**Zadatak 041 (Tea, studentica)**

Odredite odreske koje na koordinatnim osima odsijeca ravnina 2 · x + 3 · y + 4 · z – 12 = 0.

**Rješenje 041**

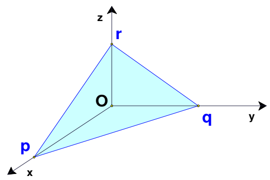
Ponovimo!

Segmentni oblik jednadžbe ravnine glasi:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1,$$

gdje su brojevi p, q, r duljine odrezaka na koordinatnim osima.

Jednadžbu ravnine moramo napisati u segmentnom obliku da bismo dobili odreske na koordinatnim osima.




$$2\cdot x+3\cdot y+4\cdot z-12=0 \Rightarrow 2\cdot x+3\cdot y+4\cdot z=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x+3\cdot y+4\cdot z=12 \;/:12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot x}{12}+\frac{3\cdot y}{12}+\frac{4\cdot z}{12}=1 \Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} p=6 \\ q=4 \\ r=3 \end{matrix}\right\}.$$

**Vježba 041**

Odredite odreske koje na koordinatnim osima odsijeca ravnina x + 3 · y + 4 · z – 12 = 0.

**Rezultat:** p = 12, q = 4, r = 3.

**Zadatak 042 (Marko, elektrotehnička škola)**

Koliko je puta točka A(3, 2) udaljenija od točke B(– 1, – 2) nego točka B od točke C(– 4, 1)?

**Rješenje 042**

Ponovimo!

Udaljenost točaka $A\left(x_A, y_A\right)$ i $B\left(x_B, y_B\right)$:

$$|AB|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}.$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Računamo omjer | AB | i | BC |:

$$\left.\begin{matrix} A\left(x_A, y_A\right)=A(3, 2) \\ B\left(x_B, y_B\right)=B(-1, -2) \\ C\left(x_C, y_C\right)=C(-4, 1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|}=\frac{\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}}{\sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|}=\sqrt{\frac{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|}=\sqrt{\frac{(-1-3)^2+(-2-2)^2}{(-4+1)^2+(1+2)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|}=\sqrt{\frac{(-4)^2+(-4)^2}{(-3)^2+3^2}} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|}=\sqrt{\frac{16+16}{9+9}} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|}=\sqrt{\frac{2\cdot 16}{2\cdot 9}} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|}=\sqrt{\frac{16}{9}} \Rightarrow \frac{|AB|}{|BC|}=\frac{4}{3}.$$

**Vježba 042**

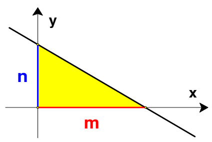
Koliko je puta točka A(1, 1) udaljenija od točke B(3, 3) nego točka B od točke C(5, 5)?

**Rezultat:** | AB | = | BC |.

**Zadatak 043 (Betty, gimnazija)**

Nađite k za koji površina trokuta omeđena pravcem 8 · k · x + 2 · y = 2 · k i koordinatnim osima iznosi 25.

**Rješenje 043**




$$8 \cdot k \cdot x + 2 \cdot y = 2 \cdot k \Rightarrow 8 \cdot k \cdot x + 2 \cdot y = 2 \cdot k \;/ \cdot \frac{1}{2 \cdot k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8 \cdot k \cdot x}{2 \cdot k} + \frac{2 \cdot y}{2 \cdot k} = 1 \Rightarrow \frac{4 \cdot x}{1} + \frac{y}{k} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{4}} + \frac{y}{k} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = \frac{1}{4} \;,\; n = k \\ P = \frac{|m \cdot n|}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\left| \frac{1}{4} \cdot k \right|}{2} = 25 \;/ \cdot 2 \Rightarrow \left| \frac{1}{4} \cdot k \right| = 50 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot |k| = 50 \;/ \cdot 4 \Rightarrow |k| = 200 \Rightarrow k = \pm 200.$$

**Vježba 043**

Nađite k za koji površina trokuta omeđena pravcem 8 · k · x + 2 · y = 2 · k i koordinatnim osima iznosi 20.

**Rezultat:** k = ± 160.

**Zadatak 044 (Maturant, gimnazija)**

Točka C(2, 2) vrh je trokuta ABC. Visina povučena iz vrha A leži na pravcu 2 x – 3y + 12 = 0, a težišnica povučena iz vrha A na pravcu x + y = 0. Nađite koordinate vrha B.

**Rješenje 044**

Visina iz vrha A leži na pravcu 2x – 3y + 12 = 0 pa je pravac BC okomit na nj. Znači da su im koeficijenti smjerova međusobno suprotni i recipročni brojevi:



$$2 \cdot x - 3 \cdot y + 12 = 0 \Rightarrow -3 \cdot y = -2 \cdot x - 12 \;/ : (-3) \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot x + 4 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_1 = \frac{2}{3} \\ k_2 = -\frac{1}{k_1} \end{array} \right\} \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}.$$

Budući da je zadana točka C i koeficijent smjera $k_2$, lako odredimo jednadžbu pravca BC:

$$\left. \begin{array}{l} C(x_1, y_1) = C(2, 2) \;,\; k_2 = -\frac{3}{2} \\ y - y_1 = k_2 \cdot (x - x_1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{2} \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{2} \cdot x + 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \cdot x + 5.$$

Presjek P simetrale x + y = 0 i pravca $y = -\frac{3}{2} \cdot x + 5$ dobije se rješavanjem sustava jednadžbi:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \cdot x + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = -x \\ y = -\frac{3}{2} \cdot x + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -x = -\frac{3}{2} \cdot x + 5 \;/ \cdot 2 \Rightarrow -2 \cdot x = -3 \cdot x + 10 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{polovište stranice } BC \\ P(10, -10) \end{array} \right].$$

Tražimo koordinate vrha B. Budući da je točka P polovište dužine $\overline{BC}$, slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} C(2, 2) \;,\; B(x, y) \\ P(10, -10) = P\left( \frac{2 + x}{2}, \frac{2 + y}{2} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{2 + x}{2} = 10 \\ \frac{2 + y}{2} = -10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 + x = 20 \\ 2 + y = -20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 18 \\ y = -22 \end{array} \right\} \Rightarrow B(18, -22).$$

**Vježba 044**

Točka C(2, 2) vrh je trokuta ABC. Visina povučena iz vrha A leži na pravcu 2 x – 3y + 12 = 0, a težišnica povučena iz vrha A na pravcu x + y = 0. Nađite koordinate polovišta stranice $\overline{BC}$.

**Rezultat:** $P(10, -10)$.

**Zadatak 045 (Deny, TUPŠ)**

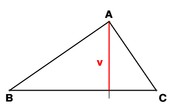
Vrhovi trokuta su točke A(– 2, 1), B(– 1, – 1), C(2, 1). Nađite jednadžbu pravca na kojem leži visina spuštena iz vrha A.

**Rješenje 045**

Pravac kroz točke B i C ima koeficijent smjera $k_1$:

$$\left.\begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(-1, -1) \\ C(x_2, y_2) = C(2, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow k_1 = \frac{1+1}{2+1} \Rightarrow k_1 = \frac{2}{3}.$$

Budući da je pravac na kojem leži visina spuštena iz vrha A okomit na pravac BC, imat će koeficijent smjera $k_2$:




$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2 = -\frac{3}{2}.$$

Jednadžba traženog pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} k_2 = -\frac{3}{2}\ ,\ A(x_1, y_1) = A(-2, 1) \\ y - y_1 = k_2 \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2} \cdot (x+2) \Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2} \cdot x - 3 \ / \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot y - 2 = -3 \cdot x - 6 \Rightarrow 3 \cdot x + 2 \cdot y + 4 = 0.$$

**Vježba 045**

Vrhovi trokuta su točke A(– 2, 1), B(– 1, – 1), C(2, 1). Nađite jednadžbu pravca na kojem leži visina spuštena iz vrha C.

**Rezultat:** x – 2 · y = 0.



**Zadatak 046 (Mirna, srednja škola)**

Nađite onu točku osi y koja je jednako udaljena od točaka $T_1(2, 4)$ i $T_2(4, 6)$.

**Rješenje 046**

Ponovimo!

Ako su u ravnini zadane točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ njihova udaljenost $|AB|$ računa se po formuli:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Točka T pripada y osi pa ima koordinate T(0, y). Budući da je jednako udaljena od točaka $T_1$ i $T_2$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T(0, y) = T(x, y) \\ T_1(2, 4) = T_1(x_1, y_1) \\ T_2(4, 6) = T_2(x_2, y_2) \end{array}\right\} \Rightarrow |TT_1| = |TT_2| \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-0)^2 + (4-y)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (6-y)^2} \Rightarrow \sqrt{4 + (4-y)^2} = \sqrt{16 + (6-y)^2} \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + (4-y)^2 = 16 + (6-y)^2 \Rightarrow 4 + 16 - 8 \cdot y + y^2 = 16 + 36 - 12 \cdot y + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 16 - 8 \cdot y + y^2 = 16 + 36 - 12 \cdot y + y^2 \Rightarrow 4 - 8 \cdot y = 36 - 12 \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; -8 \cdot y + 12 \cdot y = 36 - 4 \;\Rightarrow\; 4 \cdot y = 32 \; /:4 \;\Rightarrow\; y = 8 \;\Rightarrow\; T(0, 8).$$

**Vježba 046**

Nađite onu točku osi x koja je jednako udaljena od točaka $T_1(2, 4)$ i $T_2(4, 6)$.

**Rezultat:** T(8, 0).

**Zadatak 047 (Anamarija, maturantica TUPŠ-a)**

Koordinatne osi i pravci x = 2 i y = – 1 omeđuju četverokut. Nađite jednadžbe pravaca na kojima leže njegove dijagonale?

**Rješenje 047**

Ponovimo!

Jednadžba pravca točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

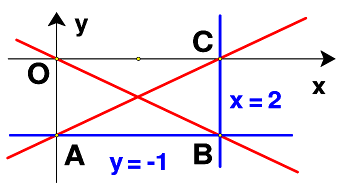
Segmentni oblik jednadžbe pravca:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, \; m - \text{odsječak na } x \text{ osi}, \; n - \text{odsječak na } y \text{ osi}.$$

Jednadžba pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava:

$$y = k \cdot x, \; k - \text{koeficijent smjera}$$

1.inačica




Dijagonala $\overline{OB}$ leži na pravcu OB čija jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} O(x_1, y_1) = O(0, 0) \;,\; B(x_2, y_2) = B(2, -1) \\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y - 0 = \frac{-1-0}{2-0} \cdot (x - 0) \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2} \cdot x \; /\cdot 2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot y = -x \;\Rightarrow\; x + 2 \cdot y = 0.$$

Dijagonala $\overline{AC}$ leži na pravcu AC čija jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(0, -1) \;,\; C(x_2, y_2) = C(2, 0) \\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \; y + 1 = \frac{0+1}{2-0} \cdot (x - 0) \;\Rightarrow\; y + 1 = \frac{1}{2} \cdot x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y = \frac{1}{2} \cdot x - 1 \; /\cdot 2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot y = x - 2 \;\Rightarrow\; x - 2 \cdot y - 2 = 0.$$

2.inačica

Dijagonala $\overline{OB}$ leži na pravcu koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Jednadžba pravca glasi:

$$y = k \cdot x.$$

Da bismo odredili koeficijent smjera k uvrstit ćemo koordinate točke B u jednadžbu pravca (jer točka B pripada pravcu):

$$\left.\begin{array}{l} B(x, y) = B(2, -1) \\ y = k \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \; -1 = k \cdot 2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot k = -1 \;\Rightarrow\; k = -\frac{1}{2}.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x \; /\cdot 2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot y = -x \;\Rightarrow\; x + 2 \cdot y = 0.$$

Dijagonala $\overline{AC}$ leži na pravcu koji siječe koordinatne osi u točkama A(0, – 1), C(2, 0) pa preko segmentnog oblika dobijemo implicitni oblik jednadžbe pravca:

$$\left.\begin{array}{l} m=2\ ,\ n=-1 \\ \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{-1}=1\ /\cdot 2 \Rightarrow x-2\cdot y=2 \Rightarrow x-2\cdot y-2=0.$$

**Vježba 047**

Koordinatne osi i pravci x = 2 i y = 2 omeđuju četverokut. Nađite jednadžbe pravaca na kojima leže njegove dijagonale?

**Rezultat:** $x-y=0$ , $x+y-2=0$.

**Zadatak 048 (Jaca, srednja škola)**

Dvije stranice kvadrata leže na pravcima $p_1 \ldots x+y-3=0$ i $p_2 \ldots 3\cdot x+3\cdot y+1=0$. Izračunati površinu kvadrata.

**Rješenje 048**

Ponovimo!

Uvjet usporednosti (paralelnosti) za dva pravca koji su određeni jednadžbama

$$y=k_1\cdot x+l_1 \text{ i } y=k_2\cdot x+l_2$$

glasi:

$$k_1=k_2.$$

Neka su usporedni (paralelni) pravci zadani jednadžbama

$$p_1 \ldots A\cdot x+B\cdot y+C_1=0 \text{ i } p_2 \ldots A\cdot x+B\cdot y+C_2=0.$$

Formula za izračunavanje međusobne udaljenosti usporednih (paralelnih) pravaca $p_1$ i $p_2$ glasi:

$$d\left(p_1,\ p_2\right)=\frac{\left|C_1-C_2\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$



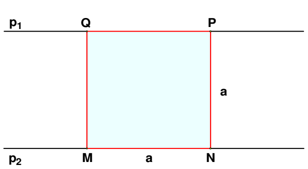
Jednadžbe pravaca napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili koeficijente smjerova:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-3=0 \\ 3\cdot x+3\cdot y+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-x+3 \\ 3\cdot y=-3\cdot x-1\ /:3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-x+3 \\ y=-x-\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=-1 \\ k_2=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1=k_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pravci su} \\ \text{usporedni} \end{array}\right].$$

Jednadžbu pravca x + y – 3 = 0 pomnožimo sa 3:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \ldots x+y-3=0\ /\cdot 3 \\ p_2 \ldots 3\cdot x+3\cdot y+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot x+3\cdot y-9=0 \\ 3\cdot x+3\cdot y+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1=-9 \\ C_2=1 \end{array}\right\}.$$

Duljina stranice kvadrata iznosi:




$$a=d\left(p_1,\ p_2\right)=\frac{\left|-9-1\right|}{\sqrt{3^2+3^2}}=\frac{\left|-10\right|}{\sqrt{9+9}}=\frac{10}{\sqrt{18}}.$$

Površina kvadrata je:

$$P=a^2 \Rightarrow P=\left(\frac{10}{\sqrt{18}}\right)^2 \Rightarrow P=\frac{100}{18} \Rightarrow P=\frac{50}{9} \Rightarrow P=5\frac{5}{9}.$$

**Vježba 048**

Dvije stranice kvadrata leže na pravcima $p_1 \ldots x+y-3=0$ i $p_2 \ldots 3\cdot x+3\cdot y+3=0$. Izračunati površinu kvadrata.

**Rezultat:** 8.

**Zadatak 049 (Viki, srednja škola)**

Dio pravca $3\cdot x-4\cdot y=1$ koji leži između usporednih pravaca $y=x$ i $y=x-n$ duljine je 5. Nađite n.

**Rješenje 049**

Ponovimo!

Ako su u ravnini zadane točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ njihova udaljenost $|AB|$ računa se po formuli:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad , \quad |x| = a \ , \ a > 0 \Rightarrow x_1 = -a \ , \ x_2 = a \quad , \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

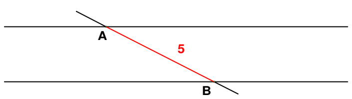
Nađimo presjek pravca s usporednim pravcima tako što ćemo riješiti sustave jednadžbi:

- $$\left.\begin{matrix} 3 \cdot x - 4 \cdot y = 1 \\ y = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \cdot x - 4 \cdot x = 1 \Rightarrow -x = 1 \ / \cdot (-1) \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -1 \\ y = x \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(-1, -1).$$
- $$\left.\begin{matrix} 3 \cdot x - 4 \cdot y = 1 \\ y = x - n \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow 3 \cdot x - 4 \cdot (x - n) = 1 \Rightarrow 3 \cdot x - 4 \cdot x + 4 \cdot n = 1 \Rightarrow -x + 4 \cdot n = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -x = -4 \cdot n + 1 \ / \cdot (-1) \Rightarrow x = 4 \cdot n - 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 4 \cdot n - 1 \\ y = x - n \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 4 \cdot n - 1 - n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 3 \cdot n - 1 \Rightarrow B(4 \cdot n - 1, 3 \cdot n - 1).$$

Budući da je udaljenost točaka A i B jednaka 5, slijedi:

$$\left.\begin{matrix} A(x_1, y_1) = A(-1, -1) \\ B(x_2, y_2) = B(4 \cdot n - 1, 3 \cdot n - 1) \\ |AB| = 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{(4 \cdot n - 1 + 1)^2 + (3 \cdot n - 1 + 1)^2} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(4 \cdot n)^2 + (3 \cdot n)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{16 \cdot n^2 + 9 \cdot n^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{25 \cdot n^2} = 5 \Rightarrow |5 \cdot n| = 5 \Rightarrow 5 \cdot |n| = 5 \ /:5 \Rightarrow$$




$$\Rightarrow |n| = 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} n_1 = -1 \\ n_2 = 1 \end{matrix}\right\}.$$

**Vježba 049**

Dio pravca $3 \cdot x - 4 \cdot y = 1$ koji leži između usporednih pravaca $y = x$ i $y = x - n$ duljine je 10. Nađite n.

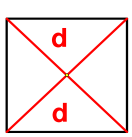
**Rezultat:** $n_1 = -2$, $n_2 = 2$.

**Zadatak 050 (Iva, gimnazija)**

Kolika je površina kvadrata čiji je jedan vrh u točki $(-1, 5)$, a čija dijagonala leži na pravcu $x - 2 \cdot y + 3 = 0$?

**Rješenje 050**

Ponovimo!

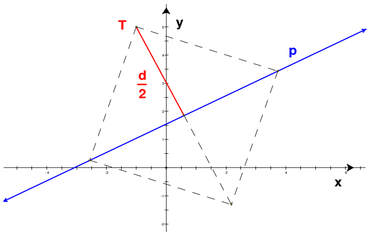



Kvadrat je pravokutnik kojemu su sve stranice sukladne. Dijagonale kvadrata međusobno su sukladne i okomite. Površina kvadrata izračunava se po formuli:

$$P = \frac{1}{2} \cdot d^2.$$

Udaljenost točke $T(x_0, y_0)$ od pravca $p \ldots A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ računa se po formuli

$$|Tp| = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$




Sa slike vidi se da je udaljenost točke T od pravca p jednaka polovici duljine dijagonale kvadrata

$$\left.\begin{array}{l} T(x_0, y_0) = T(-1, 5) \\ x - 2 \cdot y + 3 = 0 \\ A = 1\ ,\ B = -2\ ,\ C = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\frac{d}{2} = \frac{\left|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{\left|1 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 + 3\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{\left|-1 - 10 + 3\right|}{\sqrt{1 + 4}} \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{\left|-8\right|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{8}{\sqrt{5}} \ / \cdot 2 \Rightarrow d = \frac{16}{\sqrt{5}}.$$

Površina kvadrata iznosi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot d^2 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{\sqrt{5}}\right)^2 \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot \frac{256}{5} \Rightarrow P = \frac{128}{5} \Rightarrow P = 25.6.$$

**Vježba 050**

Kolika je površina kvadrata čiji je jedan vrh u točki (– 1, 5), a čija dijagonala leži na pravcu x + y + 3 = 0?

**Rezultat:** 49.

**Zadatak 051 (Nina, gimnazija)**

Ako je T(a, b) točka pravca y = x – 2 koja je najbliža točki A(2, 2), nađite $a^2 + b^2$.

**Rješenje 051**

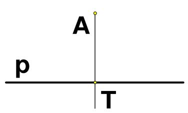
Ponovimo!

Uvjet okomitosti dva pravca koji su određeni jednadžbama $y = a_1 \cdot x + b_1$ i $y = a_2 \cdot x + b_2$ glasi:

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}.$$



Jednadžba pravca točkom $T(x_1, y_1)$ kojemu je zadan koeficijent smjera a:




$$y - y_1 = a \cdot (x - x_1).$$

Iz točke A konstruiramo okomicu na zadani pravac y = x – 2.
Nožište točke A je tražena točka T(a, b).

Koeficijent okomice je – 1 jer je okomita na pravac y = x – 2:

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 2 \\ a_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = -\dfrac{1}{a_1} \end{array}\right\} \Rightarrow a_2 = -1.$$

Jednadžba okomice iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(2, 2) \\ a_2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow y - y_1 = a_2 \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 2 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 2 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 4.$$

Presjek pravaca y = x – 2 i y = – x + 4 je točka T(a, b):

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = -x + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot y = 2 \ /: 2 \quad y = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -x + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = -x + 4 \Rightarrow x = 4 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4 - 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T(x, y) = T(3, 1) \\ T(a, b) = T(x, y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10.$$

**Vježba 051**

Ako je T(a, b) točka pravca y = x – 2 koja je najbliža točki A(2, 2), nađite $a^3 + b^3$.

**Rezultat:** 28.

**Zadatak 052 (Ines, gimnazija)**

Prikaži grafički skup svih točaka ravnine za čije koordinate x i y vrijedi $(x + 1)^2 = (y - 1)^2$.

**Rješenje 052**

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Ako je $|a| = |b|$, onda je $a = b$ ili $a = -b$.

1.inačica

$$(x+1)^2 = (y-1)^2 \Rightarrow (x+1)^2 - (y-1)^2 = 0 \Rightarrow ((x+1)-(y-1))\cdot((x+1)+(y-1)) = 0 \Rightarrow$$

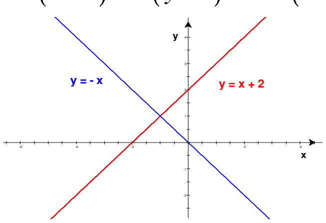
$$\Rightarrow (x+1-y+1)\cdot(x+1+y-1) = 0 \Rightarrow (x-y+2)\cdot(x+y) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y+2=0 \\ x+y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -y = -x-2 \; / \cdot (-1) \\ y = -x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = x+2 \\ y = -x \end{matrix}\right\}.$$

Dobili smo dva pravca. Unija ovih dvaju pravaca skup je koji je valjan.

2.inačica

$$(x+1)^2 = (y-1)^2 \Rightarrow (x+1)^2 = (y-1)^2 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(y-1)^2} \Rightarrow |x+1| = |y-1| \Rightarrow$$




$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+1 = y-1 \\ x+1 = -(y-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+1 = y-1 \\ x+1 = -y+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -y = -x-1-1 \\ y = -x+1-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -y = -x-2 \\ y = -x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -y = -x-2 \; / \cdot (-1) \\ y = -x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = x+2 \\ y = -x \end{matrix}\right\}.$$

Dobili smo dva pravca. Unija ovih dvaju pravaca skup je koji je valjan.

**Vježba 052**

Prikaži grafički skup svih točaka ravnine za čije koordinate x i y vrijedi $(x + 1)^2 = (y + 1)^2$.

**Rezultat:** $y = -x - 2$, $y = x$. Unija ovih dvaju pravaca skup je koji je valjan.

**Zadatak 053 (Gimnazijalka, gimnazija)**

Trokut ABC zadan je jednadžbama stranica a ... $2 \cdot x + y + 10 = 0$, b ... $2 \cdot x - y - 2 = 0$ i težišnicom $t_a$ ... $2 \cdot x - 7 \cdot y + 10 = 0$ kojoj pripada vrh A. Odredi koordinate vrhova trokuta.

**Rješenje 053**

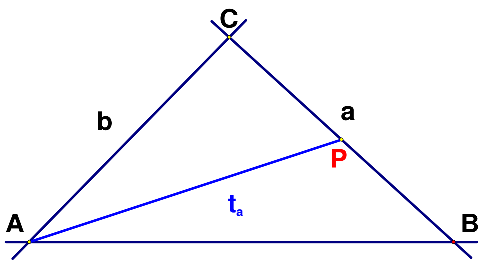
Ponovimo!

Težišnica je spojnica vrha trokuta s polovištem nasuprotne stranice.

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su

$$P(x, y) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Sa slike vidi se da je točka C sjecište pravaca a i b. Koordinate točke C su rješenja sustava linearnih jednadžbi:




$$\left.\begin{array}{l}2\cdot x+y+10=0\\2\cdot x-y-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot x+y=-10\\2\cdot x-y=2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\\text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow 4\cdot x=-8\ /:4\Rightarrow x=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-2\\2\cdot x+y=-10\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot(-2)+y=-10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4+y=-10\Rightarrow y=-10+4\Rightarrow y=-6\Rightarrow C(x,\ y)=C(-2,\ -6).$$

Točka P je sjecište pravca a i težišnice $t_a$. Koordinate točke P su rješenja sustava linearnih jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l}2\cdot x+y+10=0\\2\cdot x-7\cdot y+10=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot x+y=-10\\2\cdot x-7\cdot y=-10\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\\text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot x+y=-10\ /\cdot 7\\2\cdot x-7\cdot y=-10\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}14\cdot x+7\cdot y=-70\\2\cdot x-7\cdot y=-10\end{array}\right\}\Rightarrow 16\cdot x=-80\ /:16\Rightarrow x=-5\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-5\\2\cdot x+y=-10\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot(-5)+y=-10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10+y=-10\Rightarrow y=-10+10\Rightarrow y=0\Rightarrow P(x,\ y)=P(-5,\ 0).$$

Budući da je točka P polovište dužine $\overline{CB}$, koordinate točke B iznose:

$$\left.\begin{array}{l}C(x_1,\ y_1)=C(-2,\ -6)\\P(x,\ y)=P(-5,\ 0)\\B(x_2,\ y_2)=B(x_2,\ y_2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-5=\dfrac{-2+x_2}{2}\\0=\dfrac{-6+y_2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-5=\dfrac{-2+x_2}{2}\ /\cdot 2\\0=\dfrac{-6+y_2}{2}\ /\cdot 2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-10=-2+x_2\\0=-6+y_2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_2=-10+2\\y_2=0+6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_2=-8\\y_2=6\end{array}\right\}\Rightarrow B(x_2,\ y_2)=B(-8,\ 6).$$

Vrh A je sjecište pravca b i težišnice $t_a$. Koordinate vrha A su rješenja sustava linearnih jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l}2\cdot x-y-2=0\\2\cdot x-7\cdot y+10=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot x-y=2\\2\cdot x-7\cdot y=-10\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\\text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2\cdot x-y=2\ /\cdot(-7)\\2\cdot x-7\cdot y=-10\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-14\cdot x+7\cdot y=-14\\2\cdot x-7\cdot y=-10\end{array}\right\}\Rightarrow -12\cdot x=-24\ /:(-12)\Rightarrow x=2\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=2\\2\cdot x-y=2\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot 2-y=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-y=2\Rightarrow -y=2-4\Rightarrow -y=-2\ /\cdot(-1)\Rightarrow y=2\Rightarrow A(x,\ y)=A(2,\ 2).$$



**Vježba 053**

Trokut ABC zadan je jednadžbama stranica b ... 2 · x + y + 10 = 0, c ... 2 · x – y – 2 = 0 i težišnicom $t_b$ ... 2 · x – 7 · y + 10 = 0 kojoj pripada vrh B. Odredi koordinate vrhova trokuta.

**Rezultat:** A(– 2, – 6), B(2, 2), C(– 8, 6).

**Zadatak 054 (1B, TUPŠ)**

Napiši jednadžbu pravca koji sadrži točku T(1, – 3) i ima koeficijent smjera k = 2.

**Rješenje 054**

Ponovimo!

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom T($x_1$, $y_1$) glasi

$$y-y_1=k\cdot(x-x_1).$$

Uvrstimo koordinate zadane točke T i koeficijent smjera k u jednadžbu pravca:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_1, y_1\right)=T(1,-3) \\ k=2 \\ y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-(-3)=2\cdot(x-1) \Rightarrow y+3=2\cdot x-2 \Rightarrow y=2\cdot x-2-3 \Rightarrow y=2\cdot x-5.$$

**Vježba 054**

Napiši jednadžbu pravca koji sadrži točku T(1, – 3) i ima koeficijent smjera k = 1.

**Rezultat:** $y=x-4.$

**Zadatak 055 (3A, TUPŠ)**

Napiši implicitnu jednadžbu pravca koji prolazi točkom T(2, – 1), a ima prikloni kut α = 45°.

**Rješenje 055**

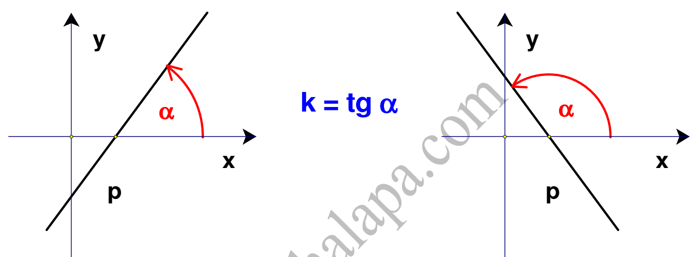
Ponovimo!

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right).$$

Kut za koji treba u pozitivnom smjeru zarotirati pozitivni dio x-osi oko sjecišta pravca p i osi x do pravca p naziva se prikloni kut pravca. Njegov tangens jednak je koeficijentu smjera pravca, tj.

$$tg\,\alpha=k.$$






Iz vrijednosti priklonog kuta α dobije se koeficijent smjera k:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha=45^0 \\ k=tg\,\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow k=tg\,45^0 \Rightarrow k=1.$$

Uvrstimo koordinate zadane točke T i koeficijent smjera k u jednadžbu pravca:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_1, y_1\right)=T(2,-1) \\ k=1 \\ y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-(-1)=1\cdot(x-2) \Rightarrow y+1=x-2 \Rightarrow y=x-2-1 \Rightarrow y=x-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+y+3=0 \Rightarrow -x+y+3=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x-y-3=0 \text{ implicitna jednadžba pravca.}$$

**Vježba 055**

Napiši implicitnu jednadžbu pravca koji prolazi točkom T(2, – 1), a ima prikloni kut α = 135°.

**Rezultat:** x + y – 1 = 0.

**Zadatak 056 (Ana, gimnazija)**

Kolika je površina kvadrata kojem dvije stranice pripadaju pravcima 3 · x – 4 · y – 20 = 0 i 6 · x – 8 · y + 25 = 0?

**Rješenje 056**

Ponovimo!

Uvjet usporednosti (paralelnosti):

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Udaljenost točke $T(x_0, y_0)$ od pravca p … $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ računa se po formuli

$$|Tp| = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Kvadrat je pravokutnik kojemu su sve stranice sukladne. Površina kvadrata duljine stranice a glasi:

$$P = a^2.$$

Napišimo jednadžbe pravaca u eksplicitnom obliku:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 4 \cdot y - 20 = 0 \\ 6 \cdot x - 8 \cdot y + 25 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 \cdot y = -3 \cdot x + 20 \\ -8 \cdot y = -6 \cdot x - 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 \cdot y = -3 \cdot x + 20 \;/ : (-4) \\ -8 \cdot y = -6 \cdot x - 25 \;/ : (-8) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{4} \cdot x - 5 \\ y = \frac{6}{8} \cdot x + \frac{25}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{4} \cdot x - 5 \\ y = \frac{3}{4} \cdot x + \frac{25}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{4} \cdot x - 5 \\ y = \frac{3}{4} \cdot x + \frac{25}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{koeficijenti smjerova jednaki su,} \\ \text{PRAVCI SU PARALELNI} \end{array}\right].$$

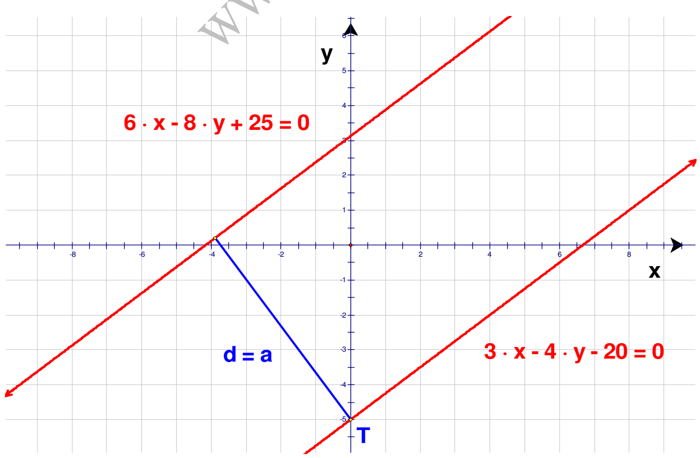
Na prvom pravcu odredimo jednu točku (vrijednost apscise uzmemo po volji, a vrijednost ordinate izračunamo):

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 4 \cdot y - 20 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 0 - 4 \cdot y - 20 = 0 \Rightarrow -4 \cdot y - 20 = 0 \Rightarrow -4 \cdot y = 20 \;/ : (-4) \Rightarrow y = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(0, -5) \text{ točka na prvom pravcu.}$$

Udaljenost između dva pravca jednaka je udaljenosti između točke T i drugog pravca:

$$\left.\begin{array}{l} T(0, -5) \\ 6 \cdot x - 8 \cdot y + 25 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d = \frac{|6 \cdot 0 - 8 \cdot (-5) + 25|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|40 + 25|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{65}{\sqrt{100}} = \frac{65}{10} = 6.5.$$




Budući da je duljina stranice kvadrata zadana, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a = d = 6.5 \\ P = a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow P = 6.5^2 = 42.25.$$

**Vježba 056**

Kolika je površina kvadrata kojem dvije stranice pripadaju pravcima $3 \cdot x + 4 \cdot y - 12 = 0$, $3 \cdot x + 4 \cdot y + 13 = 0$?

**Rezultat:** 25.

**Zadatak 057 (Marija, srednja škola)**

Visina na stranicu AC trokuta ABC pripada pravcu x + y – 2 = 0, a visina na stranicu AB pravcu 3 · x – y – 10 = 0, a vrh A je točka A(0, – 2).

a) Odredi koordinate vrhova B i C.

b) Izračunaj površinu trokuta.

**Rješenje 057**

Ponovimo!

Visina trokuta je okomica iz vrha trokuta na nasuprotnu stranicu.

Uvjet okomitosti:

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni. Na primjer,

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_1$ | 1 | 2 | –3 | $\frac{4}{5}$ | $-\frac{7}{6}$ | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{9}$ |
| $k_2$ | – 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{5}{4}$ | $\frac{6}{7}$ | 8 | – 9 |

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

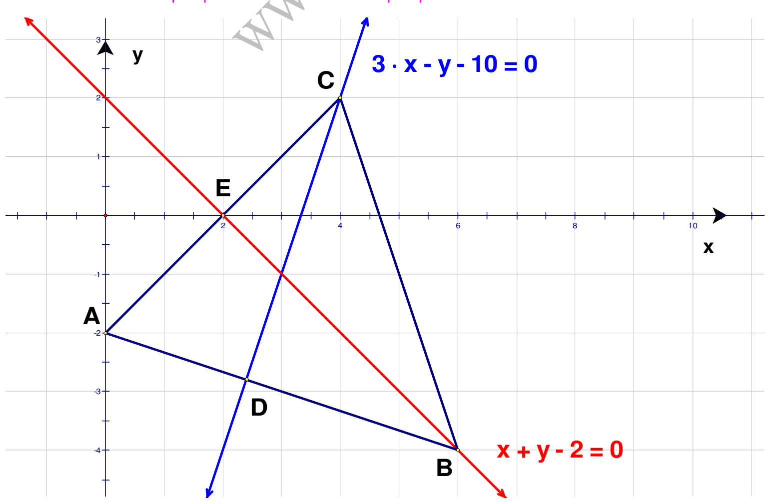
$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Površina trokuta ABC zadanog vrhovima $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ računa se po formuli:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \right|.$$

Modul ili apsolutna vrijednost realnog broja:

$$|x| = x \text{ za } x \geq 0 \ , \ |x| = -x \text{ za } x < 0.$$




a)

Visina na stranicu AC trokuta ABC pripada pravcu BE čija jednadžba i koeficijent smjera glase:

$$x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -x + 2 \Rightarrow k = -1.$$

Budući da su pravci BE i AC međusobno okomiti, koeficijent smjera pravca AC je

$$k = 1.$$

Na pravcu AC leži stranica $\overline{AC}$ trokuta ABC. Jednadžba pravca AC glasi:

$$\left.\begin{array}{l} k=1 \;,\; A(x_1,\, y_1)=A(0,\,-2) \\ y-y_1=k\cdot(x-x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \; y+2=1\cdot(x-0) \;\Rightarrow\; y+2=x \;\Rightarrow\; y=x-2 \;\Rightarrow\; x-y-2=0.$$

Presjek pravaca AC i CD je točka C, vrh trokuta ABC. Budući da su poznate jednadžbe pravaca AC i CD

$$AC \;\ldots\; x-y-2=0,$$

$$CD \;\ldots\; 3\cdot x-y-10=0,$$

koordinate točke C dobiju se kao rješenje sustava od dviju jednadžbi s dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} x-y-2=0 \\ 3\cdot x-y-10=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ 3\cdot x-y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=2 \; /\cdot(-1) \\ 3\cdot x-y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+y=-2 \\ 3\cdot x-y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 2\cdot x=8 \; /:2 \;\Rightarrow\; x=4 \;\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 4-y=2 \;\Rightarrow\; -y=2-4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; -y=-2 \; /\cdot(-1) \;\Rightarrow\; y=2 \;\Rightarrow\; C(x,\, y)=C(4,\, 2). \; \text{vrh trokuta ABC}$$

Visina na stranicu AB trokuta ABC pripada pravcu CD čija jednadžba i koeficijent smjera glase:

$$3\cdot x-y-10=0 \;\Rightarrow\; -y=-3\cdot x+10 \; /\cdot(-1) \;\Rightarrow\; y=3\cdot x-10 \;\Rightarrow\; k=3.$$

Budući da su pravci CD i AB međusobno okomiti, koeficijent smjera pravca AC je

$$k=-\frac{1}{3}.$$

Na pravcu AB leži stranica $\overline{AB}$ trokuta ABC. Jednadžba pravca AB glasi:

$$\left.\begin{array}{l} k=-\frac{1}{3} \;,\; A(x_1,\, y_1)=A(0,\,-2) \\ y-y_1=k\cdot(x-x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \; y+2=-\frac{1}{3}\cdot(x-0) \;\Rightarrow\; y+2=-\frac{1}{3}\cdot x \; /\cdot 3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 3\cdot y+6=-x \;\Rightarrow\; x+3\cdot y+6=0.$$



Presjek pravaca BE i AB je točka B, vrh trokuta ABC. Budući da su poznate jednadžbe pravaca BE i AB

$$BE \;\ldots\; x+y-2=0,$$

$$AB \;\ldots\; x+3\cdot y+6=0,$$

koordinate točke B dobiju se kao rješenje sustava od dviju jednadžbi s dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ x+3\cdot y+6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x+3\cdot y=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=2 \; /\cdot(-1) \\ x+3\cdot y=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x-y=-2 \\ x+3\cdot y=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 2\cdot y=-8 \; /:2 \;\Rightarrow\; y=-4 \;\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-4 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \; x-4=2 \;\Rightarrow\; x=2+4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x=6 \;\Rightarrow\; B(x,\, y)=B(6,\, -4). \; \text{vrh trokuta ABC}$$

b)

Površina trokuta ABC iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\, y_1)=A(0,-2) \;,\; B(x_2,\, y_2)=B(6,-4) \;,\; C(x_3,\, y_3)=C(4,\, 2) \\ P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)\right| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|0\cdot(-4-2)+6\cdot(2+2)+4\cdot(-2+4)\right| \Rightarrow P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|0+6\cdot 4+4\cdot 2\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|24+8\right| \Rightarrow P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|32\right| \Rightarrow P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 32 \Rightarrow P_{ABC}=16.$$

**Vježba 057**

Visina na stranicu AC trokuta ABC pripada pravcu $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$, a visina na stranicu AB pravcu $\frac{x}{\frac{10}{3}}+\frac{y}{-10}=1$, a vrh A je točka A(0, – 2). Odredi koordinate vrhova B i C.

**Rezultat:** B(6, – 4), C(4, 2).

**Zadatak 058 (Ivanka, srednja škola)**

Na burzi se trguje dionicom A čija je cijena 124 kn i dionicom B čija je cijena 56 kn. U jednom je danu ostvaren promet od 270000 kn. Kako glasi jednadžba pravca koja opisuje ovisnost broja dionica B u ovisnosti o broju dionica A s kojima se trguje?

**Rješenje 058**

Neka je x broj dionica A, a y broj dionica B s kojima se trguje.
Cijena dionice A je 124 kn pa je ostvaren promet s dionicama A jednak

124 · x.
Cijena dionice B je 56 kn pa je ostvaren promet s dionicama B jednak
56 · y.
Budući da je u jednom danu ostvaren promet od 270000 kn, slijedi:

$$124\cdot x+56\cdot y=270\,000 \Rightarrow 124\cdot x+56\cdot y=270\,000 \;/:4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 31\cdot x+14\cdot y=67\,500 \Rightarrow 14\cdot y=67\,500-31\cdot x \Rightarrow 14\cdot y=67\,500-31\cdot x \;/:14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{67\,500}{14}-\frac{31\cdot x}{14} \Rightarrow y=\frac{33\,750}{7}-\frac{31}{14}\cdot x.$$



**Vježba 058**

Na burzi se trguje dionicom A čija je cijena 62 kn i dionicom B čija je cijena 20 kn. U jednom je danu ostvaren promet od 20000 kn. Kako glasi jednadžba pravca koja opisuje ovisnost broja dionica B u ovisnosti o broju dionica A s kojima se trguje?

**Rezultat:** $y=1000-\frac{31}{10}\cdot x.$

**Zadatak 059 (Antoaneta, maturantica gimnazije)**

Dužina $\overline{AB}$ (A(– 1, 3), B(5, – 2) siječe os x u točki M, a os y u točki N. U kojim omjerima točke M i N dijele dužinu $\overline{AB}$?

**Rješenje 059**

Ponovimo!

Produženi omjer se ne mijenja ako se članovi omjera pomnože (proširivanje omjera) ili podijele (skraćivanje omjera) s nekim realnim brojem različitim od nule:

$$a:b:c=(a\cdot k):(b\cdot k):(c\cdot k).$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Udaljenost dviju točaka

Neka su A($x_1$, $y_1$) i B($x_2$, $y_2$) dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana s

$$|AB| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

Jednadžba pravca kroz dvije točke

Pravac točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima jednadžbu

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x - x_1\right).$$

Odredimo jednadžbu pravca kroz dvije točke A i B:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right) = A(-1, 3)\ ,\ B\left(x_2, y_2\right) = B(5, -2) \\ y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x - x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow\ y - 3 = \frac{-2-3}{5+1} \cdot (x+1)\ \Rightarrow\ y - 3 = \frac{-5}{6} \cdot (x+1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y - 3 = -\frac{5}{6} \cdot x - \frac{5}{6}\ \Rightarrow\ y = -\frac{5}{6} \cdot x - \frac{5}{6} + 3\ \Rightarrow\ y = -\frac{5}{6} \cdot x + \frac{13}{6}\ \Rightarrow\ y = -\frac{5}{6} \cdot x + \frac{13}{6}\ / \cdot 6\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 6 \cdot y = -5 \cdot x + 13\ \Rightarrow\ 5 \cdot x + 6 \cdot y - 13 = 0.$$

Budući da pravac $5 \cdot x + 6 \cdot y - 13 = 0$ siječe os x u točki M(x, y), njezina ordinata y mora biti jednaka nuli pa slijedi

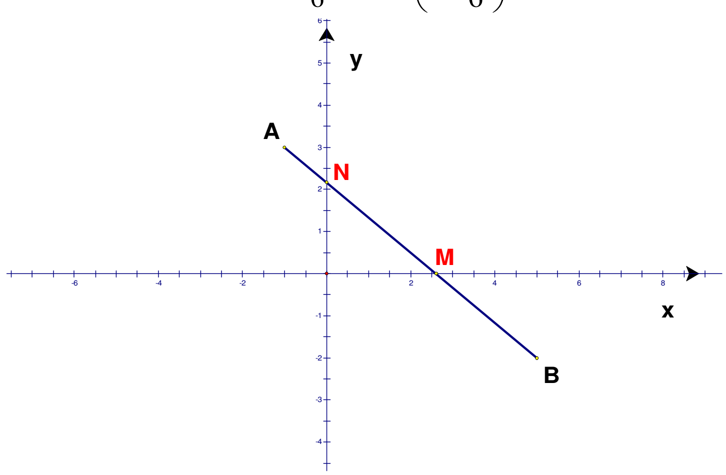
$$\left.\begin{array}{l} M(x, y) = M(x, 0) \\ 5 \cdot x + 6 \cdot y - 13 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 5 \cdot x + 6 \cdot 0 - 13 = 0\ \Rightarrow\ 5 \cdot x - 13 = 0\ \Rightarrow\ 5 \cdot x = 13\ /:5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{13}{5}\ \Rightarrow\ M\left(\frac{13}{5}, 0\right).$$

Budući da pravac $5 \cdot x + 6 \cdot y - 13 = 0$ siječe os y u točki N(x, y), njezina apscisa x mora biti jednaka nuli pa slijedi

$$\left.\begin{array}{l} N(x, y) = N(0, y) \\ 5 \cdot x + 6 \cdot y - 13 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 5 \cdot 0 + 6 \cdot y - 13 = 0\ \Rightarrow\ 6 \cdot y - 13 = 0\ \Rightarrow\ 6 \cdot y = 13\ /:6\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{13}{6}\ \Rightarrow\ N\left(0, \frac{13}{6}\right).$$




Da bismo odredili u kojim omjerima točke M i N dijele dužinu $\overline{AB}$, tj.

$$|AN| : |NM| : |MB|$$

moramo izračunati duljine

$$|AN|,\ |NM|,\ |MB|.$$

Duljina $|AN|$

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-1, 3) \ , \ N(x_2, y_2) = N\left(0, \frac{13}{6}\right) \\ |AN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AN| = \sqrt{(0+1)^2 + \left(\frac{13}{6} - 3\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AN| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} \Rightarrow |AN| = \sqrt{1 + \frac{25}{36}} \Rightarrow |AN| = \sqrt{\frac{61}{36}} \Rightarrow |AN| = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{36}} \Rightarrow |AN| = \frac{\sqrt{61}}{6}.$$

Duljina $|NM|$

$$\left.\begin{array}{l} N(x_1, y_1) = N\left(0, \frac{13}{6}\right) \ , \ M(x_2, y_2) = M\left(\frac{13}{5}, 0\right) \\ |NM| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |NM| = \sqrt{\left(\frac{13}{5} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{13}{6}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |NM| = \sqrt{\left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(-\frac{13}{6}\right)^2} \Rightarrow |NM| = \sqrt{\frac{169}{25} + \frac{169}{36}} \Rightarrow |NM| = \sqrt{169 \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{36}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow |NM| = 13 \cdot \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{36}} \Rightarrow |NM| = 13 \cdot \sqrt{\frac{36 + 25}{900}} \Rightarrow |NM| = 13 \cdot \sqrt{\frac{61}{900}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |NM| = 13 \cdot \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{900}} \Rightarrow |NM| = \frac{13 \cdot \sqrt{61}}{30}.$$



Duljina $|MB|$

$$\left.\begin{array}{l} M(x_1, y_1) = M\left(\frac{13}{5}, 0\right) \ , \ B(x_2, y_2) = B(5, -2) \\ |MB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |MB| = \sqrt{\left(5 - \frac{13}{5}\right)^2 + (-2 - 0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MB| = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + (-2)^2} \Rightarrow |MB| = \sqrt{\frac{144}{25} + 4} \Rightarrow |MB| = \sqrt{\frac{244}{25}} \Rightarrow |MB| = \frac{\sqrt{244}}{\sqrt{25}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MB| = \frac{\sqrt{244}}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow |MB| = \frac{\sqrt{4 \cdot 61}}{5} \Rightarrow |MB| = \frac{2 \cdot \sqrt{61}}{5}.$$

Traženi omjeri iznose:

$$|AN| : |NM| : |MB| = \frac{\sqrt{61}}{6} : \frac{13 \cdot \sqrt{61}}{30} : \frac{2 \cdot \sqrt{61}}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{članove omjera} \\ \text{pomnožimo brojem } \frac{30}{\sqrt{61}} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AN| : |NM| : |MB| = \left(\frac{\sqrt{61}}{6} \cdot \frac{30}{\sqrt{61}}\right) : \left(\frac{13 \cdot \sqrt{61}}{30} \cdot \frac{30}{\sqrt{61}}\right) : \left(\frac{2 \cdot \sqrt{61}}{5} \cdot \frac{30}{\sqrt{61}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AN| : |NM| : |MB| = 5 : 13 : 12.$$

**Vježba 059**

Dužina $\overline{AB}$ (A(– 2, 4), B(4, – 2) siječe os y u točki M. U kojem omjeru točka M dijeli dužinu $\overline{AB}$?

**Rezultat:** 1 : 2.

**Zadatak 060 (Ante, gimnazija)**

Odredi jednadžbe simetrala pravaca $3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 = 0$ , $4 \cdot x - 3 \cdot y + 6 = 0.$

**Rješenje 060**

Ponovimo!

Jednadžbe simetrala kutova što ih određuju dva ukrštena pravca

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0 \text{ i } A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$$

glase

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Jednadžbe simetrala para pravaca su:

$$\left.\begin{array}{ll} 3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 = 0 \ , & 4 \cdot x - 3 \cdot y + 6 = 0 \\ A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0 \ , & A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3 \cdot x + 4 \cdot y - 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{4 \cdot x - 3 \cdot y + 6}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot x + 4 \cdot y - 2}{\sqrt{9+16}} = \pm \frac{4 \cdot x - 3 \cdot y + 6}{\sqrt{16+9}} \Rightarrow \frac{3 \cdot x + 4 \cdot y - 2}{\sqrt{25}} = \pm \frac{4 \cdot x - 3 \cdot y + 6}{\sqrt{25}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot x + 4 \cdot y - 2}{5} = \pm \frac{4 \cdot x - 3 \cdot y + 6}{5} \ / \cdot 5 \Rightarrow 3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 = \pm (4 \cdot x - 3 \cdot y + 6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 = 4 \cdot x - 3 \cdot y + 6 \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 = -(4 \cdot x - 3 \cdot y + 6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 = 4 \cdot x - 3 \cdot y + 6 \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 = -4 \cdot x + 3 \cdot y - 6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 - 4 \cdot x + 3 \cdot y - 6 = 0 \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y - 2 + 4 \cdot x - 3 \cdot y + 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x + 7 \cdot y - 8 = 0 \ / \cdot (-1) \\ 7 \cdot x + y + 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - 7 \cdot y + 8 = 0 \\ 7 \cdot x + y + 4 = 0 \end{array}\right\}.$$

**Vježba 060**

Odredi jednadžbe simetrala pravaca $5 \cdot x - 14 \cdot y - 28 = 0$ , $10 \cdot x + 11 \cdot y + 12 = 0.$

**Rezultat:** $x + 5 \cdot y + 8 = 0$ , $15 \cdot x - 3 \cdot y - 16 = 0.$