Zadatak 021 (Ivana, ekonomska škola)

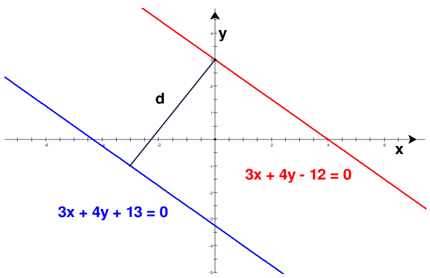
Kolika je udaljenost pravaca 3x + 4y – 12 = 0, 3x + 4y + 13 = 0?

Rješenje 021

Napišimo jednadžbe pravaca u eksplicitnom obliku:

$$\left.\begin{array}{l}3x+4y-12=0\\3x+4y+13=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}4y=-3x+12\\4y=-3x-13\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=-\frac{3}{4}\cdot x+3\\ y=-\frac{3}{4}\cdot x-\frac{13}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{koeficijenti smjerova jednaki su,}\\ \text{PRAVCI SU PARALELNI}\end{array}\right].$$

Na prvom pravcu odredimo jednu točku (vrijednost apscise uzmemo po volji, a vrijednost ordinate izračunamo):



$$\left.\begin{array}{l}3x+4y-12=0\\x=0\end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0+4y-12=0 \Rightarrow 4y=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=3 \Rightarrow T(0,3).$$

Udaljenost između dva pravca jednaka je udaljenosti između točke T i drugog pravca:

$$\left.\begin{array}{l}T(0,3)\\3x+4y+13=0\end{array}\right\} \Rightarrow d=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 3+13|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5.$$

Vježba 021

Kolika je udaljenost pravaca 3x + 4y – 12 = 0, 3x + 4y + 28 = 0?

Rezultat: d = 8.

Zadatak 022 (Anamarija, hotelijerska škola)

Ako su pravci kx + 2y + 7 = 0 i x + 2ky + 5 = 0 međusobno usporedni (paralelni) tada za realni parametar k vrijedi:

A. $k=1$ B. $k=0$ C. $k=-1$ D. $k=\pm 1$ E. Ne postoji takav k

Rješenje 022

Dva su pravca međusobno usporedna ako imaju jednake koeficijente smjerova. Zato moramo jednadžbe pravaca napisati u eksplicitnom obliku (y = ax + b, gdje je a koeficijent smjera) i izjednačiti koeficijente smjerova:

$$\left.\begin{array}{l}kx+2y+7=0\\x+2ky+5=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2y=-kx-7\\2ky=-x-5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=-\frac{k}{2}\cdot x-\frac{7}{2}\\ y=-\frac{1}{2k}\cdot x-\frac{5}{12}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{koeficijenti smjerova su:}\\ -\frac{k}{2} \text{ i } -\frac{1}{2k}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{2}=-\frac{1}{2k} \Rightarrow 2k^2=2 \; /:2 \Rightarrow k^2=1 \; /\sqrt{\;} \Rightarrow k=\pm 1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 022

Ako su pravci kx + 2y + 7 = 0 i x + ky + 5 = 0 međusobno usporedni (paralelni) tada za realni parametar k vrijedi:

A. $k=2$ B. $k=0$ C. $k=1$ D. $k=\pm\sqrt{2}$ E. Ne postoji takav k

Rezultat: Odgovor je pod D.

Zadatak 023 (Marija, ekonomska škola)

Nađi one točke na osi x koje su od točke A udaljene za d, ako je A(2, 4), d = 5.

Rješenje 023

Svaka točka koja leži na osi x ima koordinate T(x, 0).

Ponovimo udaljenost dviju točaka!

Neka su A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2) dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana s

$$|AB| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

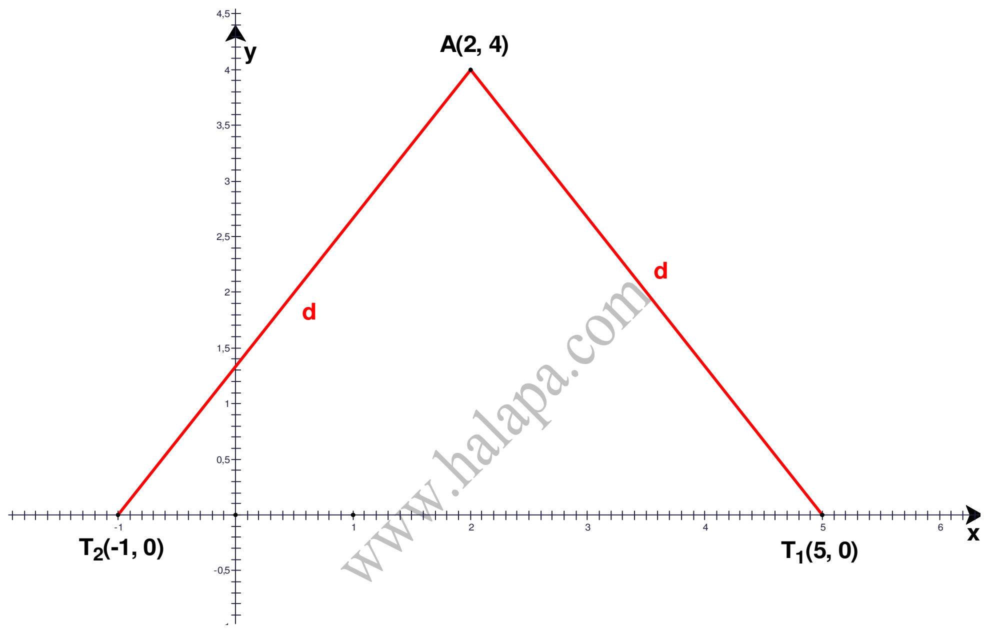
Budući da je udaljenost između točaka A i T jednaka 5, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} A(2, 4)\ ,\ T(x, 0) \\ d = |AT| = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow d = |AT| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \Rightarrow 5 = \sqrt{(x-2)^2 + (0-4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 = \sqrt{(x-2)^2 + 16}\ /^2 \Rightarrow 25 = (x-2)^2 + 16 \Rightarrow (x-2)^2 = 25 - 16 \Rightarrow (x-2)^2 = 9\ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x - 2 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \\ x - 2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2 \\ x = -3 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -1. \end{cases}$$

Točke su: $T_1(5, 0)$, $T_2(-1, 0)$.



Vježba 023

Nađi one točke na osi x koje su od točke A udaljene za d, ako je A(– 3, – 12), d = 13.

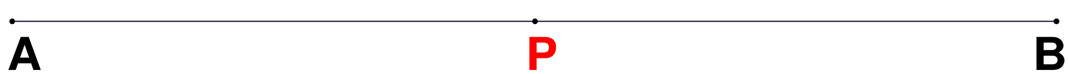
Rezultat: $T_1(2, 0)$, $T_2(-8, 0)$.

Zadatak 024 (Marija, ekonomska škola)

Ako je P polovište dužine $\overline{AB}$, odredi koordinate točke B, ako je A(3, 7), P(1, 2).

Rješenje 024

Polovište dužine je točka dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine.



Polovište dužine je točka dužine za koju vrijedi:

$$|AP| = |PB|.$$

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su:

$$P\left(x_P, y_P\right) \Rightarrow x_P = \frac{x_1 + x_2}{2}\quad,\quad y_P = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Budući da je zadana točka A i polovište P, koordinate točke B nađemo na sljedeći način:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(3, 7) \\ P(x_P, y_P) = P(1, 2) \\ B(x_2, y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_P = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_P = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = \dfrac{3 + x_2}{2} \; / \cdot 2 \\ 2 = \dfrac{7 + y_2}{2} \; / \cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = 3 + x_2 \\ 4 = 7 + y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = -1 \\ y_2 = -3. \end{array}\right.$$

Koordinate točke B su: B(– 1, – 3).

Vježba 024

Ako je P polovište dužine $\overline{AB}$, odredi koordinate točke B, ako je A(4, – 3), P(– 1, – 1).

Rezultat: B(– 6, 1).

Zadatak 025 (Danijel, pomorska škola)

Nađi ortogonalnu projekciju točke T na pravac p ako je: T(4, 1), y = 3x – 1.

Rješenje 025

Točkom T povučemo okomicu na zadani pravac y = 3x – 1.

Ponovimo uvjet okomitosti!

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni. Na primjer,

k_1	1	2	-3	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
k_2	– 1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{6}{7}$	8	– 9

Koeficijent smjera zadanog pravca y = 3x – 1 je k = 3. Znači da će okomiti pravac imati koeficijent smjera $k = -\frac{1}{3}$. Računamo jednadžbu okomice:

$$\left.\begin{array}{l} T(x_1, y_1) = T(4, 1) \\ k = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 4) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow \underbrace{y = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{7}{3}}_{\text{eksplicitni oblik}} \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{7}{3} \; / \cdot 3 \Rightarrow 3y = -x + 7 \Rightarrow \underbrace{x + 3y - 7 = 0}_{\text{implicitni oblik}}.$$

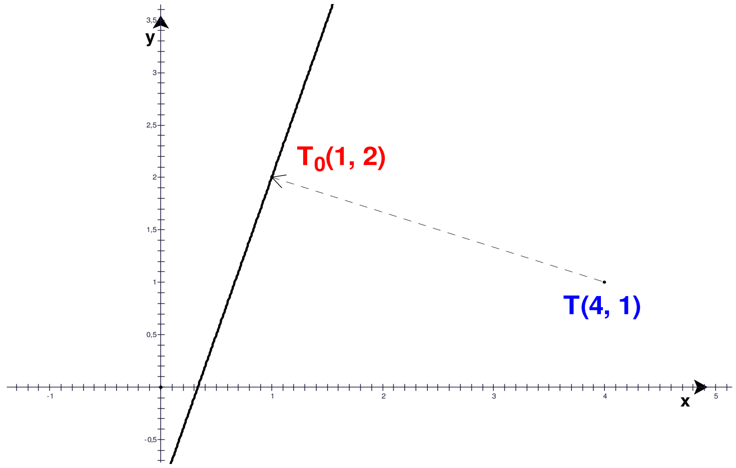
Jednadžba okomice glasi: x + 3y – 7 = 0.

Ortogonalna projekcija T_0 je presjek okomice x + 3y – 7 = 0 i pravca y = 3x – 1, tj. rješenje je sustava:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y - 7 = 0 \\ y = 3x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3y = 7 \\ -3x + y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3y = 7 \; / \cdot 3 \\ -3x + y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x + 9y = 21 \\ -3x + y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10y = 20 \; / :10 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3y = 7 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 3 \cdot 2 = 7 \Rightarrow x + 6 = 7 \Rightarrow x = 1.$$

Ortogonalna projekcija je $T_0(1, 2)$.



Vježba 025

Nađi ortogonalnu projekciju točke T na pravac p ako je: T(3, – 4), 2x – 3y – 5 = 0.

Rezultat: $T_0(1, – 1)$.

Zadatak 026 (Danijel, pomorska škola)

Nađi točku A' simetričnu točki A s obzirom na pravac p ako je: A(3, – 1), 2x – 3y + 4 = 0.

Rješenje 026

Iz točke A povučemo okomicu na pravac 2x – 3y + 4 = 0.

Ponovimo uvjet okomitosti!

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni. Na primjer,

k_1	1	2	–3	$\frac{4}{5}$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
k_2	– 1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{6}{7}$	8	– 9

Zadani pravac 2x – 3y + 4 = 0 napišemo u eksplicitnom obliku:

$$2x-3y+4=0 \Rightarrow -3y=-2x-4 \;/:(-3) \Rightarrow y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{4}{3}.$$

Njegov koeficijent smjera je $k=\frac{2}{3}$. Znači da će okomiti pravac imati koeficijent smjera $k=-\frac{3}{2}$. Računamo jednadžbu okomice:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1)=T(3,-1) \\ k=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y-y_1=k\cdot(x-x_1) \Rightarrow y+1=-\frac{3}{2}\cdot(x-3) \Rightarrow y+1=-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{9}{2}-1 \Rightarrow \underbrace{y=-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{7}{2}}_{\text{eksplicitni oblik}} \Rightarrow y=-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{7}{2} \;/\cdot 2 \Rightarrow 2y=-3\cdot x+7 \Rightarrow \underbrace{3\cdot x+2\cdot y-7=0}_{\text{implicitni oblik}}.$$

Jednadžba okomice glasi: 3x + 2y – 7 = 0.

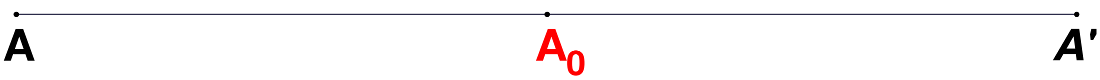
Ortogonalna projekcija A_0 je presjek okomice 3x + 2y – 7 = 0 i pravca 2x – 3y + 4 = 0, tj. rješenje je sustava:

$$\left.\begin{matrix} 3x+2y-7=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x+2y=7 \\ 2x-3y=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x+2y=7 \ /\cdot 3 \\ 2x-3y=-4 \ /\cdot 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 9x+6y=21 \\ 4x-6y=-8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x=13 \ /:13 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x+2y=7 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot 1+2y=7 \Rightarrow 3+2y=7 \Rightarrow 2y=4 \ /:2 \Rightarrow y=2.$$

Ortogonalna projekcija je $A_0(1, 2)$. Ta je točka istodobno polovište dužine $\overline{AA'}$.

Polovište dužine je točka dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine.



Polovište dužine je točka dužine za koju vrijedi:

$$|AA_0| = |A_0A'|.$$

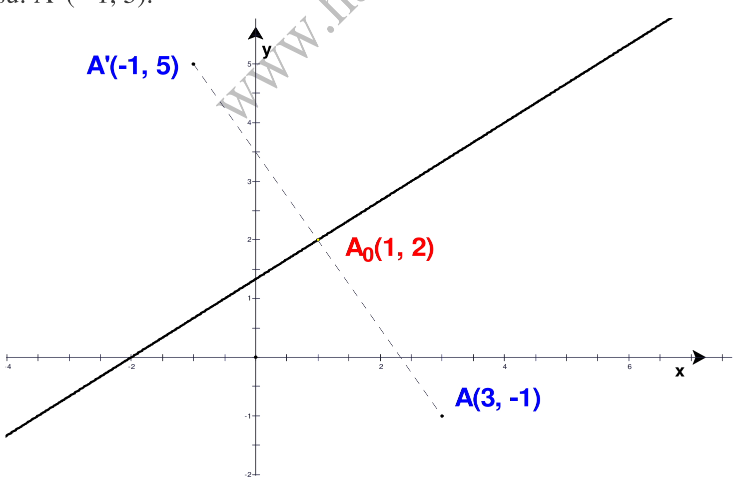
Koordinate polovišta A_0 dužine $\overline{AA'}$, $A(x_1, y_1)$, $A'(x_2, y_2)$ su:

$$A_0(x_P, y_P) \Rightarrow x_P = \frac{x_1+x_2}{2} \quad , \quad y_P = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Budući da je zadana točka A i polovište A_0, koordinate točke A' nađemo na sljedeći način:

$$\left.\begin{matrix} A(x_1, y_1) = A(3, -1) \\ A_0(x_P, y_P) = A_0(1, 2) \\ A'(x_2, y_2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_P = \frac{x_1+x_2}{2} \\ y_P = \frac{y_1+y_2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 = \frac{3+x_2}{2} \ /\cdot 2 \\ 2 = \frac{-1+y_2}{2} \ /\cdot 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 = 3+x_2 \\ 4 = -1+y_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_2 = -1 \\ y_2 = 5. \end{matrix}\right.$$

Koordinate točke A' su: A' (– 1, 5).



Vježba 026

Nađi točku A' simetričnu točki A s obzirom na pravac p ako je: A(7, 0), y = 3x – 1.

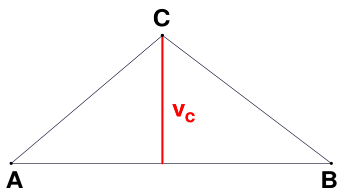
Rezultat: A' (– 5, 4).

Zadatak 027 (Danijel, pomorska škola)

Zadan je trokut s vrhovima A(– 2, – 2), B(2, 2), C(– 5, – 3). Kolika je duljina visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$?

Rješenje 027

Budući da je riječ o visini v_c iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, najprije nađemo jednadžbu pravca kroz točke A i B:



$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-2, -2) \\ B(x_2, y_2) = B(2, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 2 = \frac{2+2}{2+2} \cdot (x+2) \Rightarrow y + 2 = \frac{4}{4} \cdot (x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 2 = x + 2 \Rightarrow y = x \Rightarrow x - y = 0. \ (\text{implicitni oblik})$$

Duljina visine v_c jednaka je udaljenosti vrha C od pravca x – y = 0 (konstruiranog točkama A i B):

$$\left.\begin{array}{l} C(-5, -3) \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d = \frac{|1 \cdot (-5) - 1 \cdot (-3) + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5+3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Vježba 027

Zadan je trokut s vrhovima A(– 3, 0), B(3, 0), C(0, – 3). Kolika je duljina visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$?

Rezultat: d = 3.

Zadatak 028 (Mira, gimnazija)

Koliko je puta točka A(3, 2) udaljenija od točke B(– 1, – 2) nego točka B od točke C(– 4, 1)?

Rješenje 028

Nađemo omjer udaljenosti | AB | i | BC |:

$$\left.\begin{array}{l} A(3, 2) \\ B(-1, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32},$$

$$\left.\begin{array}{l} B(-1, -2) \\ C(-4, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow |BC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4+1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}.$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{32}{18}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}.$$

Vježba 028

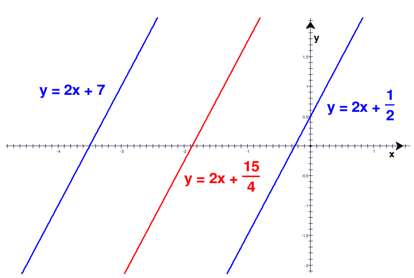
Koliko je puta točka A(3, 2) udaljenija od točke B(– 1, – 2) nego točka B od točke C(– 3, 0)?

Rezultat: 2 : 1.

Zadatak 029 (Goga, gimnazija)

Kako glasi jednadžba pravca s obzirom na kojeg su pravci 2x – y + 7 = 0 i 4x – 2y + 1 = 0 međusobno simetrični?

Rješenje 029



$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 7 = 0 \\ 4x - 2y + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y = -2x - 7 \ / \cdot (-1) \\ -2y = -4x - 1 \ / : (-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2x + 7 \\ y = 2x + \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} k_1 = k_2 = 2 \\ \text{koeficijenti smjerova su jednaki,} \\ \text{pravci su usporedni (paralelni)} \end{array}\right].$$

Traženi pravac ima isti koeficijent smjera k = 2, a odsječak na y – osi jednak je:

$$l = \frac{7 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{15}{2}}{2} = \frac{15}{4}.$$

Jednadžba pravca glasi: $y = 2x + \frac{15}{4} \ / \cdot 4 \Rightarrow 4y = 8x + 15 \Rightarrow 8x - 4y + 15 = 0.$

Vježba 029

Kako glasi jednadžba pravca s obzirom na kojeg su pravci 2x – y + 6 = 0 i 4x – 2y + 1 = 0 međusobno simetrični?

Rezultat: 8x – 4y + 13 = 0.

Zadatak 030 (Goga, gimnazija)

Ako su M(a, b) i N(c, d) dvije točke na pravcu y = k · x + l, kolika je udaljenost tih točaka?

Rješenje 030

Budući da točke M(a, b) i N(c, d) pripadaju pravcu y = k · x + l, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} M(a,b)\ ,\ y=k\cdot x+l \\ N(c,d)\ ,\ y=k\cdot x+l \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=k\cdot a+l \\ d=k\cdot c+l \end{array}\right\} \Rightarrow \left[|MN|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MN|=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}=\sqrt{(c-a)^2+(k\cdot c+l-k\cdot a-l)^2}=\sqrt{(c-a)^2+(k\cdot c-k\cdot a)^2}=$$

$$=\sqrt{(c-a)^2+k^2\cdot(c-a)^2}=\sqrt{(c-a)^2\cdot\left(1+k^2\right)}=|c-a|\cdot\sqrt{1+k^2}=|a-c|\cdot\sqrt{1+k^2}.$$

Vježba 030

Ako su M(a, a) i N(b, b) dvije točke na pravcu y = k · x + l, kolika je udaljenost tih točaka?

Rezultat: $|a-b|\cdot\sqrt{1+k^2}.$

Zadatak 031 (Anastazija, gimnazija)

Koje je sjecište parametarskih zadanih pravaca: $p_1\ \ldots \left\{\begin{array}{l} x=-2\cdot p+3 \\ y=4\cdot p-1 \end{array}\right.\ ,\quad p_2\ \ldots \left\{\begin{array}{l} x=2\cdot q-4 \\ y=q-2 \end{array}\right.$?

Rješenje 031

1.inačica

Uporabit ćemo metodu komparacije, tj. izjednačiti vrijednosti za x i za y:

$$\left\{\begin{array}{l} x=-2\cdot p+3 \\ y=4\cdot p-1 \end{array}\right. \text{ i } \left\{\begin{array}{l} x=2\cdot q-4 \\ y=q-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p+3=2\cdot q-4 \\ 4\cdot p-1=q-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p-2\cdot q=-7 \\ 4\cdot p-q=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metodom suprotnih koeficijenata} \\ \text{izračunamo jednu nepoznanicu, na primjer p} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p-2\cdot q=-7 \\ 4\cdot p-q=-1\ /\cdot(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\cdot p-2\cdot q=-7 \\ -8\cdot p+2\cdot q=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10\cdot p=-5\ /:(-10) \Rightarrow p=\frac{1}{2}.$$

Vrijednost za p uvrstimo u parametarski zadani pravac:

$$\left.\begin{array}{l} x=-2\cdot p+3 \\ y=4\cdot p-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[p=\frac{1}{2}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2\cdot\frac{1}{2}+3 \\ y=4\cdot\frac{1}{2}-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\}.$$

Sjecište je točka S(2, 1).

2.inačica

Najprije parametarski zadane pravce prevedemo u implicitni oblik, a zatim riješimo dobiveni sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} x=-2\cdot p+3 \\ y=4\cdot p-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metodom suprotnih koeficijenata} \\ \text{riješimo se parametra p} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2\cdot p+3\ /\cdot 2 \\ y=4\cdot p-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x=-4\cdot p+6 \\ y=4\cdot p-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x+y=5.$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2\cdot q-4 \\ y=q-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metodom suprotnih koeficijenata} \\ \text{riješimo se parametra q} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2\cdot q-4 \\ y=q-2\ /\cdot(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2\cdot q-4 \\ -2\cdot y=-2\cdot q+4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2\cdot y=0.$$

Dobiveni sustav jednadžbi riješimo metodom suprotnih koeficijenata:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x+y=5 \\ x-2\cdot y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x+y=5 \ /\cdot 2 \\ x-2\cdot y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot x+2\cdot y=10 \\ x-2\cdot y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 5\cdot x=10 \ /:5 \Rightarrow x=2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x-2\cdot y=0 \\ x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2-2\cdot y=0 \ /:2 \Rightarrow 1-y=0 \Rightarrow y=1.$$

Sjecište je točka S(2, 1).

Vježba 031

Koje je sjecište parametarskih zadanih pravaca: $p_1 \ \ldots \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\cdot p-5 \\ y=\frac{1}{4}\cdot p-\frac{1}{2} \end{array}\right.$, $p_2 \ \ldots \left\{\begin{array}{l} x=q+3 \\ y=-q+2 \end{array}\right.$?

Rezultat: S(2, 3).

Zadatak 032 (Anastazija, gimnazija)

Koliki kut zatvara pravac $x-\sqrt{3}\cdot y+1=0$ s osi y?

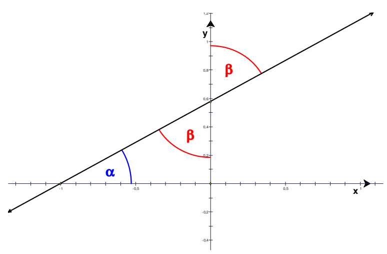
Rješenje 032

Napišimo jednadžbu pravca u eksplicitnom obliku:

$$x-\sqrt{3}\cdot y+1=0 \Rightarrow -\sqrt{3}\cdot y=-x-1 \ /:\left(-\sqrt{3}\right) \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot x+\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x+\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Iz koeficijenta smjera k odredimo kut α koji pravac zatvara s pozitivnim smjerom x – osi:



$$\left.\begin{array}{l} k=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ k=tg\,\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=30^0.$$

Sa slike vidi se da kut β koji pravac zatvara s osi y iznosi:

$$\alpha+\beta=90^0 \Rightarrow \beta=90^0-\alpha=90^0-30^0=60^0.$$

Vježba 032

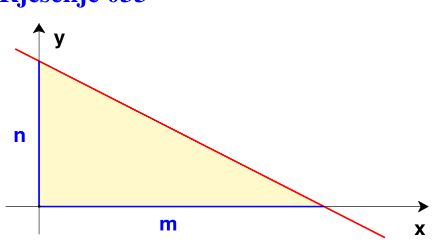
Koliki kut zatvara pravac $\sqrt{3}\cdot x+y+2=0$ s osi y?

Rezultat: 30^0.

Zadatak 033 (Anastazija, gimnazija)

Nađite k za koji površina trokuta omeđena pravcem 8 · k · x + 2 · y = 2 · k i koordinatnim osima iznosi 25.

Rješenje 033



Ponovimo!

Ako je pravac zadan u segmentnom obliku $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$, tada je površina trokuta omeđena tim pravcem i koordinatnim osima jednaka:

$$P_\Delta=\frac{|m\cdot n|}{2}.$$

Napišimo jednadžbu pravca u segmentnom obliku:

$$8 \cdot k \cdot x + 2 \cdot y = 2 \cdot k \;/ \cdot \frac{1}{2 \cdot k} \Rightarrow \frac{8 \cdot k \cdot x}{2 \cdot k} + \frac{2 \cdot y}{2 \cdot k} = 1 \Rightarrow \frac{4 \cdot x}{1} + \frac{y}{k} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{4}} + \frac{y}{k} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\Delta} = \frac{\left| \frac{1}{4} \cdot k \right|}{2} \Rightarrow 25 = \frac{\frac{1}{4} \cdot |k|}{2} \Rightarrow 25 = \frac{|k|}{8} \Rightarrow |k| = 200 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 200 \\ k_2 = -200. \end{cases}$$

Vježba 033

Nađite k za koji površina trokuta omeđena pravcem 8 · k · x + 2 · y = 2 · k i koordinatnim osima iznosi 50.

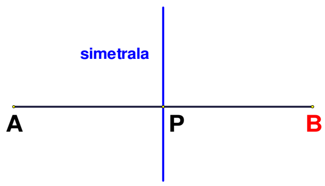
Rezultat: $k_1 = 400$, $k_2 = -400$.

Zadatak 034 (Anastazija, gimnazija)

Pravac 2x – y – 2 = 0 je simetrala dužine $\overline{AB}$. Ako je A(7, 7), nađi B(x, y).

Rješenje 034

1.inačica



Iz jednadžbe pravca 2x – y – 2 = 0 odredimo njegov koeficijent smjera:

$$2x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2x - 2 \Rightarrow k = 2.$$

Ponovimo!

Uvjet okomitosti dvaju pravaca glasi:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Tražimo jednadžbu pravca koji je okomit na zadani pravac, a prolazi točkom A:

$$\left. \begin{array}{l} k = -\frac{1}{2} \quad , \quad A(7, 7) \\ y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 7 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 7) \Rightarrow y - 7 = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2} + 7 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{21}{2}.$$

Presjek pravaca je točka P, polovište dužine $\overline{AB}$:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2 \cdot x - 2 \\ y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{21}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot x - 2 = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{21}{2} \;/ \cdot 2 \Rightarrow 4 \cdot x - 4 = -x + 21 \Rightarrow 5 \cdot x = 25 \;/ : 5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot 5 - 2 = 8 \Rightarrow P(5, 8).$$

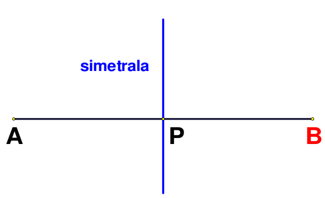
Ponovimo!

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su: $P(x_P, y_P) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Tražimo koordinate točke B:

$$\left. \begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(7, 7) \\ P(x_P, y_P) = P(5, 8) \\ B(x_2, y_2) = B(?, ?) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{x_1 + x_2}{2} = x_P \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = y_P \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{7 + x_2}{2} = 5 \;/ \cdot 2 \\ \frac{7 + y_2}{2} = 8 \;/ \cdot 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7 + x_2 = 10 \\ 7 + y_2 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_2 = 3 \\ y_2 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow B(3, 9).$$

2.inačica



Iz jednadžbe pravca 2x – y – 2 = 0 odredimo njegov koeficijent smjera:

$$2x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2x - 2 \Rightarrow k = 2.$$

Ponovimo!

Uvjet okomitosti dvaju pravaca glasi:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Tražimo jednadžbu pravca koji je okomit na zadani pravac, a prolazi točkom A:

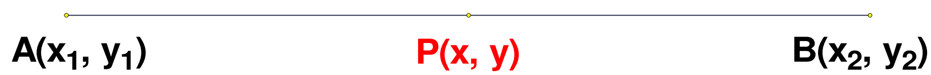
$$\left.\begin{array}{l} k=-\frac{1}{2} \quad , \quad A(7,7) \\ y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-7=-\frac{1}{2}\cdot(x-7) \Rightarrow y-7=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{7}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{7}{2}+7 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{21}{2}.$$

Presjek pravaca je točka P, polovište dužine $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{array}{l} y=2\cdot x-2 \\ y=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{21}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot x-2=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{21}{2} \;/\cdot 2 \Rightarrow 4\cdot x-4=-x+21 \Rightarrow 5\cdot x=25 \;/:5 \Rightarrow x=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=2\cdot 5-2=8 \Rightarrow P(5,8).$$

Ponovimo!



Ako je točka B(x_2, y_2) centralno simetrična točki A(x_1, y_1) u odnosu na točku P(x, y), njezine koordinate iznose:

$$\left.A\left(x_1, y_1\right), \; P(x, y), \; B\left(x_2, y_2\right)\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=x-\left(x_1-x\right) \\ y_2=y-\left(y_1-y\right) \end{array}\right\}.$$

Tražena točka B je centralno simetrična točki A(7, 7) u odnosu na polovište P(5, 8). To je točka:

$$B\left(x_2, y_2\right)=B\left(x-\left(x_1-x\right), y-\left(y_1-y\right)\right)=B(5-(7-5), 8-(7-8))=B(5-2, 8+1)=B(3,9).$$

Vježba 034

Pravac 2x – 3y + 4 = 0 je simetrala dužine $\overline{AB}$. Ako je A(3, – 1), nađi B(x, y).

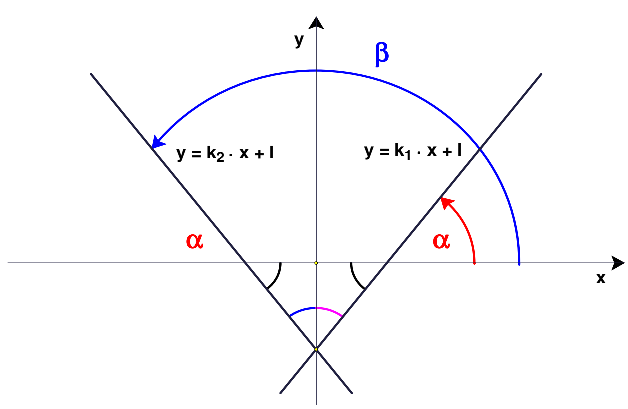
Rezultat: B(– 1, 5).

Zadatak 035 (Deny, gimnazija)

Zadan je pravac y = 2 · x – 3. Odredite jednadžbu simetričnog pravca obzirom na os y (ordinatu).

Rješenje 035

Sa slike vidi se:



$$k_1=tg\,\alpha,$$

$$k_2=tg\,\beta=tg\left(180^0-\alpha\right)=-tg\,\alpha=-k_1.$$

Pravcu y = 2 · x – 3 simetričan pravac obzirom na y os je y = – 2 · x – 3.

Vježba 035

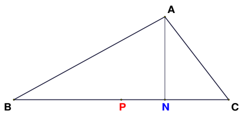
Zadan je pravac y = – 3 · x – 4. Odredite jednadžbu simetričnog pravca obzirom na os y (ordinatu).

Rezultat: y = 3 · x – 4.

Zadatak 036 (Ante, elektrotehnička škola)

Točka C(2, 2) je vrh trokuta ABC. Visina trokuta povučena iz vrha A pripada pravcu $2 \cdot x - 3 \cdot y + 12 = 0$, a težišnica povučena iz vrha A pravcu $x + y = 0$. Nađite koordinate vrha B.

Rješenje 036



Stranica $\overline{BC}$ pripada pravcu koji prolazi točkom C i okomit je na visinu AN. Njegova jednadžba dobije se na sljedeći način:

$$2 \cdot x - 3 \cdot y + 12 = 0 \Rightarrow -3 \cdot y = -2 \cdot x - 12 \;/:(-3) \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{koeficijent smjera pravca AN}, \; k = \frac{2}{3} \\ \text{koeficijent smjera pravca BC}, \; k = -\frac{3}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{jednadžba pravca kroz jednu točku} \\ C(2, 2), \; k = -\frac{3}{2}, \; y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{2} \cdot x + 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x + 5 \;/ \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot y = -3 \cdot x + 10 \Rightarrow 3 \cdot x + 2 \cdot y = 10.$$

Presjek tog pravca s pravcem gdje je težišnica daje polovište P stranice $\overline{BC}$:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 2 \cdot y = 10 \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 2 \cdot y = 10 \\ x + y = 0 \;/ \cdot (-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 2 \cdot y = 10 \\ -2 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 10 \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -10 \Rightarrow P(10, -10).$$

Budući da je točka P polovište stranice $\overline{BC}$, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} B(x_B, y_B), \; C(x_C, y_C) = C(2, 2) \\ P(x_P, y_P) = P(10, -10) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_P = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_P = \frac{y_B + y_C}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 = \frac{x_B + 2}{2} \;/ \cdot 2 \\ -10 = \frac{y_B + 2}{2} \;/ \cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 20 = x_B + 2 \\ -20 = y_B + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_B = 18 \\ y_B = -22 \end{array}\right\} \Rightarrow B(18, -22).$$

Vježba 036

Točka C(2, 2) je vrh trokuta ABC. Visina trokuta povučena iz vrha A pripada pravcu $2 \cdot x - 3 \cdot y + 12 = 0$, a težišnica povučena iz vrha A pravcu $x + y = 0$. Nađite $|BC|$.

Rezultat: $8 \cdot \sqrt{13}.$

Zadatak 037 (Ivan, strojarska škola)

Pravci $-a \cdot x + y - 3 = 0$, $x - b \cdot y + 2 = 0$ sijeku se u središtu kružnice $x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y - 10 = 0$. Nađite kut među njima.

Rješenje 037

Ponovimo!

Kut φ između dva pravca koji su određeni jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$ i $y = k_2 \cdot x + l_2$:

$$tg\, \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Prvo napišemo opću jednadžbu kružnice kako bismo odredili njezino središte:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y - 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + y^2 + 4 \cdot y - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2\cdot x+1^2-1^2+y^2+4\cdot y+2^2-2^2-10=0 \Rightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4-10=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=15 \Rightarrow [\text{središte kružnice}] \Rightarrow S(1,-2).$$

Budući da se pravci sijeku u točki S, njezine koordinate uvrstimo u jednadžbe pravaca:

$$\left.\begin{array}{l} S(x,y)=S(1,-2) \\ -a\cdot x+y-3=0 \\ x-b\cdot y+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a\cdot 1+(-2)-3=0 \\ 1-b\cdot(-2)+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a-2-3=0 \\ 1+2\cdot b+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-5 \\ b=-\frac{3}{2} \end{array}\right\}.$$

Da bismo odredili koeficijente smjera, napisat ćemo jednadžbe pravaca u eksplicitnom obliku:

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot x+y-3=0 \\ x+\frac{3}{2}\cdot y+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-5\cdot x+3 \\ \frac{3}{2}\cdot y=-x-2\ /\cdot\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-5\cdot x+3 \\ y=-\frac{2}{3}\cdot x-\frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=-5 \\ k_2=-\frac{2}{3} \end{array}\right\}.$$

Kut između pravaca iznosi:

$$tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| \Rightarrow tg\,\varphi=\left|\frac{-\frac{2}{3}+5}{1+(-5)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}\right| \Rightarrow tg\,\varphi=\left|\frac{\frac{13}{3}}{1+\frac{10}{3}}\right| \Rightarrow tg\,\varphi=\left|\frac{\frac{13}{3}}{\frac{13}{3}}\right| \Rightarrow tg\,\varphi=1 \Rightarrow \varphi=45^0.$$

Vježba 037

Pravci $-a\cdot x+y-3=0$, $x-b\cdot y+2=0$ sijeku se u središtu kružnice $x^2+y^2-2\cdot x+4\cdot y-4=0$. Nađite kut među njima.

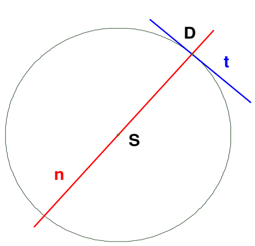
Rezultat: 45°.

Zadatak 038 (3A, hotelijerska škola)

Dva pravca su istodobno tangente na parabolu $y^2=3\cdot x$ i normale na kružnicu $x^2-2\cdot x+y^2-4\cdot y=4$. Koliko iznosi zbroj njihovih koeficijenata smjerova?

Rješenje 038

Ponovimo!



Ako je pravac t tangenta na kružnicu u točki D, tada je normala pravac n koji prolazi točkom D i okomit je na tangentu. Normala kružnice uvijek prolazi njezinim središtem.

Tjemena jednadžba parabole glasi: $y^2=2\cdot p\cdot x$

Fokus parabole: $F\left(\frac{p}{2},0\right)$

Uvjet da pravac $y=k\cdot x+l$ bude tangenta parabole: $p=2\cdot k\cdot l$

Jednadžbu kružnice napišemo u obliku:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2,$$

kako bismo odredili njezino središte:

$$x^2-2\cdot x+y^2-4\cdot y=4 \Rightarrow x^2-2\cdot x+1^2-1^2+y^2-4\cdot y+2^2-2^2=4 \Rightarrow (x-1)^2-1+(y-2)^2-4=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=9 \Rightarrow [\text{središte kružnice ima koordinate}] \Rightarrow S(1,2).$$

Neka su jednadžbe pravaca:

$$\left.\begin{array}{l} p_1\ \ldots\ y=k_1\cdot x+l_1 \\ p_2\ \ldots\ y=k_2\cdot x+l_2 \end{array}\right\}.$$

Budući da su pravci normale kružnice, prolaze njezinim središtem pa proizlazi:

$$\left.\begin{array}{c} S(1,2) \\ y=k_1\cdot x+l_1\ ,\ y=k_2\cdot x+l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2=k_1+l_1 \\ 2=k_2+l_2 \end{array}\right\}.$$

Pravci p_1 i p_2 tangente su na parabolu $y^2 = 3 \cdot x$. Zbog uvjeta tangencijalnosti $(p = 2 \cdot k \cdot l)$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot k_1 \cdot l_1 = \frac{3}{2} \\ 2 \cdot k_2 \cdot l_2 = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot k_1 \cdot l_1 = \frac{3}{2} \; /:2 \\ 2 \cdot k_2 \cdot l_2 = \frac{3}{2} \; /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 \cdot l_1 = \frac{3}{4} \\ k_2 \cdot l_2 = \frac{3}{4} \end{array}\right\}.$$

Dobili smo dva identična sustava jednadžbi

$$\left.\begin{array}{l} k_1 + l_1 = 2 \\ k_1 \cdot l_1 = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \quad \text{i} \quad \left.\begin{array}{l} k_2 + l_2 = 2 \\ k_2 \cdot l_2 = \frac{3}{4} \end{array}\right\}.$$

Riješimo prvi sustav:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 + l_1 = 2 \\ k_1 \cdot l_1 = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 + l_1 = 2 \\ l_1 = \frac{3}{4 \cdot k_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 + \frac{3}{4 \cdot k_1} = 2 \; / \cdot 4 \cdot k_1 \Rightarrow 4 \cdot k_1^2 - 8 \cdot k_1 + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(k_1\right)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow \left(k_1\right)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} \Rightarrow \left(k_1\right)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(k_1\right)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8} \Rightarrow \left(k_1\right)_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{8} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(k_1\right)_1 = \frac{8+4}{8} \\ \left(k_1\right)_2 = \frac{8-4}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(k_1\right)_1 = \frac{12}{8} \\ \left(k_1\right)_2 = \frac{4}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(k_1\right)_1 = \frac{3}{2} \\ \left(k_1\right)_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Budući da drugi sustav daje ista rješenja, vrijedi:

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{3}{2}.$$

Zbroj koeficijenata smjerova iznosi:

$$k_1 + k_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Vježba 038

Dva pravca su istodobno tangente na parabolu $y^2 = 3 \cdot x$ i normale na kružnicu $x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 4 \cdot y = 4$. Koliko iznosi umnožak njihovih koeficijenata smjerova?

Rezultat: $\frac{3}{4}$.

Zadatak 039 (Kety, gimnazija)

Broj točaka koje leže na kružnici $x^2 + y^2 = 2$, a jednako su udaljene od pravaca $x + 2y - 1 = 0$ i $x - 2y + 3 = 0$ je

A. 0 B. 3 C. 1 D. 2 E. 4

Rješenje 039

Ponovimo!

Jednadžbe simetrala kutova što ih određuju dva ukrštena pravca

$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0, \end{cases}$$

glase:

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Budući da ukršteni pravci određuju četiri kuta, sve točke na simetralama tih kutova imaju svojstvo da su do oba pravca jednako udaljene. Broj točaka odredit ćemo tako da nađemo sjecišta simetrala i kružnice.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+2\cdot y-1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{x-2\cdot y+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\\[2ex] \dfrac{x+2\cdot y-1}{\sqrt{1^2+2^2}}=-\dfrac{x-2\cdot y+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{x+2\cdot y-1}{\sqrt{5}}=\dfrac{x-2\cdot y+3}{\sqrt{5}} \;/\cdot\sqrt{5}\\[2ex] \dfrac{x+2\cdot y-1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{x-2\cdot y+3}{\sqrt{5}} \;/\cdot\sqrt{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+2\cdot y-1=x-2\cdot y+3\\ x+2\cdot y-1=-x+2\cdot y-3\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}4\cdot y=4 \;/:4\\ 2\cdot x=-2 \;/:2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=1\\ x=-1\end{array}\right\}.$$

Tražimo sjecišta simetrale y = 1 i kružnice $x^2 + y^2 = 2$:

$$\left.\begin{array}{l}y=1\\ x^2+y^2=2\end{array}\right\} \Rightarrow x^2+1^2=2 \Rightarrow x^2+1=2 \Rightarrow x^2=1 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}A(1,1)\\ B(-1,1)\end{array}\right\}.$$

Tražimo sjecišta simetrale x = – 1 i kružnice $x^2 + y^2 = 2$:

$$\left.\begin{array}{l}x=-1\\ x^2+y^2=2\end{array}\right\} \Rightarrow (-1)^2+y^2=2 \Rightarrow 1+y^2=2 \Rightarrow y^2=1 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}C(-1,1)\\ D(-1,-1)\end{array}\right\}.$$

Ukupno su tri točke. Odgovor je pod B.

Vježba 039

Broj točaka koje leže na kružnici $x^2 + y^2 = 1$, a jednako su udaljene od pravaca x + 2y – 1 = 0 i x – 2y + 3 = 0 je

A. 0 B. 3 C. 1 D. 2 E. 4

Rezultat: Odgovor je pod D.

Zadatak 040 (Tea, studentica)

Parametarsku jednadžbu pravca $p \equiv \begin{cases} x=1+2\cdot t\\ y=-3+t\\ z=5-2\cdot t\end{cases}$ napišite u kanonskom obliku.

Rješenje 040

Ponovimo!

Parametarski oblik jednadžbe pravca glasi:

$$p \equiv \begin{cases} x=x_1+t\cdot l\\ y=y_1+t\cdot m\\ z=z_1+t\cdot n,\end{cases}$$

gdje je $T_1 = T_1(x_1, y_1, z_1)$ jedna točka pravca, r = (x, y, z) radij vektor neke po volji odabrane točke pravca, c = (l, m, n) vektor smjera, t parametar.

Eliminacijom parametra t dobije se kanonski oblik jednadžbe pravca:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}.$$

Računamo parametar t iz svake jednadžbe i zatim ga eliminiramo:

$$\left.\begin{array}{l}x=1+2\cdot t\\ y=-3+t\\ z=5-2\cdot t\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2\cdot t=1-x\\ -t=-3-y\\ 2\cdot t=5-z\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-2\cdot t=1-x \;/:(-2)\\ -t=-3-y \;/\cdot(-1)\\ 2\cdot t=5-z \;/:2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}t=\dfrac{1-x}{-2}\\ t=3+y\\ t=\dfrac{5-z}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}t=\dfrac{x-1}{2}\\ t=\dfrac{y+3}{1}\\ t=\dfrac{z-5}{-2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{kanonski}\\ \text{oblik}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-5}{-2}.$$

Vježba 040

Parametarsku jednadžbu pravca $p \equiv \begin{cases} x = 1 - 2 \cdot t \\ y = -3 - t \\ z = 1 - 2 \cdot t \end{cases}$ napišite u kanonskom obliku.

Rezultat: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{-2}.$