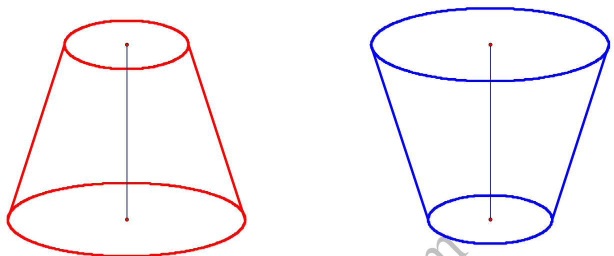
$$\Rightarrow R_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{900 - 800}}{2} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{100}}{2} \Rightarrow R_{1,2} = \frac{30 \pm 10}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R_1 = \frac{30 + 10}{2} \\ R_2 = \frac{30 - 10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} R_1 = \frac{40}{2} \\ R_2 = \frac{20}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R_1 = 20 \\ R_2 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} R_1 = 20\ cm \\ R_2 = 10\ cm \end{array}\right\}.$$

Dobili smo dva rješenja za R ovisno o tome da li krnji stožac leži na većoj ili manjoj osnovici. Polumjeri gornje osnovice stošca iznose:

- $\left.\begin{array}{l} R_1 + r_1 = 30 \\ R_1 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow 20 + r_1 = 30 \Rightarrow r_1 = 30 - 20 \Rightarrow r_1 = 10 \Rightarrow r_1 = 10\ cm.$
- $\left.\begin{array}{l} R_2 + r_2 = 30 \\ R_2 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 + r_2 = 30 \Rightarrow r_2 = 30 - 10 \Rightarrow r_2 = 20 \Rightarrow r_2 = 20\ cm.$

Dakle, zadatak ima dva rješenja ovisno o tome da li krnji stožac leži na većoj ili manjoj osnovici.



Vježba 051

Površina presjeka krnjeg stošca ravninom koja prolazi polovištem njegove visine paralelno osnovici jednaka je $2.25 \cdot \pi$ dm^2. Obujam stošca iznosi $2.8 \cdot \pi$ dm^3, duljina visine je 1.2 dm. Koliki su polumjeri osnovica ovog stošca?

Rezultat: $R_1 = 2$ dm, $r_1 = 1$ dm ; $R_2 = 1$ dm, $r_2 = 2$ dm.

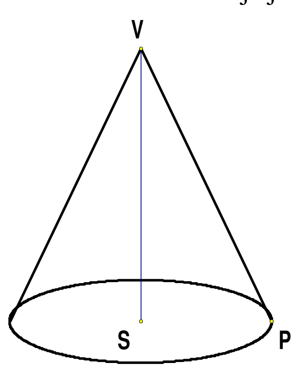
Zadatak 052 (Aco, elektrotehnička škola)

U uspravan stožac izvodnice s = 50 cm i polumjera osnovke (baze) R = 30 cm upisana je kugla. Odredi obujam (volumen) kugle.

Rješenje 052

Ponovimo!

Osnovka ili baza stošca je krug. Točku V nazivamo vrhom stošca. Visina stošca v udaljenost je vrha V do ravnine baze. Plašt stošca opisuju izvodnice $\overline{VP}$ kada točka P putuje obodom kruga. Stožac je uspravan ako je spojnica $\overline{VS}$ okomita na ravninu baze. Ovdje je S središte kruga.



Pitagorin poučak

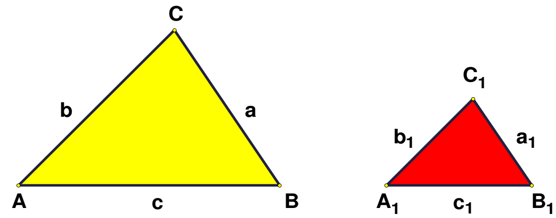
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

Sličnost trokuta

Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \ , \ \beta = \beta_1 \ , \ \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

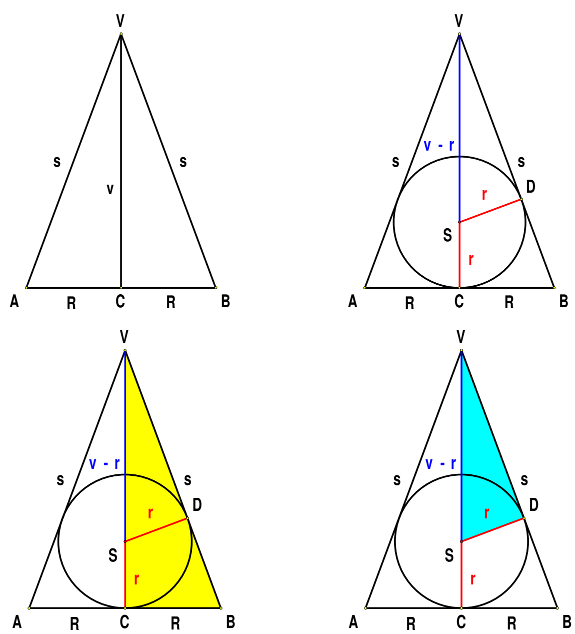
$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$



Sa slika vidi se:

$$|CB| = R \quad , \quad |BV| = s \quad , \quad |CV| = v \quad , \quad |CS| = |SD| = r$$

$$|SV| = |CV| - |CS| = v - r.$$

Budući da je trokut CBV pravokutan trokut, uporabom Pitagorina poučka izračuna se visina v stošca.

$$|CV|^2 = |BV|^2 - |CB|^2 \Rightarrow v^2 = s^2 - R^2 \Rightarrow v^2 = 50^2 - 30^2 \Rightarrow v^2 = 2500 - 900 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = 1600 \Rightarrow v^2 = 1600 \; /\sqrt{} \Rightarrow v = \sqrt{1600} \Rightarrow v = 40 \Rightarrow v = 40 \; cm.$$

Uočimo pravokutne trokute ΔCBV i ΔSDV. Oni su slični jer se podudaraju u dva kuta (K – K) pa vrijedi razmjer:

$$|CB| : |BV| = |SD| : |SV| \Rightarrow R : s = r : (v - r) \Rightarrow R \cdot (v - r) = s \cdot r \Rightarrow 30 \cdot (40 - r) = 50 \cdot r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 \cdot (40 - r) = 50 \cdot r \; /:10 \Rightarrow 3 \cdot (40 - r) = 5 \cdot r \Rightarrow 120 - 3 \cdot r = 5 \cdot r \Rightarrow -3 \cdot r - 5 \cdot r = -120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 \cdot r = -120 \Rightarrow -8 \cdot r = -120 \; /:(-8) \Rightarrow r = 15 \Rightarrow r = 15 \; cm.$$

Obujam (volumen) kugle iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r = 15 \; cm \\ V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{4}{3} \cdot (15 \; cm)^3 \cdot \pi \Rightarrow V = 4500 \cdot \pi \; cm^3.$$

Vježba 052

U uspravan stožac izvodnice 5 dm i promjera osnovke (baze) 6 dm upisana je kugla. Odredi obujam (volumen) kugle.

Rezultat: $V = 4.5 \cdot \pi \; dm^3.$

Zadatak 053 (Aco, elektrotehnička škola)

Zadano je oplošje O = 150.976 cm^2 uspravnog valjka i površina njegovog plašta P = 94.2478 cm^2. Odredi visinu i obujam valjka.

Rješenje 053

Ponovimo!

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze r i visine v imaju jednake obujme (volumene). Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Oplošje uspravnog valjka polumjera r i visine v računa se formulom

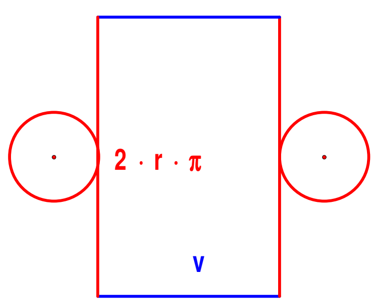
$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + v).$$

Plašt valjka kad se prostre u ravninu je pravokutnik s jednom stranicom v, a drugom jednakom opsegu kruga:

$$2 \cdot r \cdot \pi.$$

Zato je plašt valjka

$$P = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v.$$



Budući da je zadano oplošje valjka i površina njegovog plašta, postavit ćemo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} O = 150.976 \\ P = 94.2478 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + v) = 150.976 \\ 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v = 94.2478 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot r^{2} \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v = 150.976 \\ 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v = 94.2478 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot r^{2} \cdot \pi + 94.2478 = 150.976 \Rightarrow 2 \cdot r^{2} \cdot \pi = 150.976 - 94.2478 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r^{2} \cdot \pi = 56.728 \Rightarrow 2 \cdot r^{2} \cdot 3.14 = 56.728 \Rightarrow 6.28 \cdot r^{2} = 56.728 \Rightarrow 6.28 \cdot r^{2} = 56.728 \;/ : 6.28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^{2} = 9.03 \Rightarrow r^{2} = 9.03 \;/ \sqrt{\;} \Rightarrow r = \sqrt{9.03} \Rightarrow r = 3 \Rightarrow r = 3 \; cm.$$

Računamo visinu v valjka.

$$\left.\begin{array}{l} P = 94.2478 \;\; , \;\; r = 3 \\ P = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P = 94.2478 \;\; , \;\; r = 3 \\ P = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot v \;/ \cdot \dfrac{1}{2 \cdot r \cdot \pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P = 94.2478 \;\; , \;\; r = 3 \\ v = \dfrac{P}{2 \cdot r \cdot \pi} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{94.2478}{2 \cdot 3 \cdot 3.14} \Rightarrow v = 5 \Rightarrow v = 5 \; cm.$$

Obujam (volumen) valjka iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} r = 3 \;\; , \;\; v = 5 \\ V = r^{2} \cdot \pi \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow V = 3^{2} \cdot \pi \cdot 5 \Rightarrow V = 45 \cdot \pi \Rightarrow V = 45 \cdot \pi \; cm^{3}.$$

Vježba 053

Zadano je oplošje O = 1.50976 dm^2 uspravnog valjka i površina njegovog plašta P = 94.2478 cm^2. Odredi visinu valjka.

Rezultat: 5 cm.

Zadatak 054 (Tomislav, elektrotehnička škola)

Polumjer valjka uveća se za 50%. Za koliko se postotaka uveća njegov obujam?

Rješenje 054

Ponovimo!

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Stoti dio nekog broja naziva se postotak. Piše se kao razlomak s nazivnikom 100. Postotak p je broj jedinica koji se uzima od 100 jedinica neke veličine.
Na primjer,

$$9 \% = \frac{9}{100} \quad , \quad 81 \% = \frac{81}{100} \quad , \quad 4.5 \% = \frac{4.5}{100} \quad , \quad 547 \% = \frac{547}{100} \quad , \quad p \% = \frac{p}{100}.$$

Kako se računa p% od a? Odgovor je: $\frac{p}{100} \cdot a.$

Neka je a početna cijena. Ako se poveća p%, konačna cijena je:

$$a + \frac{p}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot a.$$

Uspravni i kosi valjak istog polumjera baze r i visine v imaju jednake obujmove (volumene). Taj obujam iznosi:

$$V = r^{2} \cdot \pi \cdot v.$$

Neka je r polumjer baze valjka. Tada njegov obujam V iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Budući da se polumjer baze valjka uveća za 50%, novi polumjer r_1 ima vrijednost:

$$r_1 = r + \frac{50}{100} \cdot r = r + \frac{50}{100} \cdot r = r + \frac{1}{2} \cdot r = \frac{3}{2} \cdot r.$$

Obujam valjka V_1 iznosi:

$$V_1 = r_1^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow V_1 = \left(\frac{3}{2} \cdot r\right)^2 \cdot \pi \cdot v \Rightarrow V_1 = \frac{9}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

1.inačica

Obujam V_1 izrazimo pomoću starog obujam V.

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \frac{9}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v \\ V = r^2 \cdot \pi \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow V_1 = \frac{9}{4} \cdot V \Rightarrow V_1 = \frac{4+5}{4} \cdot V \Rightarrow V_1 = \frac{4}{4} \cdot V + \frac{5}{4} \cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{4}{4} \cdot V + \frac{5}{4} \cdot V \Rightarrow V_1 = V + \frac{5}{4} \cdot V \Rightarrow V_1 = V + 1.25 \cdot V \Rightarrow V_1 = V + \frac{125}{100} \cdot V \Rightarrow V_1 = V + 125\% \cdot V.$$

Uvećanje je 125%.

2.inačica

Gledamo omjer obujmova V_1 i V.

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{9}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v}{r^2 \cdot \pi \cdot v} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{\frac{9}{4} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v}{r^2 \cdot \pi \cdot v} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{9}{4} \ / \cdot V \Rightarrow V_1 = \frac{9}{4} \cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{4+5}{4} \cdot V \Rightarrow V_1 = \frac{4}{4} \cdot V + \frac{5}{4} \cdot V \Rightarrow V_1 = \frac{4}{4} \cdot V + \frac{5}{4} \cdot V \Rightarrow V_1 = V + \frac{5}{4} \cdot V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = V + 1.25 \cdot V \Rightarrow V_1 = V + \frac{125}{100} \cdot V \Rightarrow V_1 = V + 125\% \cdot V.$$

Uvećanje je 125%.

Vježba 054

Polumjer valjka uveća se za 10%. Za koliko se postotaka uveća njegov obujam?

Rezultat: 21%.

Zadatak 055 (Josip, maturant)

Metalnu kuglu obujma $36 \cdot \pi$ cm^3 treba pretopiti u valjak. Odredite visinu valjka ako je polumjer baze valjka jednak polumjeru kugle.

Rješenje 055

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^n} = a \ , \ a \geq 0 \quad , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Uspravni valjak polumjera baze r i visine v ima obujam

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Obujam kugle polumjera r iznosi:

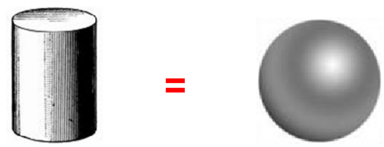
$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Iz obujma kugle izračuna se njezin polumjer r.

$$\left.\begin{array}{l} V=\frac{4}{3}\cdot r^{3}\cdot\pi \\ V=36\cdot\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{3}\cdot r^{3}\cdot\pi=36\cdot\pi \Rightarrow \frac{4}{3}\cdot r^{3}\cdot\pi=36\cdot\pi \;/\cdot\frac{3}{4\cdot\pi} \Rightarrow r^{3}=\frac{36\cdot\pi\cdot 3}{4\cdot\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^{3}=\frac{36\cdot\pi\cdot 3}{4\cdot\pi} \Rightarrow r^{3}=27 \Rightarrow r^{3}=27 \;/\sqrt[3]{\;} \Rightarrow r=\sqrt[3]{27} \Rightarrow r=\sqrt[3]{3^{3}} \Rightarrow r=3.$$

Polumjer kugle je 3 cm.



Budući da obujam valjka mora biti jednak obujmu kugle, visina valjka uz zadani uvjet (polumjer baze valjka jednak je polumjeru kugle) iznosi:

$$V_v=V_k \Rightarrow r^{2}\cdot\pi\cdot v=\frac{4}{3}\cdot r^{3}\cdot\pi \Rightarrow r^{2}\cdot\pi\cdot v=\frac{4}{3}\cdot r^{3}\cdot\pi \;/\cdot\frac{1}{r^{2}\cdot\pi} \Rightarrow v=\frac{4}{3}\cdot r \Rightarrow v=\frac{4}{3}\cdot 3 \Rightarrow v=4.$$

Visina valjka je 4 cm.

Vježba 055

Metalnu kuglu oplošja 36 · π cm^2 treba pretopiti u valjak. Odredite visinu valjka ako je polumjer baze valjka jednak polumjeru kugle.

Rezultat: 4 cm. Naputak: oplošje kugle je O = 4 · r^2 · π.

Zadatak 056 (Mirna, srednja škola)

Promjer Marsa jednak je 0.53 promjera Zemlje. Koliki je omjer obujmova Zemlje i Marsa?

Rješenje 056

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}.$$

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V=\frac{4}{3}\cdot r^{3}\cdot\pi.$$

Promjer kugle je duljina dužine koja prolazi kroz središte kugle i čiji krajevi se nalaze na sferi.
Polumjer (radijus) je polovica promjera.
Sfera je skup točaka u prostoru jednako udaljenih (za radijus r) od neke točke (središta sfere).
Kugla je skup svih točaka prostora čija je udaljenost od središta S manja ili jednaka polumjeru r.
Omeđena je sferom polumjera r, tj. skupom točaka prostora čija je udaljenost od središta jednaka r.
Budući da je promjer Marsa jednak 0.53 promjera Zemlje, vrijedi:

$$2\cdot r_M=0.53\cdot 2\cdot r_Z \Rightarrow 2\cdot r_M=0.53\cdot 2\cdot r_Z \;/:2 \Rightarrow r_M=0.53\cdot r_Z.$$

Računamo omjer obujmova Zemlje i Marsa.

$$\frac{V_Z}{V_M}=\frac{\frac{4}{3}\cdot r_Z^{3}\cdot\pi}{\frac{4}{3}\cdot r_M^{3}\cdot\pi} \Rightarrow \frac{V_Z}{V_M}=\frac{\frac{4}{3}\cdot r_Z^{3}\cdot\pi}{\frac{4}{3}\cdot r_M^{3}\cdot\pi} \Rightarrow \frac{V_Z}{V_M}=\frac{r_Z^{3}}{r_M^{3}} \Rightarrow \frac{V_Z}{V_M}=\left(\frac{r_Z}{r_M}\right)^{3} \Rightarrow \frac{V_Z}{V_M}=\left(\frac{r_Z}{0.53\cdot r_Z}\right)^{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_Z}{V_M}=\left(\frac{r_Z}{0.53\cdot r_Z}\right)^{3} \Rightarrow \frac{V_Z}{V_M}=\left(\frac{1}{0.53}\right)^{3} \Rightarrow \frac{V_Z}{V_M}=6.72.$$

$V_Z : V_M$

Vježba 056

Promjer Marsa jednak je 0.53 promjera Zemlje. Koliki je omjer obujmova Marsa i Zemlje?

Rezultat: 0.149.

Zadatak 057 (Roda, gimnazija)

Koji od valjaka s opsegom osnog presjeka 2 · p ima najveće oplošje?

Rješenje 057

Ponovimo!

Pravokutnik je paralelogram kojemu je barem jedan kut pravi. Opseg pravokutnika, duljina stranica a i b, izračunava se po formuli

$$O = 2 \cdot (a + b).$$

Oplošje uspravnog valjka polumjera r i visine v računa se formulom

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + v).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

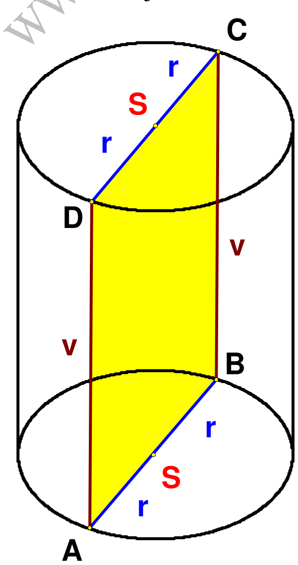
Kvadratna funkcija

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.



Osni presjek valjka je pravokutnik ABCD sa duljinama stranica 2 · r i v pa njegov opseg iznosi:

$$O = 2 \cdot (2 \cdot r + v) \Rightarrow O = 4 \cdot r + 2 \cdot v.$$

Budući da opseg osnog presjeka (pravokutnika) mora biti jednak 2 · p, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot p \\ O = 4 \cdot r + 2 \cdot v \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow 4 \cdot r + 2 \cdot v = 2 \cdot p \Rightarrow 4 \cdot r + 2 \cdot v = 2 \cdot p \; /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r + v = p \Rightarrow v = p - 2 \cdot r.$$

Računamo opseg valjka.

$$\left.\begin{array}{l} O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + v) \\ v = p - 2 \cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + p - 2 \cdot r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (p - r) \Rightarrow O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot p - 2 \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow O = -2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot p \cdot r.$$

Uočimo da je oplošje valjka funkcija polumjera r.

$$O = f(r).$$

To je kvadratna funkcija po varijabli r čiji koeficijenti iznose:

$$O(r) = -2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot p \cdot r \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -2 \cdot \pi \\ b = 2 \cdot \pi \cdot p \\ c = 0 \end{array}\right\}.$$

Budući da je koeficijent a negativan:

$$a = -2 \cdot \pi \Rightarrow a < 0$$

funkcija ima maksimum u točki s apscisom

$$r = -\frac{b}{2 \cdot a} \Rightarrow r = -\frac{2 \cdot \pi \cdot p}{2 \cdot (-2) \cdot \pi} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot \pi \cdot p}{2 \cdot 2 \cdot \pi} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot \pi \cdot p}{2 \cdot 2 \cdot \pi} \Rightarrow r = \frac{p}{2}.$$

Dakle, najveća je vrijednost ove funkcije za $r = \frac{p}{2}$.

Sada računamo duljinu visine v valjka.

$$\left.\begin{array}{l} v = p - 2 \cdot r \\ r = \frac{p}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow v = p - 2 \cdot \frac{p}{2} \Rightarrow v = p - 2 \cdot \frac{p}{2} \Rightarrow v = p - p \Rightarrow v = 0.$$

Takav valjak ne postoji.

Vježba 057

Koji od valjaka s opsegom osnog presjeka 8 ima najveće oplošje?

Rezultat: Ne postoji.

Zadatak 058 (Anđela, gimnazija)

Visina stošca dugačka je 4 cm, duljina izvodnice je 10 cm. Kolika je površina presjeka stošca ravninom koja prolazi vrhom stošca pod 60° u odnosu prema ravnini osnovke?

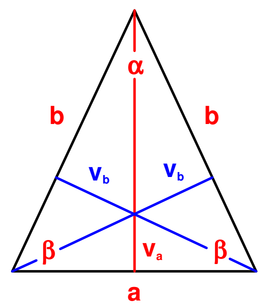
Rješenje 058

Ponovimo!

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

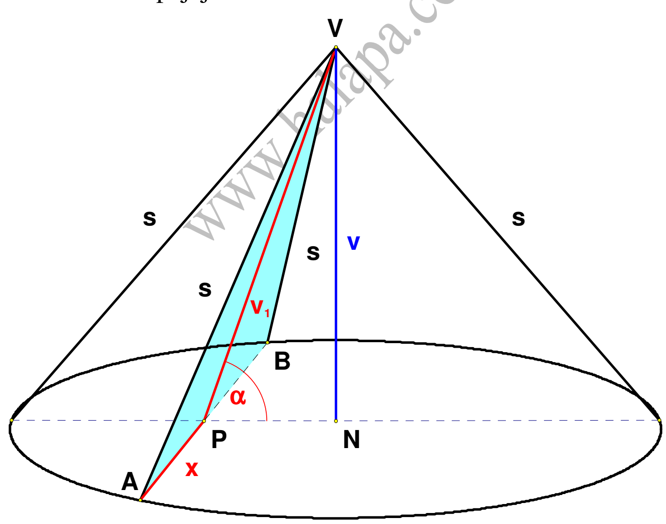
Trokut je dio ravnine omeđen sa tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.



Trokut koji ima dvije sukladne stranice zove se jednakokračan trokut. Sukladne stranice su kraci, a treća stranica zove se osnovica ili baza trokuta. Ploština jednakokračnog trokuta izračunava se po formuli

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad , \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2}.$$

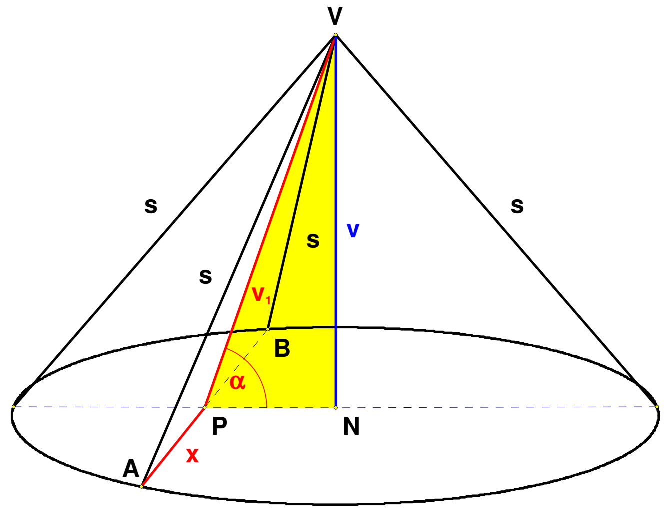
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak:
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine hipotenuze.
Osnovka ili baza stošca je krug. Točku V nazivamo vrhom stošca. Visina stošca v udaljenost je vrha V do ravnine baze. Izvodnice stošca spajaju vrh s točkama na kružnici.



Presjek stošca ravninom koja prolazi vrhom stošca pod 60º u odnosu prema ravnini osnovke je jednakokračan trokut ΔABV. Sa slike vidi se:

$$|VA| = |VB| = s = 10 \;,\; |VP| = v_1 \;,\; |VN| = v = 4 \;,\; |AP| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = x \;,\; \angle VPN = \alpha = 60^0$$

Računamo duljinu visine v_1 jednakokračnog trokuta ΔABV.

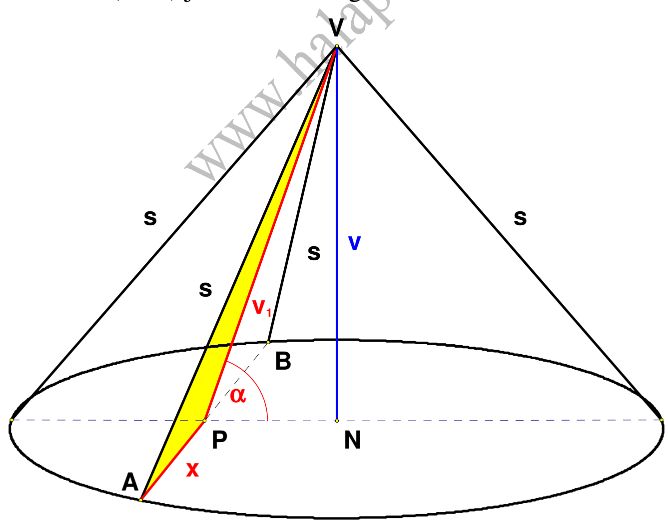


Uočimo pravokutan trokut ΔVPN i pomoću funkcije sinus izračunamo visinu v_1.

$$\sin\alpha = \frac{|VN|}{|VP|} \Rightarrow \sin 60^0 = \frac{v}{v_1} \Rightarrow \sin 60^0 = \frac{v}{v_1} \;/\cdot \frac{v_1}{\sin\alpha} \Rightarrow v_1 = \frac{v}{\sin\alpha} \Rightarrow v_1 = \frac{4}{\sin 60^0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow v_1 = \frac{\frac{4}{1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow v_1 = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Sada tražimo duljinu osnovice (baze) jednakokračnog trokuta ΔABV.



Uočimo pravokutan trokut ΔVAP i pomoću Pitagorina poučka izračunamo duljinu katete x. To je polovica osnovice jednakokračnog trokuta ΔABV.

$$|AP|^2 = |VA|^2 - |VP|^2 \Rightarrow x^2 = s^2 - v_1^2 \Rightarrow x^2 = 10^2 - \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 100 - \frac{8^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 - \frac{64}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{100}{1} - \frac{64}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{300-64}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{236}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{236}{3} \;/\sqrt{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{236}{3}} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{236}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje}\end{array}\right] \Rightarrow x=\frac{\sqrt{4\cdot 59}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{2\cdot\sqrt{59}}{\sqrt{3}}.$$

Duljina osnovice (baze) jednakokračnog trokuta ΔABC iznosi:

$$|AB|=2\cdot|AP|=2\cdot x=2\cdot\frac{2\cdot\sqrt{59}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{59}}{\sqrt{3}}=\frac{4\cdot\sqrt{59}}{\sqrt{3}}.$$

Računamo površinu jednakokračnog trokuta ΔABV iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} |AB|=\frac{4\cdot\sqrt{59}}{\sqrt{3}}\ ,\ |VP|=\frac{8}{\sqrt{3}} \\ P_{ABV}=\frac{|AB|\cdot|VP|}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow P_{ABV}=\frac{\frac{4\cdot\sqrt{59}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}}{2} \Rightarrow P_{ABV}=\frac{\frac{32\cdot\sqrt{59}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABV}=\frac{\frac{32\cdot\sqrt{59}}{3}}{\frac{2}{1}} \Rightarrow P_{ABV}=\frac{\frac{32\cdot\sqrt{59}}{3}}{\frac{2}{1}} \Rightarrow P_{ABV}=\frac{\frac{16\cdot\sqrt{59}}{3}}{\frac{1}{1}} \Rightarrow P_{ABV}=\frac{16\cdot\sqrt{59}}{3}\ cm^2.$$

Vježba 058

Visina stošca dugačka je 0.4 dm, duljina izvodnice je 1 dm. Kolika je površina presjeka stošca ravninom koja prolazi vrhom stošca pod 60° u odnosu prema ravnini osnovke?

Rezultat: $\frac{16\cdot\sqrt{59}}{3}\ cm^2.$

Zadatak 059 (Dora, gimnazija)

Kugla je presječena ravninom, a polumjer kruga koji je presjek, dug je 8 cm. Koliki je obujam kuglina odsječka, ako je njegova visina 4 cm?

Rješenje 059

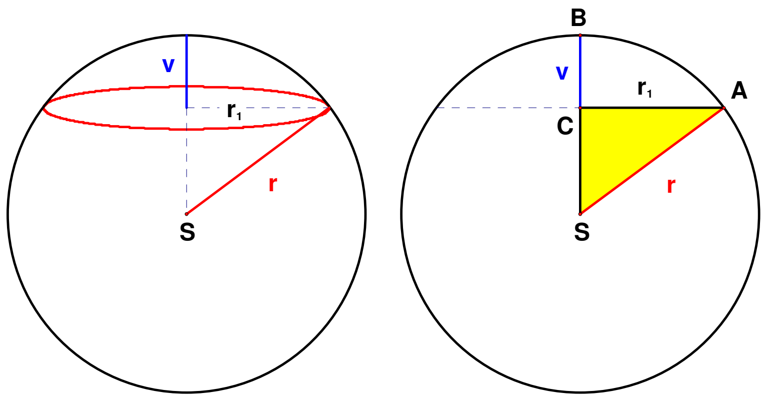
Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Pitagorin poučak:
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.
Kugla je skup svih točaka u prostoru kojih je udaljenost do čvrste točke – središta kugle manja ili jednaka njezinom polumjeru r. Točke na rubu kugle čine sferu.
Presjek je ravnine i kugle krug. Presjek je ravnine i sfere kružnica.
Obujam kuglina odsječka

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot v^2\cdot(3\cdot r-v)\quad,\quad V=\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot v\cdot\left(3\cdot r_1^2+v^2\right),$$

gdje je r polumjer kugle, v visina kuglina odsječka, r_1 polumjer kruga u kojem se sijeku ravnina i kugla.



Sa slika vidi se:

$$|SA| = |SB| = r \;,\; |CA| = r_1 = 8 \;,\; |CB| = v = 4 \;,\; |SC| = |SB| - |CB| = r - 4$$

Uočimo pravokutan trokut ΔSAC i pomoću Pitagorina poučka izračunamo r.

$$|SA|^2 = |CA|^2 + |SC|^2 \Rightarrow r^2 = r_1^2 + (r-4)^2 \Rightarrow r^2 = 8^2 + (r-4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 64 + r^2 - 8 \cdot r + 16 \Rightarrow r^2 = 64 + r^2 - 8 \cdot r + 16 \Rightarrow 0 = 64 - 8 \cdot r + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot r = 64 + 16 \Rightarrow 8 \cdot r = 80 \Rightarrow 8 \cdot r = 80 \;/ : 8 \Rightarrow r = 10 \; cm.$$

Računamo obujam kuglina odsječka na dva načina.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} r = 10 \;,\; v = 4 \\ V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot v^2 \cdot (3 \cdot r - v) \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot (3 \cdot 10 - 4) \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot (30 - 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot 26 \Rightarrow V = \frac{416}{3} \cdot \pi \; cm^3.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 8 \;,\; v = 4 \\ V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot v \cdot \left(3 \cdot r_1^2 + v^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 4 \cdot \left(3 \cdot 8^2 + 4^2\right) \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (3 \cdot 64 + 16) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot (192 + 16) \Rightarrow V = \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot 208 \Rightarrow V = \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot 208 \Rightarrow V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 208 \Rightarrow V = \frac{416}{3} \cdot \pi \; cm^3.$$

Vježba 059

Kugla je presječena ravninom, a polumjer kruga koji je presjek, dug je 0.8 dm. Koliki je obujam kuglina odsječka, ako je njegova visina 0.04 m?

Rezultat: $V = \frac{416}{3} \cdot \pi \; cm^3.$

Zadatak 060 (Dora, gimnazija)

U valjkastu posudu polumjera osnovke 6 cm i visine 10 cm spustimo metalnu kuglicu promjera 6 cm. Do koje bi najmanje visine morala biti voda u posudi kako bi se cijela kuglica nakon uranjanja našla pod vodom?

Rješenje 060

Ponovimo!

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine v imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = S \cdot v \;\Rightarrow\; V = r^2 \cdot \pi \cdot v.$$

Obujam kugle

Obujam (volumen) kugle polumjera r iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Da bi se cijela kuglica nakon uranjanja našla pod vodom razina vode u valjkastoj posudi mora biti jednaka promjeru kuglice.

$$v = 2 \cdot r = 6 \ cm.$$

Polumjer kuglice iznosi

$$r_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \ cm.$$

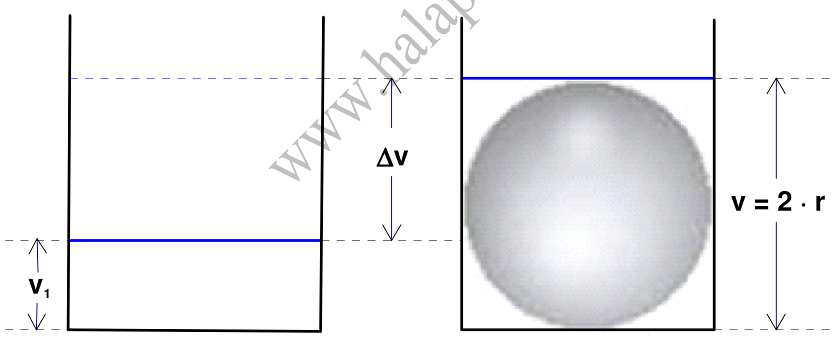
Kada kuglicu uronimo u vodu razina vode u valjkastoj posudi podigne se za Δv. Povećanje obujma vode u posudi jednako je obujmu kuglice.

$$\Delta V = V \;\Rightarrow\; r^2 \cdot \pi \cdot \Delta v = \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi \;\Rightarrow\; r^2 \cdot \pi \cdot \Delta v = \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi \ / \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Delta v = \frac{4 \cdot r_1^3}{3 \cdot r^2} \;\Rightarrow\; \Delta v = \frac{4 \cdot (3 \ cm)^3}{3 \cdot (6 \ cm)^2} \;\Rightarrow\; \Delta v = 1 \ cm.$$

Razina vode prije uranjanja kuglice mora iznositi:

$$v_1 = v - \Delta v \;\Rightarrow\; v_1 = 6 \ cm - 1 \ cm \;\Rightarrow\; v_1 = 5 \ cm.$$



Vježba 060

U valjkastu posudu polumjera osnovke 60 mm i visine 1 dm spustimo metalnu kuglicu promjera 0.6 dm. Do koje bi najmanje visine morala biti voda u posudi kako bi se cijela kuglica nakon uranjanja našla pod vodom?

Rezultat: 5 cm.