Zadatak 061 (Anita, gimnazija)

Poznato je da pravac – 2 · x + a · y + 4 = 0 s koordinatnim osima zatvara trokut površine 4. Nađi a.

Rješenje 061

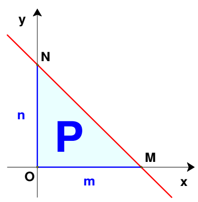
Ponovimo!

$$|x|=\begin{cases} x \text{ za } x\ge 0 \\ -x \text{ za } x<0 \end{cases} \quad , \quad |-x|=|x| \quad , \quad |x|=a \Rightarrow x=\pm a \ , \ a>0 \quad , \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Jednadžbu pravca oblika

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

nazivamo segmentnim oblikom jednadžbe pravca. Točke M(m, 0) i N(0, n) su presjeci tog pravca s koordinatnim osima. Brojevi m i n se nazivaju odsječci ili segmenti na osima. Površina pravokutnog trokuta OMN kojeg zatvaraju pravac



$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$$

i koordinatne osi glasi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot|m\cdot n|.$$

Jednadžbu pravca napišemo u segmentnom obliku kako bismo odredili odsječke m i n na koordinatnim osima.

$$-2\cdot x+a\cdot y+4=0 \Rightarrow -2\cdot x+a\cdot y=-4 \ /:(-4) \Rightarrow \frac{2\cdot x}{4}+\frac{a\cdot y}{-4}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{4}{a}}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m=2 \\ n=-\frac{4}{a} \end{array}\right\}.$$

Iz površine pravokutnog trokuta izračuna se a:

$$\left.\begin{array}{l} P=4 \ , \ m=2 \ , \ n=-\frac{4}{a} \\ P=\frac{1}{2}\cdot|m\cdot n| \end{array}\right\} \Rightarrow 4=\frac{1}{2}\cdot\left|2\cdot\left(-\frac{4}{a}\right)\right| \Rightarrow 4=\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{8}{a}\right| \Rightarrow 4=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{8}{a}\right| \ /\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8=\left|\frac{8}{a}\right| \Rightarrow \left|\frac{8}{a}\right|=8 \Rightarrow \frac{8}{a}=\pm 8 \Rightarrow \frac{a}{8}=\pm\frac{1}{8} \ /\cdot 8 \Rightarrow a_{1,2}=\pm 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=1 \\ a_2=-1 \end{array}\right\}.$$

Vježba 061

Poznato je da pravac 2 · x + a · y – 4 = 0 s koordinatnim osima zatvara trokut površine 4. Nađi a.

Rezultat: $a_{1,2} = \pm 1$.

Zadatak 062 (Denis, ekonomska škola)

Ako su pravci a · x + 3 · y – 5 = 0 i 5 · x – 4 · a · y + 2 = 0 okomiti, nađite parametar a.

Rješenje 062

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

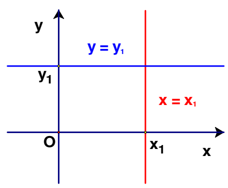
Uvjet okomitosti

Pravci

$$y = k_1 \cdot x + l_1 \quad , \quad y = k_2 \cdot x + l_2$$

su okomiti ako i samo ako su im koeficijenti smjera suprotni i recipročni brojevi, tj. ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$



Jednadžbom

$$x = x_1$$

dan je pravac paralelan s osi y.

Jednadžbom

$$y = y_1$$

dan je pravac paralelan s osi x.

Ako je jedan od pravaca paralelan s koordinatnom osi, tada je njemu okomit pravac paralelan s drugom koordinatnom osi.

Jednadžbe zadanih pravaca napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili koeficijente smjerova:

$$\left.\begin{matrix} a \cdot x + 3 \cdot y - 5 = 0 \\ 5 \cdot x - 4 \cdot a \cdot y + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot y = -a \cdot x + 5 \\ -4 \cdot a \cdot y = -5 \cdot x - 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot y = -a \cdot x + 5 \;/ \cdot \frac{1}{3} \\ -4 \cdot a \cdot y = -5 \cdot x - 2 \;/ \cdot \left(-\frac{1}{4 \cdot a}\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y = -\frac{a}{3} \cdot x + \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{4 \cdot a} \cdot x + \frac{2}{4 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k_1 = -\frac{a}{3} \\ k_2 = \frac{5}{4 \cdot a} \end{matrix}\right\}.$$

Budući da su pravci okomiti, slijedi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow -\frac{a}{3} \cdot \frac{5}{4 \cdot a} = -1 \Rightarrow -\frac{a}{3} \cdot \frac{5}{4 \cdot a} = -1 \Rightarrow -\frac{5}{12} = -1. ☹$$

Dobili smo neistinitu jednakost. Dakle, uvjet okomitosti dvaju pravaca ne daje rješenje. Pravci su međusobno okomiti, ako su paralelni s koordinatnim osima. Parametar a mora biti nula jer tada vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} a = 0 \\ a \cdot x + 3 \cdot y - 5 = 0 \\ 5 \cdot x - 4 \cdot a \cdot y + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 \cdot x + 3 \cdot y - 5 = 0 \\ 5 \cdot x - 4 \cdot 0 \cdot y + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot y - 5 = 0 \\ 5 \cdot x + 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot y = 5 \\ 5 \cdot x = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 3 \cdot y = 5 \;/ : 3 \\ 5 \cdot x = -2 \;/ : 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = \frac{5}{3} \\ x = -\frac{2}{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{okomiti pravci}$$

Vježba 062

Ako su pravci a · x + 3 · y + 5 = 0 i 5 · x – 4 · a · y + 1 = 0 okomiti, nađite parametar a.

Rezultat: a = 0.

Zadatak 063 (Ekipa, TUPŠ)

Pravcu zadanom tablicom

x	0	3
y	– 1	2

pripada točka:

A (– 2, – 3) B (– 2, – 5) C (– 2, – 4) D (– 2, – 6)

Rješenje 063

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Da bismo odredili realne brojeve k i l uvrstimo iz tablice zadane koordinate u jednadžbu pravca.

- $$\left.\begin{array}{l} x = 0 \;,\; y = -1 \\ y = k \cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = k \cdot 0 + l \Rightarrow -1 = 0 + l \Rightarrow l = -1.$$

- $$\left.\begin{array}{l} x = 3 \;,\; y = 2 \\ y = k \cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = k \cdot 3 + l \Rightarrow 2 = 3 \cdot k + l \Rightarrow 3 \cdot k + l = 2 \Rightarrow [l = -1] \Rightarrow 3 \cdot k - 1 = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cdot k = 2 + 1 \Rightarrow 3 \cdot k = 3 \; / : 3 \Rightarrow k = 1.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} k = 1 \;,\; l = -1 \\ y = k \cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow y = x - 1.$$

Provjeravamo koja točka pripada pravcu tako da koordinate točke uvrstimo u jednadžbu pravca. Ako dobijemo točnu jednakost, točka pripada pravcu, ako ne, točka ne pripada pravcu.

Točka A.

$$\left.\begin{array}{l} A(x, y) = A(-2, -3) \\ y = x - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -3 = -2 - 1 \Rightarrow -3 = -3 \text{ točno je.}$$

Dakle, točka A pripada pravcu. Ostale točke B, C i D ne moramo provjeravati jer je samo jedan odgovor točan.

Vježba 063

Pravcu zadanom tablicom

x	0	5
y	– 4	1

pripada točka:

A (– 2, – 3) B (– 2, – 5) C (– 2, – 4) D (– 2, – 6)

Rezultat: D.

Zadatak 064 (YOYO, srednja škola)

Na osi ordinata odredi točku koja je od točke A(3, 2) udaljena 5.

Rješenje 064

Ponovimo!

Udaljenost točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Točka koju tražimo leži na ordinati (y osi) pa njezine koordinate glase:

B(0, y).

Budući da udaljenost između točaka A i B iznosi 5, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_A, y_A\right)=A(3,2)\ ,\ B\left(x_B, y_B\right)=B(0, y) \\ |AB|=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A\left(x_A, y_A\right)=A(3,2)\ ,\ B\left(x_B, y_B\right)=B(0, y) \\ \sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}=5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

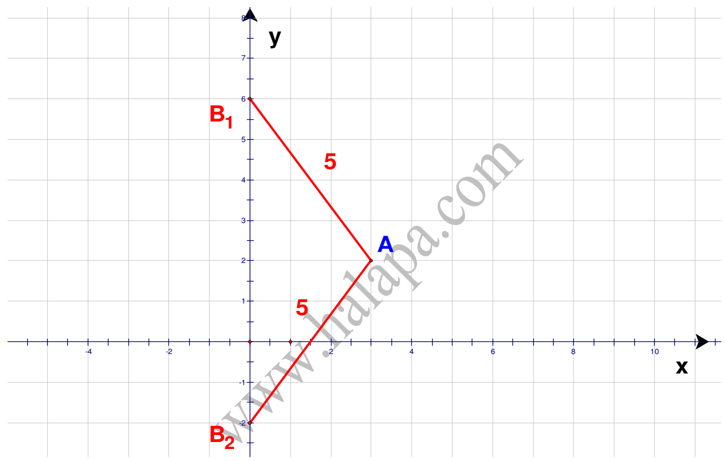
$$\Rightarrow \sqrt{(0-3)^2+(y-2)^2}=5 \Rightarrow \sqrt{(-3)^2+(y-2)^2}=5 \Rightarrow \sqrt{9+(y-2)^2}=5 \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{9+(y-2)^2}\right)^2=5^2 \Rightarrow 9+(y-2)^2=25 \Rightarrow (y-2)^2=25-9 \Rightarrow (y-2)^2=16 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-2=\pm\sqrt{16} \Rightarrow y-2=\pm 4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-2=4 \\ y-2=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=4+2 \\ y=-4+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=6 \\ y_2=-2 \end{array}\right\}.$$

Postoje dvije točke koje ispunjavaju zadani uvjet:

$$B_1(0, 6)\ ,\ B_2(0, -2).$$



Vježba 064

Na osi apscisa odredi točku koja je od točke A(2, 3) udaljena 5.

Rezultat: $B_1(6, 0)\ ,\ B_2(-2, 0)$.

Zadatak 065 (YOYO, srednja škola)

Odredi nepoznatu koordinatu točke C tako da ona pripada pravcu AB:
A(– 1, 4), B(2, 2), C(x, – 4).

Rješenje 065

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima jednadžbu:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right).$$

Pravac točkama A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) , $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Površina trokuta ABC, A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) , C(x_3, y_3) dana je formulom:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left| x_1 \cdot \left(y_2 - y_3\right) + x_2 \cdot \left(y_3 - y_1\right) + x_3 \cdot \left(y_1 - y_2\right) \right|.$$

1.inačica

Odredimo jednadžbu pravca točkama A i B.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right) = A(-1, 4) \\ B\left(x_2, y_2\right) = B(2, 2) \\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x - x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 4 = \frac{2-4}{2-(-1)} \cdot (x - (-1)) \Rightarrow y - 4 = \frac{2-4}{2+1} \cdot (x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3} \cdot (x+1) \Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3} \cdot x - \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot x - \frac{2}{3} + 4 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{10}{3}.$$

Budući da točka C pripada tom pravcu, njezine koordinate uvrstimo u jednadžbu pravca i dobije se apscisa x.

$$\left.\begin{array}{l} C(x, y) = C(x, -4) \\ y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{10}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow -4 = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{10}{3} \Rightarrow -4 = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{10}{3} \; / \cdot 3 \Rightarrow -12 = -2 \cdot x + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x = 10 + 12 \Rightarrow 2 \cdot x = 22 \Rightarrow 2 \cdot x = 22 \; /:2 \Rightarrow x = 11.$$

2.inačica

Točka C leži na pravcu AB pa koeficijent smjera pravca AC mora biti jednak koeficijentu smjera pravca BC.

- $$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right) = A(-1, 4) \\ C\left(x_2, y_2\right) = C(x, -4) \\ k_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_{AC} = \frac{-4-4}{x-(-1)} \Rightarrow k_{AC} = \frac{-8}{x+1}.$$
- $$\left.\begin{array}{l} B\left(x_1, y_1\right) = B(2, 2) \\ C\left(x_2, y_2\right) = C(x, -4) \\ k_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_{BC} = \frac{-4-2}{x-2} \Rightarrow k_{BC} = \frac{-6}{x-2}.$$

Apscisa x točke C iznosi:

$$k_{AC} = k_{BC} \Rightarrow \frac{-8}{x+1} = \frac{-6}{x-2} \Rightarrow -6 \cdot (x+1) = -8 \cdot (x-2) \Rightarrow -6 \cdot x - 6 = -8 \cdot x + 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 \cdot x + 8 \cdot x = 16 + 6 \Rightarrow 2 \cdot x = 22 \Rightarrow 2 \cdot x = 22 \; /:2 \Rightarrow x = 11.$$

3.inačica

Tri točke A, B i C u ravnini, općenito, tvore trokut ABC. Ako točke leže na istom pravcu (ako su kolinearne), površina trokuta ABC jednaka je nuli. Zato apscisa x točke C iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right)=A(-1,\ 4) \\ B\left(x_2,\ y_2\right)=B(2,\ 2) \\ C\left(x_3,\ y_3\right)=C(x,\ -4) \\ \frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2-y_3\right)+x_2\cdot\left(y_3-y_1\right)+x_3\cdot\left(y_1-y_2\right)\right|=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left|-1\cdot(2-(-4))+2\cdot(-4-4)+x\cdot(4-2)\right|=0 \;/\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|-1\cdot(2+4)+2\cdot(-4-4)+x\cdot(4-2)\right|=0 \Rightarrow \left|-1\cdot 6+2\cdot(-8)+2\cdot x\right|=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|-6-16+2\cdot x\right|=0 \Rightarrow \left|-22+2\cdot x\right|=0 \Rightarrow -22+2\cdot x=0 \Rightarrow 2\cdot x=22 \Rightarrow 2\cdot x=22 \;/:2 \Rightarrow x=11.$$

Vježba 065

Odredi nepoznatu koordinatu točke A tako da ona pripada pravcu BC:
B(– 1, 4), C(2, 2), A(x, – 4).

Rezultat: 11.

Zadatak 066 (Mira, srednja škola)

Odredi na osi apscisa točku koja je jednako udaljena od točaka: A(– 1, 1) i B(5, 3).

Rješenje 066

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Udaljenost točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ u ravnini iznosi:

$$|AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

Ordinata svake točke T na osi apscisa jednaka je 0. Ta točka je oblika T(x, 0). Računamo udaljenosti $|AT|$ i $|BT|$.

- $$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right)=A(-1,\ 1) \\ T\left(x_2,\ y_2\right)=T(x,\ 0) \\ |AT|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AT|=\sqrt{(x-(-1))^2+(0-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT|=\sqrt{(x+1)^2+(-1)^2} \Rightarrow |AT|=\sqrt{(x+1)^2+1}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} B\left(x_1,\ y_1\right)=B(5,\ 3) \\ T\left(x_2,\ y_2\right)=T(x,\ 0) \\ |BT|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |BT|=\sqrt{(x-5)^2+(0-3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BT|=\sqrt{(x-5)^2+(-3)^2} \Rightarrow |BT|=\sqrt{(x-5)^2+9}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$|AT|=|BT| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+1}=\sqrt{(x-5)^2+9} \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+1}=\sqrt{(x-5)^2+9} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+1)^2+1}\right)^2=\left(\sqrt{(x-5)^2+9}\right)^2 \Rightarrow (x+1)^2+1=(x-5)^2+9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x+1+1=x^2-10\cdot x+25+9 \Rightarrow x^2+2\cdot x+1+1=x^2-10\cdot x+25+9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x+1+1=-10\cdot x+25+9 \Rightarrow 2\cdot x+10\cdot x=25+9-1-1 \Rightarrow 12\cdot x=32 \Rightarrow 12\cdot x=32 \;/:12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{32}{12} \Rightarrow x=\frac{8}{3}.$$

Točka T ima koordinate

$$T\left(\frac{8}{3},\, 0\right).$$

Vježba 066

Odredi na osi ordinata točku koja je jednako udaljena od točaka: A(– 1, 1) i B(5, 3).

Rezultat: T(0, 8).

Zadatak 067 (Mario, srednja škola)

Koliki je $k \in R$ ako je udaljenost točaka A(2, k) i B(2, 7) jednaka 10?

Rješenje 067

Ponovimo!

Definicija apsolutne vrijednosti (modula) realnog broja x glasi:

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Zapamti!

$$|x|=a,\ a>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=a \\ x_2=-a \end{matrix}\right\}.$$

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Udaljenost točaka A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2) u ravnini iznosi:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Računamo udaljenost točaka A i B.

$$\left.\begin{matrix} A(x_1,\, y_1)=A(2,\, k) \\ B(x_2,\, y_2)=B(2,\, 7) \\ |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow |AB|=\sqrt{(2-2)^2+(7-k)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{0^2+(7-k)^2} \Rightarrow |AB|=\sqrt{(7-k)^2} \Rightarrow |AB|=|7-k|.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$|7-k|=10 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 7-k=10 \\ 7-k=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -k=10-7 \\ -k=-10-7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -k=3 \\ -k=-17 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -k=3 \ /\cdot(-1) \\ -k=-17 \ /\cdot(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=-3 \\ k_2=17 \end{array}\right\}.$$

Vježba 067

Koliki je $k \in R$ ako je udaljenost točaka A(3, k) i B(3, 5) jednaka 10?

Rezultat: $k_1=-5$, $k_2=15.$

Zadatak 068 (Maturanti, HTT)

Pravac m · x – 3 · y + 2 = 0 prolazi točkom N(2, 0). Nađi m.

Rješenje 068

Budući da pravac prolazi zadanom točkom, uvrstit ćemo koordinate točke u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} N(x,\ y)=N(2,\ 0) \\ m\cdot x-3\cdot y+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow m\cdot 2-3\cdot 0+2=0 \Rightarrow 2\cdot m-0+2=0 \Rightarrow 2\cdot m+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot m=-2 \Rightarrow 2\cdot m=-2 \ /:2 \Rightarrow m=-1.$$

Vježba 068

Pravac m · x – 3 · y + 2 = 0 prolazi točkom N(1, 0). Nađi m.

Rezultat: – 2.

Zadatak 069 (Maturanti, HTT)

Pravac prolazi točkama A(x, 0) i B(– 2, – 2). Ako je koeficijent smjera $a=-\frac{2}{3}$ odredi apscisu točke A.

Rješenje 069

Ponovimo!

Pravac y = a · x + b točkama A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2), $x_1 \neq x_2$ ima koeficijent smjera

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(x,\ 0) \\ B(x_2,\ y_2)=B(-2,\ -2) \\ a=-\frac{2}{3}\ ,\ a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{3}=\frac{-2-0}{-2-x} \Rightarrow -\frac{2}{3}=\frac{-2}{-2-x} \Rightarrow -2\cdot(-2-x)=3\cdot(-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+2\cdot x=-6 \Rightarrow 2\cdot x=-6-4 \Rightarrow 2\cdot x=-10 \Rightarrow 2\cdot x=-10 \ /:2 \Rightarrow x=-5.$$

Vježba 069

Pravac prolazi točkama A(x, 0) i B(– 4, – 4). Ako je koeficijent smjera $a=-\frac{2}{3}$ odredi apscisu točke A.

Rezultat: – 10.

Zadatak 070 (Maturanti, HTT)

Napiši jednadžbu pravca koji je simetričan pravcu x – 3 · y + 11 = 0 s obzirom na os apscisu.

Rješenje 070

Ponovimo!

Jednadžba pravca točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

1.inačica

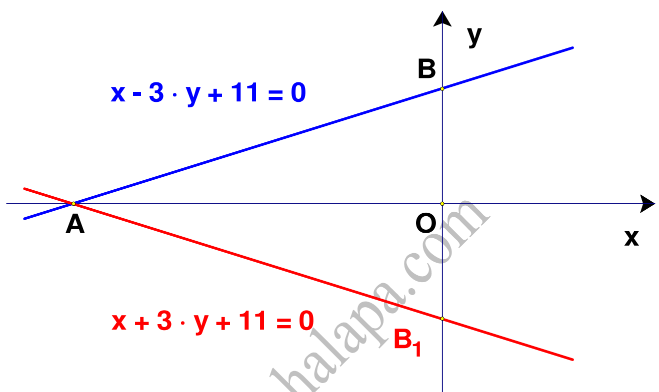
Tražimo presjek zadanog pravca sa:

- x osi

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x - 3 \cdot y + 11 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 3 \cdot 0 + 11 = 0 \Rightarrow x - 0 + 11 = 0 \Rightarrow x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11 \Rightarrow A(-11, 0)$$

- y osi

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 3 \cdot y + 11 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - 3 \cdot y + 11 = 0 \Rightarrow -3 \cdot y + 11 = 0 \Rightarrow -3 \cdot y = -11 \,/ : (-3) \Rightarrow y = \frac{11}{3} \Rightarrow B\left(0, \frac{11}{3}\right).$$



Odredimo koordinate točke B_1 koja je simetrična točki B s obzirom na x os.

$$B_1\left(0, -\frac{11}{3}\right).$$

Pravac kroz točke A i B_1 je traženi pravac.

$$\left. \begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-11, 0)\ ,\ B_1(x_2, y_2) = B_1\left(0, -\frac{11}{3}\right) \\ y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = \frac{-\frac{11}{3} - 0}{0 - (-11)} \cdot (x - (-11)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-\frac{11}{3}}{11} \cdot (x + 11) \Rightarrow y = \frac{-\frac{11}{3}}{\frac{11}{1}} \cdot (x + 11) \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \cdot (x + 11) \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \cdot x - \frac{11}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3} \cdot x - \frac{11}{3} \,/ \cdot 3 \Rightarrow 3 \cdot y = -x - 11 \Rightarrow x + 3 \cdot y + 11 = 0 \text{ traženi pravac.}$$

2.inačica

Budući da je traženi pravac simetričan s obzirom na x os sa zadanim pravcem

$$x - 3 \cdot y + 11 = 0$$

zamijenit ćemo y sa – y.

$$\left. \begin{array}{l} x - 3 \cdot y + 11 = 0 \\ y \to -y \end{array} \right\} \Rightarrow x - 3 \cdot (-y) + 11 = 0 \Rightarrow x + 3 \cdot y + 11 = 0 \text{ traženi pravac.}$$

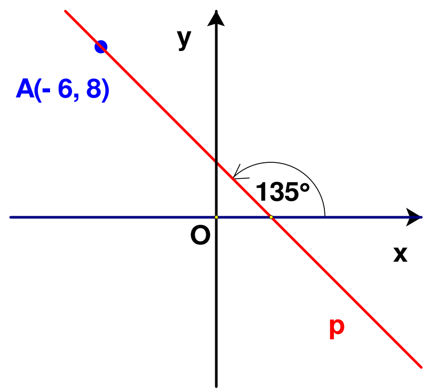
Vježba 070

Napiši jednadžbu pravca koji je simetričan pravcu $x - 2 \cdot y + 7 = 0$ s obzirom na os apscisu.

Rezultat: $x + 2 \cdot y + 7 = 0.$

Zadatak 071 (Maturanti, HTT)

Odredi jednadžbu pravca na slici.



Rješenje 071

Ponovimo!

$$tg\left(180^0 - \alpha\right) = -tg\,\alpha \quad , \quad tg\,45^0 = 1.$$

Prikloni kut i koeficijent smjera pravca

Kut za koji treba u pozitivnom smjeru zarotirati pozitivni dio x – osi oko sjecišta pravca p i osi x do pravca p naziva se prikloni kut pravca. Njegov tangens jednak je koeficijentu smjera pravca, tj.

$$tg\,\alpha = k.$$

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot \left(x - x_1\right).$$

Računamo koeficijent smjera k pravca.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 135^0 \\ k = tg\,\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow k = tg\,135^0 \Rightarrow k = tg\left(180^0 - 45^0\right) \Rightarrow k = -tg\,45^0 \Rightarrow k = -1.$$

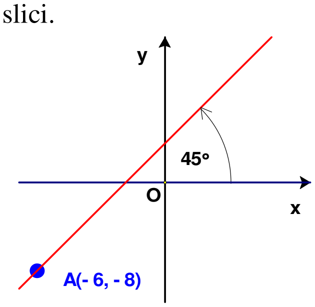
Jednadžba pravca sa slike glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right) = A(-6, 8) \\ k = -1 \\ y - y_1 = k \cdot \left(x - x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 8 = -1 \cdot (x - (-6)) \Rightarrow y - 8 = -1 \cdot (x + 6) \Rightarrow y - 8 = -x - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -x - 6 + 8 \Rightarrow y = -x + 2.$$

Vježba 071

Odredi jednadžbu pravca na slici.



Rezultat: $y = x - 2.$

Zadatak 072 (Matija, gimnazija)

Točkama B i C dužina AD podijeljena je na tri jednaka dijela. Odredi koordinate točaka A i C ako je B(2, – 3) i D(5, 4).

Rješenje 072

Ponovimo!

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su

$$P(x, y) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Sa slike vidi se:

$$|AB| = |BC| = |CD|.$$

Uoči da je:

- točka B polovište dužine AC
- točka C polovište dužine BD.

Budući da je točka C polovište dužine BD, njezine koordinate glase:

$$\left.\begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(2, -3) \\ C(x, y) = C(?, ?) \\ D(x_2, y_2) = D(5, 4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{2+5}{2} \\ y = \frac{-3+4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow C\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Budući da je točka B polovište dužine AC, koordinate točke A iznose:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(?, ?) \\ B(x, y) = B(2, -3) \\ C(x_2, y_2) = C\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = \frac{x_1 + \frac{7}{2}}{2} \\ -3 = \frac{y_1 + \frac{1}{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = \frac{x_1 + \frac{7}{2}}{2} \quad / \cdot 2 \\ -3 = \frac{y_1 + \frac{1}{2}}{2} \quad / \cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 = x_1 + \frac{7}{2} \\ -6 = y_1 + \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + \frac{7}{2} = 4 \\ y_1 + \frac{1}{2} = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 4 - \frac{7}{2} \\ y_1 = -6 - \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{4}{1} - \frac{7}{2} \\ y_1 = -\frac{6}{1} - \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{8-7}{2} \\ y_1 = \frac{-12-1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} \\ y_1 = -\frac{13}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}\right).$$

Vježba 072

Točkama B i C dužina AD podijeljena je na tri jednaka dijela. Odredi koordinate točaka B i D ako je $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}\right)$ i $C\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Rezultat: B(2, – 3) i D(5, 4).

Zadatak 073 (Branko, srednja škola)

Ako je T(a, b) točka pravca y = x – 2 koja je najbliža točki A(2, 2) tada je $a^2 + b^2$

$A)$ 10 $B)$ 8 $C)$ 4 $D)$ 2.

Rješenje 073

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad , \quad (x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Udaljenost dviju točaka

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana s

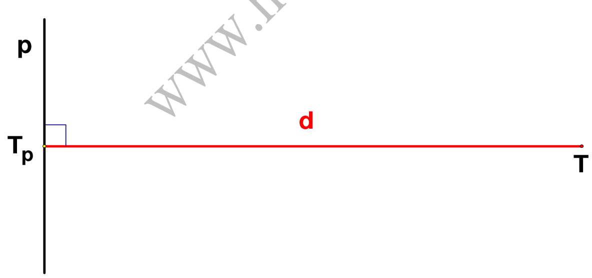
$$|AB| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

Udaljenost točke od pravca

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{\left|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Udaljenost točke T od pravca p je udaljenost između točaka T i T_p pri čemu je T_p nožište okomice iz točke T na pravac p.



Uvjet okomitosti dva pravca koji su određeni jednadžbama $y = a_1 \cdot x + b_1$ i $y = a_2 \cdot x + b_2$ glasi:

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}.$$

Jednadžba pravca točkom $T(x_1, y_1)$ kojemu je zadan koeficijent smjera a:

$$y - y_1 = a \cdot \left(x - x_1\right).$$

1.inačica

Zadani pravac napišemo u implicitnom obliku.

$$y = x - 2 \Rightarrow -x + y + 2 = 0 \Rightarrow -x + y + 2 = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow x - y - 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ A = 1 \; , \; B = -1 \; , \; C = -2 \end{array}\right\}.$$

Udaljenost točke A(2, 2) od zadanog pravca x – y – 2 = 0 iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_0,\ y_0)=A(2,\ 2) \\ x-y-2=0 \\ A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[d=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \right] \Rightarrow d=\frac{|1\cdot 2-1\cdot 2-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d=\frac{|2-2-2|}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow d=\frac{|2-2-2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow d=\frac{|-2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow d=\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow d=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow d=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d=\sqrt{2}.$$

Budući da točka T(a, b) pripada pravcu y = x – 2, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(a,\ b) \\ y=x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow [\,b=a-2\,] \Rightarrow T(a,\ a-2).$$

Udaljenost između točaka T i A jednaka je udaljenosti točke A od zadanog pravca.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(2,\ 2) \\ T(x_2,\ y_2)=T(a,\ a-2) \\ |TA|=\sqrt{2} \\ |TA|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{(a-2)^2+(a-2-2)^2}=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(a-2)^2+(a-4)^2}=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-2)^2+(a-4)^2}=\sqrt{2}\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(a-2)^2+(a-4)^2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-2)^2+(a-4)^2=2 \Rightarrow a^2-4\cdot a+4+a^2-8\cdot a+16=2 \Rightarrow a^2-4\cdot a+4+a^2-8\cdot a+16-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2-12\cdot a+18=0 \Rightarrow 2\cdot a^2-12\cdot a+18=0\ /:2 \Rightarrow a^2-6\cdot a+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-3)^2=0 \Rightarrow (a-3)^2=0\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a-3=0 \Rightarrow a=3.$$

Koordinate točke T(a, b) iznose:

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=3-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=1 \end{array}\right\}.$$

Tada je:

$$a^2+b^2=3^2+1^2=9+1=10.$$

2.inačica

Udaljenost točke A od pravca p je udaljenost uzmeđu točaka A i T pri čemu je T nožište okomice iz točke A na pravac p.

Zadani pravac ima koeficijent smjera:

$$\left.\begin{array}{l} y=x-2 \\ y=k\cdot x+l \end{array}\right\} \Rightarrow k=1.$$

Pravac koji je na njega okomit ima koeficijent smjera k = – 1 (koeficijent smjera je recipročan i suprotan koeficijentu smjera prvog pravca) pa njegova jednadžba točkom A glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(2,\ 2) \\ k=-1 \\ y-y_1=k\cdot(x-x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ y-2=-1\cdot(x-2)\ \Rightarrow\ y-2=-x+2\ \Rightarrow\ y=-x+2+2\ \Rightarrow\ y=-x+4.$$

Koordinate tražene točke T(a, b), koja je sjecište ta dva pravca, dobijemo kao rješenje sustava jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} y=x-2 \\ y=-x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow\ x-2=-x+4\ \Rightarrow\ x+x=4+2\ \Rightarrow\ 2\cdot x=6\ \Rightarrow\ 2\cdot x=6\ /:2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=3\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=3-2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x=a=3 \\ y=b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ T(a,\ b)=T(3,\ 1).$$

Tada je:

$$a^2+b^2=3^2+1^2=9+1=10.$$

Vježba 073

Ako je T(a, b) točka pravca y = x – 2 koja je najbliža točki A(2, 2) tada je $a^2 - b^2$

$A)\ 10 \qquad B)\ 8 \qquad C)\ 4 \qquad D)\ 2.$

Rezultat: B.

Zadatak 074 (Sara, srednja škola)

Pravac prolazi točkom T(3, 4) i siječe koordinatne osi u točkama s pozitivnim koordinatama. Duljina odsječka na y – osi odnosi se prema duljini odsječka na x – osi kao 2 : 3. Kako glasi jednadžba toga pravca?

$A)\ y=-\frac{5}{3}\cdot x+9 \qquad B)\ y=-\frac{2}{3}\cdot x+9 \qquad C)\ y=-\frac{5}{3}\cdot x+6 \qquad D)\ y=-\frac{2}{3}\cdot x+6$

Rješenje 074

Ponovimo!

Jednadžba pravca u segmentnom obliku glasi:

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1,$$

gdje je m odsječak na x osi, a n odsječak na y osi.

Jednadžba pravca u eksplicitnom obliku glasi:

$$y=k\cdot x+l,$$

gdje je k koeficijent smjera pravca, l odsječak pravca na y – osi.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

a : b = c : d.

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d\ \Rightarrow\ a\cdot d=b\cdot c.$$

1.inačica

Budući da pravac prolazi točkom T(3, 4), uvrstit ćemo koordinate točke u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(3,\ 4) \\ \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{3}{m}+\frac{4}{n}=1.$$

Duljina odsječka na y – osi odnosi se prema duljini odsječka na x – osi kao 2 : 3 pa slijedi

$$n : m = 2 : 3 \Rightarrow 3 \cdot n = 2 \cdot m.$$

Iz sustava jednadžbi dobiju se m i n.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{m} + \frac{4}{n} = 1 \\ 3 \cdot n = 2 \cdot m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{3}{m} + \frac{4}{n} = 1 \\ 3 \cdot n = 2 \cdot m \ /: 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{3}{m} + \frac{4}{n} = 1 \\ n = \frac{2}{3} \cdot m \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{3}{m} + \frac{4}{\frac{2}{3} \cdot m} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{m} + \frac{\frac{4}{1}}{\frac{2}{3} \cdot m} = 1 \Rightarrow \frac{3}{m} + \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{3} \cdot m} = 1 \Rightarrow \frac{3}{m} + \frac{6}{m} = 1 \Rightarrow \frac{9}{m} = 1 \Rightarrow m = 9 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = 9 \\ n = \frac{2}{3} \cdot m \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{2}{3} \cdot 9 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m = 9 \\ n = 6 \end{array} \right\}.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left. \begin{array}{l} m = 9 \ , \ n = 6 \\ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow \frac{y}{6} = -\frac{x}{9} + 1 \Rightarrow \frac{y}{6} = -\frac{x}{9} + 1 \ / \cdot 6 \Rightarrow y = -\frac{6}{9} \cdot x + 6 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \cdot x + 6.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Budući da pravac prolazi točkom T(3, 4), uvrstit ćemo koordinate točke u jednadžbu pravca.

$$\left. \begin{array}{l} T(x, y) = T(3, 4) \\ y = k \cdot x + l \end{array} \right\} \Rightarrow 4 = 3 \cdot k + l.$$

Kada pravac y = k · x + l siječe x – os vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y = k \cdot x + l \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = k \cdot x + l \Rightarrow -k \cdot x = l \Rightarrow -k \cdot x = l \ /: (-k) \Rightarrow x = -\frac{l}{k}.$$

Duljina odsječka na y – osi odnosi se prema duljini odsječka na x – osi kao 2 : 3 pa slijedi:

$$l : \left(-\frac{l}{k} \right) = 2 : 3 \Rightarrow 3 \cdot l = -\frac{2 \cdot l}{k} \Rightarrow 3 \cdot l = -\frac{2 \cdot l}{k} \ / \cdot \frac{k}{3 \cdot l} \Rightarrow k = -\frac{2}{3}.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se l.

$$\left. \begin{array}{l} k = -\frac{2}{3} \\ 4 = 3 \cdot k + l \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow 4 = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3} + l \right) \Rightarrow 4 = -2 + l \Rightarrow 4 + 2 = l \Rightarrow l = 6.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$y = -\frac{2}{3} \cdot x + 6.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 074

Pravac prolazi točkom T(3, 4) i siječe koordinatne osi u točkama s pozitivnim koordinatama. Duljina odsječka na y – osi odnosi se prema duljini odsječka na x – osi kao 4 : 6. Kako glasi jednadžba toga pravca?

$A) \ y = -\frac{5}{3} \cdot x + 9 \qquad B) \ y = -\frac{2}{3} \cdot x + 9 \qquad C) \ y = -\frac{5}{3} \cdot x + 6 \qquad D) \ y = -\frac{2}{3} \cdot x + 6$

Rezultat: D.

Zadatak 075 (Marija, gimnazija)

Simetrala tupog kuta što ga zatvaraju pravci 2 · x – y – 5 = 0 i 4 · x + 2 · y + 3 = 0 je pravac čija je jednadžba:

$A)\ 8\cdot x-7=0 \qquad B)\ 4\cdot y-5=0 \qquad C)\ 4\cdot y+13=0 \qquad D)\ 5\cdot x-11=0$

Rješenje 075

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2}=a\ ,\ a\ge 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednadžbe simetrala kutova što ih zatvaraju dva pravca koji se sijeku

$$\left.\begin{array}{l} A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1=0 \\ A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2=0 \end{array}\right\}$$

glase:

$$\frac{\left|A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{\left|A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2\right|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Izostavimo li apsolutne vrijednosti, dobijemo

$$\frac{A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

ili

$$\frac{A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{simetrala kuta koji ne sadrži} \\ \text{ishodište koordinatnog sustava}\end{array}\right]$$

$$\frac{A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=-\frac{A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{simetrala kuta koji sadrži} \\ \text{ishodište koordinatnog sustava}\end{array}\right].$$

Treba nacrtati pravce u koordinatnoj ravnini i odrediti sadrži li tupi kut ishodište koordinatnog sustava.

- $2\cdot x-y-5=0 \Rightarrow -y=-2\cdot x+5 \Rightarrow -y=-2\cdot x+5\ /\cdot(-1) \Rightarrow y=2\cdot x-5.$

Izračunajmo vrijednosti y za x = 0 i x = 3.

x	0	3
y	– 5	1

$$\left.\begin{array}{l} y=2\cdot 0-5=0-5=-5 \\ y=2\cdot 3-5=6-5=1 \end{array}\right\}.$$

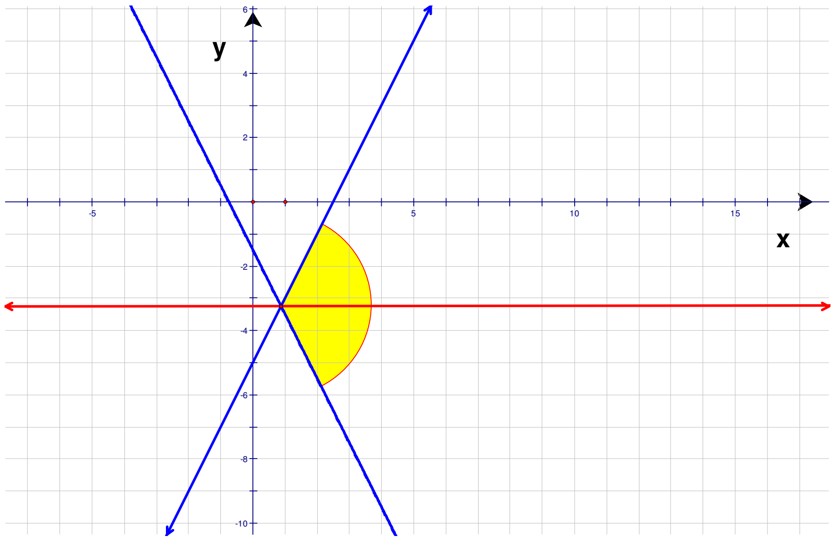
- $4\cdot x+2\cdot y+3=0 \Rightarrow 2\cdot y=-4\cdot x-3 \Rightarrow 2\cdot y=-4\cdot x-3\ /:2 \Rightarrow y=-2\cdot x-\frac{3}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y=-2\cdot x-1.5.$$

Izračunajmo vrijednosti y za x = 0 i x = – 1.

x	0	– 1
y	– 1.5	0.5

$$\left.\begin{array}{l} y=-2\cdot 0-1.5=0-1.5=-1.5 \\ y=-2\cdot(-1)-1.5=2-1.5=0.5 \end{array}\right\}.$$



Sa slike vidi se da tupi kut ne sadrži ishodište koordinatnog sustava pa pišemo:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x-y-5=0 \\ 4\cdot x+2\cdot y+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\frac{A_1\cdot x+B_1\cdot y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{A_2\cdot x+B_2\cdot y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot x-y-5}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\cdot x+2\cdot y+3}{\sqrt{4^2+2^2}} \Rightarrow \frac{2\cdot x-y-5}{\sqrt{4+1}}=\frac{4\cdot x+2\cdot y+3}{\sqrt{16+4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot x-y-5}{\sqrt{5}}=\frac{4\cdot x+2\cdot y+3}{\sqrt{20}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{2\cdot x-y-5}{\sqrt{5}}=\frac{4\cdot x+2\cdot y+3}{\sqrt{4\cdot 5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot x-y-5}{\sqrt{5}}=\frac{4\cdot x+2\cdot y+3}{2\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{2\cdot x-y-5}{\sqrt{5}}=\frac{4\cdot x+2\cdot y+3}{2\cdot\sqrt{5}} \;/\cdot 2\cdot\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(2\cdot x-y-5)=4\cdot x+2\cdot y+3 \Rightarrow 4\cdot x-2\cdot y-10=4\cdot x+2\cdot y+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x-2\cdot y-10=4\cdot x+2\cdot y+3 \Rightarrow -2\cdot y-10=2\cdot y+3 \Rightarrow -2\cdot y-10-2\cdot y-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\cdot y-13=0 \Rightarrow -4\cdot y-13=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow 4\cdot y+13=0.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 075

Simetrala šiljastog kuta što ga zatvaraju pravci 2 · x – y – 5 = 0 i 4 · x + 2 · y + 3 = 0 je pravac čija je jednadžba:

$A)\ 8\cdot x-7=0 \qquad B)\ 4\cdot y-5=0 \qquad C)\ 4\cdot y+13=0 \qquad D)\ 5\cdot x-11=0$

Rezultat: A.

Zadatak 076 (Zlatko, srednja škola)

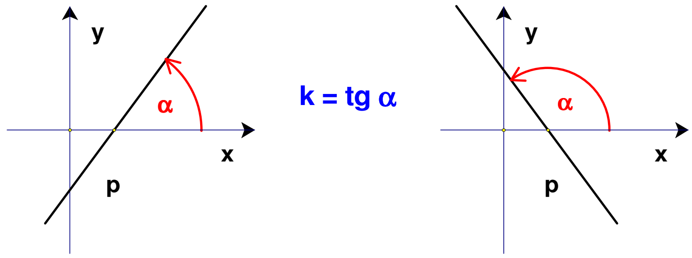
Odredite mjeru kuta koji s pozitivnom zrakom x osi zatvara pravac $y=2\cdot x+3$.

Rješenje 076

Ponovimo!

Kut za koji treba u pozitivnom smjeru zarotirati pozitivni dio x-osi oko sjecišta pravca p i osi x do pravca p naziva se prikloni kut pravca. Njegov tangens jednak je koeficijentu smjera pravca, tj.

$$tg\,\alpha = k.$$



Eksplicitni oblik jednadžbe pravca:

$$y = k \cdot x + l,$$

gdje je k koeficijent smjera pravca, a l odsječak na y osi.
Iz vrijednosti koeficijenta smjera k dobije se prikloni kut α:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \cdot x + 3 \\ k = 2 \\ k = tg\,\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = tg^{-1} 2 \Rightarrow \alpha = 63^0 26'6''.$$

Vježba 076

Odredite mjeru kuta koji s pozitivnom zrakom x osi zatvara pravac $y = x + 3$.

Rezultat: 45°.

Zadatak 077 (Boris, gimnazija)

Zadan je pravac $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$. Odredite udaljenost ishodišta od zadanog pravca.

Rješenje 077

Ponovimo!
Udaljenost točke T(x_0, y_0) od pravca p … A · x + B · y + C = 0 računa se po formuli

$$|Tp| = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi | x | = x.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je | x | = – x.

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Najprije napišemo implicitni oblik jednadžbe zadanog pravca:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4 \; / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot y = -x + 8 \Rightarrow x + 2 \cdot y - 8 = 0.$$

Ishodište koordinatnog sustava ima koordinate:

$$T(x, y) = T(0, 0).$$

Računamo udaljenost ishodišta od zadanog pravca.

$$\left.\begin{array}{l} x+2\cdot y-8=0 \\ A=1\ ,\ B=2\ ,\ C=-8 \\ T\left(x_0,\ y_0\right)=T(0,\ 0) \\ |Tp|=\dfrac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow |Tp|=\frac{|1\cdot 0+2\cdot 0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |Tp|=\frac{|0+0-8|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Tp|=\frac{|-8|}{\sqrt{5}} \Rightarrow |Tp|=\frac{8}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \Rightarrow |Tp|=\frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow |Tp|=\frac{8\cdot\sqrt{5}}{5}.$$

Vježba 077

Zadan je pravac $y=\frac{1}{2}\cdot x+4$. Odredite udaljenost ishodišta od zadanog pravca.

Rezultat: $\frac{8\cdot\sqrt{5}}{5}$.

Zadatak 078 (Boris, gimnazija)

Zadan je pravac $y=-\frac{1}{2}\cdot x+4$. Odredite pravac koji prolazi točkom T(4, 0) i usporedan je sa zadanim pravcem.

Rješenje 078

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom T(x_1, y_1) glasi

$$y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right).$$

Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama y = k_1 · x + l_1, y = k_2 · x + l_2, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1=k_2.$$

Zadani pravac $y=-\frac{1}{2}\cdot x+4$ ima koeficijent smjera $k=-\frac{1}{2}$.

Budući da je traženi pravac usporedan sa zadanim pravcem, imat će isti koeficijent smjera $k=-\frac{1}{2}$.

Jednadžba pravca koji prolazi točkom T i ima koeficijent smjera k glasi:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_1,\ y_1\right)=T(4,\ 0) \\ k=-\dfrac{1}{2} \\ y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=-\frac{1}{2}\cdot(x-4) \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot x+2.$$

Vježba 078

Zadan je pravac $y=\frac{1}{2}\cdot x+4$. Odredite pravac koji prolazi točkom T(4, 0) i usporedan je sa zadanim pravcem.

Rezultat: $y=\frac{1}{2}\cdot x-2.$

Zadatak 079 (Iveta, gimnazija)

Kako glasi jednadžba pravca kojemu je odrezak na osi ordinata jednak $-\frac{2}{3}$, a prolazi točkom T(4, – 5)?

Rješenje 079

Ponovimo!

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca glasi:

$$y=k\cdot x+l \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} k-\text{koeficijent smjera} \\ l-\text{odrezak na osi ordinata}\end{matrix}\right\}.$$

Zadan je odrezak l na osi ordinata pa vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} l=-\frac{2}{3} \\ y=k\cdot x+l\end{matrix}\right\} \Rightarrow y=k\cdot x-\frac{2}{3}.$$

Budući da točka T pripada pravcu, uvrstit ćemo njezine koordinate u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{matrix} T(x,\ y)=T(4,\ -5) \\ y=k\cdot x-\frac{2}{3}\end{matrix}\right\} \Rightarrow -5=k\cdot 4-\frac{2}{3} \Rightarrow -5=4\cdot k-\frac{2}{3} \Rightarrow 4\cdot k-\frac{2}{3}=-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot k-\frac{2}{3}=-5 \;/\cdot 3 \Rightarrow 12\cdot k-2=-15 \Rightarrow 12\cdot k=-15+2 \Rightarrow 12\cdot k=-13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot k=-13 \;/:12 \Rightarrow k=-\frac{13}{12}.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{matrix} k=-\frac{13}{12},\ l=-\frac{2}{3} \\ y=k\cdot x+l\end{matrix}\right\} \Rightarrow y=-\frac{13}{12}\cdot x-\frac{2}{3}.$$

Vježba 079

Kako glasi jednadžba pravca kojemu je odrezak na osi ordinata jednak 10, a prolazi točkom T(2, 20)?

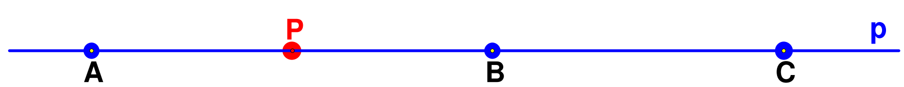
Rezultat: $y=5\cdot x+10.$

Zadatak 080 (Vedran, srednja škola ☺)

Konstruiraj pravac p i na njemu točke A, B i C. Odredi polovište P dužine $\overline{AB}$ i dokaži da je

$$|AC|+|BC|=2\cdot|PC|.$$

Rješenje 080



Sa slike vidi se:

$$|AP|=|PB|.$$

Tada je:

$$|AC|=|AP|+|PC|,$$

$$|BC|=|PC|-|PB| \Rightarrow |BC|=|PC|-|AP|.$$

Zbrajanjem dobivenih jednakosti dobije se tražena tvrdnja.

$$\left.\begin{array}{l} |AC| = |AP| + |PC| \\ |BC| = |PC| - |AP| \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow |AC| + |BC| = |AP| + |PC| + |PC| - |AP| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC| + |BC| = |AP| + |PC| + |PC| - |AP| \Rightarrow |AC| + |BC| = 2 \cdot |PC|.$$

Vježba 080

Konstruiraj pravac p i na njemu točke A, B i C. Odredi polovište P dužine $\overline{AB}$ i dokaži da je

$$|AC| - |BC| = 2 \cdot |AP|.$$

Rezultat: Analogan dokaz.