Zadatak 101 (Zagy, gimnazija)

Ako su M(a, b) i N(c, d) dvije točke na pravcu y = k · x + l, kolika je udaljenost tih točaka?

$A.\ \sqrt{1+k^2} \qquad B.\ |c-a| \qquad C.\ (a+c)\cdot\sqrt{1+k^2} \qquad D.\ |a-c|\cdot\sqrt{1+k^2}$

Rješenje 101

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k\cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Udaljenost točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Neka je zadan pravac y = k · x + l. Budući da točke M i N pripadaju pravcu, njihove koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu pravca.

- $\left.\begin{array}{l} M(x, y) = M(a, b) \\ y = k\cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow b = k\cdot a + l \Rightarrow M(x, y) = M(a, k\cdot a + l)$
- $\left.\begin{array}{l} N(x, y) = N(c, d) \\ y = k\cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow d = k\cdot c + l \Rightarrow N(x, y) = N(c, k\cdot c + l).$

Udaljenost točaka M i N iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} M(x_1, y_1) = M(a, k\cdot a + l) \\ N(x_2, y_2) = N(c, k\cdot c + l) \\ |MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |MN| = \sqrt{(c-a)^2 + (k\cdot c + l - (k\cdot a + l))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MN| = \sqrt{(c-a)^2 + (k\cdot c + l - k\cdot a - l)^2} \Rightarrow |MN| = \sqrt{(c-a)^2 + (k\cdot c + l - k\cdot a - l)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MN| = \sqrt{(c-a)^2 + (k\cdot c - k\cdot a)^2} \Rightarrow |MN| = \sqrt{(c-a)^2 + (k\cdot c - k\cdot a)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MN| = \sqrt{(c-a)^2 + (k\cdot(c-a))^2} \Rightarrow |MN| = \sqrt{(c-a)^2 + k^2\cdot(c-a)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MN| = \sqrt{(c-a)^2 + k^2\cdot(c-a)^2} \Rightarrow |MN| = \sqrt{(c-a)^2\cdot(1+k^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |MN| = \sqrt{(c-a)^2}\cdot\sqrt{1+k^2} \Rightarrow |MN| = |c-a|\cdot\sqrt{1+k^2}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 101

Ako su M(a, b) i N(b, a) dvije točke na pravcu y = k · x + l, kolika je udaljenost tih točaka?

$A.\ \sqrt{1+k^2}$ $\quad B.\ |b-a|$ $\quad C.\ (a+b)\cdot\sqrt{1+k^2}$ $\quad D.\ |b-a|\cdot\sqrt{1+k^2}$

Rezultat: D.

Zadatak 102 (Martina, TUPŠ)

Odredite jednadžbe stranica trokuta ABC ako su A(1, 1), B(4, 1), C(2, – 3).

Rješenje 102

Ponovimo!

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.

Jednadžba pravca oblika

$$y = k\cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima jednadžbu:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot\left(x - x_1\right).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

- Odredimo jednadžbu stranice AB trokuta ABC.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1,\ y_1\right) = A(1,\ 1) \\ B\left(x_2,\ y_2\right) = B(4,\ 1) \\ y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot\left(x - x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = \frac{1-1}{4-1}\cdot(x-1) \Rightarrow y - 1 = \frac{0}{3}\cdot(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 = 0\cdot(x-1) \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1.$$

- Odredimo jednadžbu stranice BC trokuta ABC.

$$\left.\begin{array}{l} B\left(x_1,\ y_1\right) = B(4,\ 1) \\ C\left(x_2,\ y_2\right) = C(2,\ -3) \\ y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot\left(x - x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = \frac{-3-1}{2-4}\cdot(x-4) \Rightarrow y - 1 = \frac{-4}{-2}\cdot(x-4) \Rightarrow$$

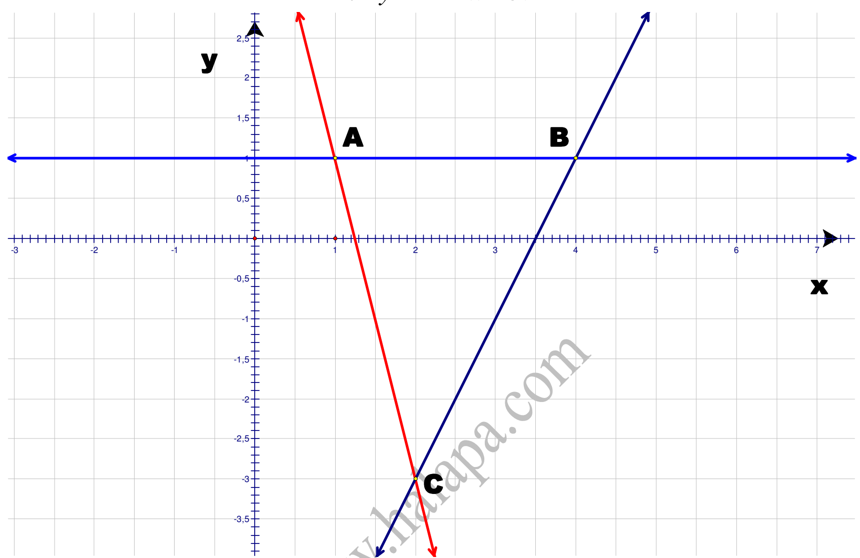
$$\Rightarrow y - 1 = 2\cdot(x-4) \Rightarrow y - 1 = 2\cdot x - 8 \Rightarrow y = 2\cdot x - 8 + 1 \Rightarrow y = 2\cdot x - 7.$$

- Odredimo jednadžbu stranice CA trokuta ABC.

$$\left.\begin{array}{l} C\left(x_1,\ y_1\right)=C\left(2,\ -3\right) \\ A\left(x_2,\ y_2\right)=A\left(1,\ 1\right) \\ y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow\ y-\left(-3\right)=\frac{1-\left(-3\right)}{1-2}\cdot\left(x-2\right)\ \Rightarrow\ y+3=\frac{1+3}{-1}\cdot\left(x-2\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y+3=\frac{4}{-1}\cdot\left(x-2\right)\ \Rightarrow\ y+3=-4\cdot\left(x-2\right)\ \Rightarrow\ y+3=-4\cdot x+8\ \Rightarrow\ y=-4\cdot x+8-3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=-4\cdot x+5.$$



Vježba 102

Odredite jednadžbe stranica trokuta ABC ako su A(1, 1), B(– 1, 1), C(– 1, – 1).

Rezultat: AB … y = 1, BC … x = – 1, CA … y = x.

Zadatak 103 (Valentina, strukovna škola)

Odredite realan broj m tako da pravci (m – 2) · x – y + 6 = 0, (2 · m + 1) · x + 3 · y – 4 = 0 budu paralelni.

Rješenje 103

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1=k_2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Jednadžbe pravaca napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili njihove koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{array}{l}(m-2)\cdot x-y+6=0\\(2\cdot m+1)\cdot x+3\cdot y-4=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-y=-(m-2)\cdot x-6\\3\cdot y=-(2\cdot m+1)\cdot x+4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-y=-(m-2)\cdot x-6\ /\cdot(-1)\\3\cdot y=-(2\cdot m+1)\cdot x+4\ /:3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=(m-2)\cdot x+6\\y=-\dfrac{2\cdot m+1}{3}\cdot x+\dfrac{4}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}k_1=m-2\\k_2=-\dfrac{2\cdot m+1}{3}\end{array}\right\}.$$

Budući da su pravci paralelni, moraju imati jednake koeficijente smjerova pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}k_1=m-2\\k_2=-\dfrac{2\cdot m+1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{uvjet paralelnosti}\\k_1=k_2\end{array}\right]\Rightarrow m-2=-\frac{2\cdot m+1}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m-2=-\frac{2\cdot m+1}{3}\ /\cdot 3\Rightarrow 3\cdot(m-2)=-(2\cdot m+1)\Rightarrow 3\cdot m-6=-2\cdot m-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot m+2\cdot m=-1+6\Rightarrow 5\cdot m=5\Rightarrow 5\cdot m=5\ /:5\Rightarrow m=1.$$

Vježba 103

Odredite realan broj m tako da pravci (m – 7) · x – y + 6 = 0, (2 · m + 1) · x + 3 · y – 4 = 0 budu paralelni.

Rezultat: m = 4.

Zadatak 104 (Valentina, strukovna škola)

Odredite realan broj m takav da pravac 2 · m · x – (3 – 4 · m) · y + 5 + 6 · m = 0 prolazi ishodištem koordinatnog sustava.

Rješenje 104

Ponovimo!

Kartezijev pravokutni koordinatni sustav u ravnini čine dva međusobno okomita brojevna pravca x i y sa zajedničkim ishodištem. Pravce x i y nazivamo koordinatnim osima, a njihovo sjecište O(0,0) je ishodište pravokutnog koordinatnog sustava.

Budući da pravac mora prolaziti ishodištem koordinatnog sustava, koordinate ishodišta uvrstit ćemo u jednadžbu pravca i izračunati m.

$$\left.\begin{array}{l}O(x,\ y)=O(0,\ 0)\\2\cdot m\cdot x-(3-4\cdot m)\cdot y+5+6\cdot m=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot m\cdot 0-(3-4\cdot m)\cdot 0+5+6\cdot m=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0-0+5+6\cdot m=0\Rightarrow 5+6\cdot m=0\Rightarrow 6\cdot m=-5\Rightarrow 6\cdot m=-5\ /:6\Rightarrow m=-\frac{5}{6}.$$

Vježba 104

Odredite realan broj m takav da pravac 2 · m · x – (3 – 4 · m) · y + 6 + 6 · m = 0 prolazi ishodištem koordinatnog sustava.

Rezultat: m = – 1.

Zadatak 105 (Miro, strukovna škola)

Točka A(x, 4) pripada pravcu 3 · x – 2 · y + 5 = 0, dok mu točka B(– 3, 8) ne pripada. Koeficijent smjera pravca kroz točke A i B je:

$$A.\ -1\qquad B.\ 1\qquad C.\ 3\qquad D.\ 5$$

Rješenje 105

Ponovimo!

Ako točka T(x_0, y_0) pripada pravcu A · x + B · y + C = 0, onda koordinate točke moraju zadovoljavati jednadžbu pravca, tj. vrijedi

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C = 0.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Pravac točkama A(x_1, y_1) , B(x_2, y_2) , $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Budući da točka A pripada zadanom pravcu, njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu pravca kako bismo izračunali apscisu točke A.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y) = A(x,\ 4) \\ 3 \cdot x - 2 \cdot y + 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot x - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x - 8 + 5 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x = 8 - 5 \Rightarrow 3 \cdot x = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = 3 \ /:3 \Rightarrow x = 1.$$

Točka A ima koordinate:

$$A(x,\ y) = A(1,\ 4).$$

Koeficijent smjera pravca kroz točke A i B glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1) = A(1,\ 4) \\ B(x_2,\ y_2) = B(-3,\ 8) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{koeficijent smjera} \\ k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \end{array}\right] \Rightarrow k = \frac{8-4}{-3-1} \Rightarrow k = \frac{4}{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -\frac{4}{4} \Rightarrow k = -1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 105

Točka A(1, y) pripada pravcu 3 · x – 2 · y + 5 = 0, dok mu točka B(– 3, 8) ne pripada. Koeficijent smjera pravca kroz točke A i B je:

$A.\ -1 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 3 \qquad D.\ 5$

Rezultat: A.

Zadatak 106 (Maja, ekonomska škola)

Koja je točka na pravcu x – y = 0 jednako udaljena od točaka A(– 6, 12) i B(4, 8)?

Rješenje 106

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Udaljenost točaka $A(x_A,\ y_A)$ i $B(x_B,\ y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Jednadžba zadanog pravca u eksplicitnom obliku glasi:

$$x - y = 0 \Rightarrow -y = -x \Rightarrow -y = -x \ / \cdot (-1) \Rightarrow y = x.$$

Točka T koja pripada pravcu ima sljedeće koordinate:

$$T(x, y) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{pravac} \\ y = x \end{bmatrix} \Rightarrow T(x, x).$$

Računamo:

- udaljenost točaka A i T

$$\left. \begin{aligned} & A(x_1, y_1) = A(-6, 12) \\ & T(x_2, y_2) = T(x, x) \\ & |AT| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |AT| = \sqrt{(x - (-6))^2 + (x - 12)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT| = \sqrt{(x + 6)^2 + (x - 12)^2}.$$

- udaljenost točaka B i T

$$\left. \begin{aligned} & B(x_1, y_1) = B(4, 8) \\ & T(x_2, y_2) = T(x, x) \\ & |BT| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |BT| = \sqrt{(x - 4)^2 + (x - 8)^2}.$$

Budući da udaljenosti $|AT|$ i $|BT|$ moraju biti jednake, slijedi:

$$|AT| = |BT| \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + (x-12)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (x-8)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + (x-12)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (x-8)^2} \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+6)^2 + (x-12)^2} \right)^2 = \left(\sqrt{(x-4)^2 + (x-8)^2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+6)^2 + (x-12)^2 = (x-4)^2 + (x-8)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 12 \cdot x + 36 + x^2 - 24 \cdot x + 144 = x^2 - 8 \cdot x + 16 + x^2 - 16 \cdot x + 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 12 \cdot x + 36 + x^2 - 24 \cdot x + 144 = x^2 - 8 \cdot x + 16 + x^2 - 16 \cdot x + 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot x + 36 - 24 \cdot x + 144 = -8 \cdot x + 16 - 16 \cdot x + 64 \Rightarrow 12 \cdot x + 36 - 24 \cdot x + 144 = -8 \cdot x + 16 - 16 \cdot x + 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot x + 36 + 144 = 16 + 64 \Rightarrow 12 \cdot x = 16 + 64 - 36 - 144 \Rightarrow 12 \cdot x = -100 \Rightarrow 12 \cdot x = -100 \ / : 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{100}{12} \Rightarrow x = -\frac{100}{12} \Rightarrow x = -\frac{25}{3}.$$

Koordinate točke T glase:

$$T(x,\ x) = T\left(-\frac{25}{3},\ -\frac{25}{3}\right).$$

Vježba 106

Koja je točka na pravcu y – x = 0 jednako udaljena od točaka A(– 6, 12) i B(4, 8)?

Rezultat: $T\left(-\frac{25}{3},\ -\frac{25}{3}\right).$

Zadatak 107 (Nebojša, srednja škola)

Koliko iznosi koeficijent smjera pravca simetrale dužine $\overline{AB}$, ako je A(– 2, – 1) i B(2, 2)?

Rješenje 107

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.
Simetrala dužine je pravac koji je okomit na tu dužinu i prolazi njezinim polovištem. Svaka točka simetrale dužine jednako je udaljena od rubnih točaka dužine.
Odredimo koeficijent smjera k_1 pravca AB.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1) = A(-2,\ -1) \\ B(x_2,\ y_2) = B(2,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right] \Rightarrow k_1 = \frac{2-(-1)}{2-(-2)} \Rightarrow k_1 = \frac{2+1}{2+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{3}{4}.$$

Budući da je simetrala dužine $\overline{AB}$ okomita na tu dužinu, za koeficijent smjera k_2 simetrale vrijedi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \ /\cdot \frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{\frac{3}{4}} \Rightarrow k_2 = -\frac{\frac{1}{1}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow k_2 = -\frac{4}{3}.$$

Vježba 107

Koliko iznosi koeficijent smjera pravca simetrale dužine $\overline{AB}$, ako je A(– 4, – 2) i B(4, 4)?

Rezultat: $-\frac{4}{3}.$

Zadatak 108 (Maja, ekonomska škola)

Zadane su točke A(0, – 1), B(– 2, 3) i C(3, 2). Kolika je udaljenost točke B od pravca AC?

Rješenje 108

Ponovimo!

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima jednadžbu:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right).$$

Udaljenost točke od pravca
Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ i pravca p ... $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ dana je formulom

$$d=\frac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Udaljenost točke T od pravca p je udaljenost između točaka T i T_p pri čemu je T_p nožište okomice iz točke T na pravac p.

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.

Ploština trokuta izračunava se po formuli

$$P=\frac{a\cdot v_a}{2}\quad,\quad P=\frac{b\cdot v_b}{2}\quad,\quad P=\frac{c\cdot v_c}{2}.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Ploština trokuta ΔABC kojemu su vrhovi točke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ jednaka je

$$P=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot\left(y_2-y_3\right)+x_2\cdot\left(y_3-y_1\right)+x_3\cdot\left(y_1-y_2\right)\right|.$$

Udaljenost točaka $A\left(x_A, y_A\right)$ i $B\left(x_B, y_B\right)$:

$$|AB|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}.$$

1.inačica

Odredimo jednadžbu pravca AC.

$$\left.\begin{array}{l} A\left(x_1, y_1\right)=A(0,-1)\\ C\left(x_2, y_2\right)=C(3,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right)\right]\Rightarrow y-(-1)=\frac{2-(-1)}{3-0}\cdot(x-0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+1=\frac{2+1}{3}\cdot x\Rightarrow y+1=\frac{3}{3}\cdot x\Rightarrow y+1=\frac{3}{3}\cdot x\Rightarrow y+1=x\Rightarrow -x+y+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+y+1=0\ /\cdot(-1)\Rightarrow x-y-1=0.$$

Udaljenost točke B od pravca AC iznosi:

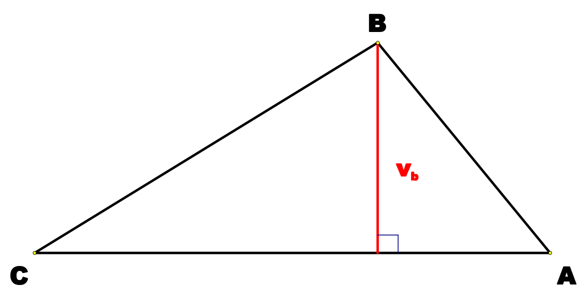
$$\left.\begin{array}{l} B\left(x_0, y_0\right)=B(-2,3)\\ x-y-1=0\\ A=1\ ,\ B=-1\ ,\ C=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left[|B, AC|=\frac{\left|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B, AC|=\frac{|1\cdot(-2)+(-1)\cdot 3+(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\Rightarrow |B, AC|=\frac{|-2-3-1|}{\sqrt{1+1}}\Rightarrow |B, AC|=\frac{|-6|}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B, AC|=\frac{6}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]\Rightarrow |B, AC|=\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow |B, AC|=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B, AC|=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{2}\Rightarrow |B, AC|=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{2}\Rightarrow |B, AC|=3\cdot\sqrt{2}.$$

2.inačica



Sa slike vidi se da je udaljenost točke B od pravca AC jednaka duljini visine v_b iz točke B na stranicu

$\overline{AC}$ trokuta ABC. Iz formule za površinu trokuta ABC dobije se duljina visine v_b.

$$P=\frac{|AC|\cdot v_b}{2} \Rightarrow P=\frac{|AC|\cdot v_b}{2} \; / \cdot \frac{2}{|AC|} \Rightarrow v_b=\frac{2\cdot P}{|AC|}.$$

Izračunamo površinu P trokuta ABC.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(0,\ -1) \\ B(x_2,\ y_2)=B(-2,\ 3) \\ C(x_3,\ y_3)=C(3,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P=\frac{1}{2}\cdot\left|x_1\cdot(y_2-y_3)+x_2\cdot(y_3-y_1)+x_3\cdot(y_1-y_2)\right|\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|0\cdot(3-2)+(-2)\cdot(2-(-1))+3\cdot(-1-3)\right| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|0-2\cdot(2+1)+3\cdot(-4)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot\left|-2\cdot3+3\cdot(-4)\right| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot|-6-12| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot|-18| \Rightarrow P=\frac{1}{2}\cdot18 \Rightarrow P=9.$$

Odredimo duljinu $|AC|$.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(0,\ -1) \\ C(x_2,\ y_2)=C(3,\ 2) \\ |AC|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AC|=\sqrt{(3-0)^2+(2-(-1))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|=\sqrt{3^2+(2+1)^2} \Rightarrow |AC|=\sqrt{3^2+3^2} \Rightarrow |AC|=\sqrt{2\cdot3^2} \Rightarrow |AC|=\sqrt{3^2\cdot2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AC|=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |AC|=3\cdot\sqrt{2}.$$

Duljina visine v_b iznosi:

$$v_b=\frac{2\cdot P}{|AC|} \Rightarrow v_b=\frac{2\cdot9}{3\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow v_b=\frac{2\cdot9}{3\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow v_b=\frac{2\cdot3}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_b=\frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_b=\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_b=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow v_b=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_b=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_b=3\cdot\sqrt{2}.$$

Vježba 108

Zadane su točke A(0, – 1), B(– 2, 3) i C(3, 2). Kolika je udaljenost točke C od pravca AB?

Rezultat: $\frac{9\cdot\sqrt{5}}{5}.$

Zadatak 109 (Luka, gimnazija)

Pravac sadrži točku A(8, 15) i siječe pravac y = 7 · x + 9 u točki B pod pravim kutom. Zbroj koordinata točke B je:

$$A.\ -17 \qquad B.\ 17 \qquad C.\ 16 \qquad D.\ -16$$

Rješenje 109

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet okomitosti:

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.

Ako točka $T(x_0, y_0)$ pripada pravcu $y = k \cdot x + l$, onda koordinate točke moraju zadovoljavati jednadžbu pravca, tj. vrijedi

$$y_0 = k \cdot x_0 + l.$$

Traženi pravac $y = k \cdot x + l$ i zadani pravac $y = 7 \cdot x + 9$ sijeku se pod pravim kutom (okomiti su) pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y = k \cdot x + l \\ y = 7 \cdot x + 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = k \\ k_2 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet okomitosti} \\ k_1 \cdot k_2 = -1 \end{array}\right] \Rightarrow k \cdot 7 = -1 \Rightarrow 7 \cdot k = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot k = -1 \;/ : 7 \Rightarrow k = -\frac{1}{7}.$$

Budući da zadani pravac sadrži točku A, njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu pravca i izračunati l (odsječak na y osi).

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y) = A(8,\ 15) \\ k = -\frac{1}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow [\, y = k \cdot x + l \,] \Rightarrow 15 = -\frac{1}{7} \cdot 8 + l \Rightarrow 15 = -\frac{8}{7} + l \Rightarrow -\frac{8}{7} + l = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = 15 + \frac{8}{7} \Rightarrow l = \frac{15}{1} + \frac{8}{7} \Rightarrow l = \frac{105 + 8}{7} \Rightarrow l = \frac{113}{8}.$$

Jednadžba traženog pravca je:

$$\left.\begin{array}{l} k = -\frac{1}{7} \\ l = \frac{113}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow [\, y = k \cdot x + l \,] \Rightarrow y = -\frac{1}{7} \cdot x + \frac{113}{7}.$$

Da bismo našli koordinate točke B u kojoj se pravci sijeku moramo riješiti sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} y = 7 \cdot x + 9 \\ y = -\frac{1}{7} \cdot x + \frac{113}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow 7 \cdot x + 9 = -\frac{1}{7} \cdot x + \frac{113}{7} \Rightarrow 7 \cdot x + 9 = -\frac{1}{7} \cdot x + \frac{113}{7} \;/ \cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49 \cdot x + 63 = -x + 113 \Rightarrow 49 \cdot x + x = 113 - 63 \Rightarrow 50 \cdot x = 50 \Rightarrow 50 \cdot x = 50 \;/ : 50 \Rightarrow x = 1.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} y = 7 \cdot x + 9 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 7 \cdot 1 + 9 \Rightarrow y = 7 + 9 \Rightarrow y = 16.$$

Koordinate točke B su

$$B(x,\ y) = B(1,\ 16)$$

pa je njihov zbroj:

$$x + y = 1 + 16 = 17.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 109

Pravac sadrži točku A(8, 15) i siječe pravac y = 7 · x + 9 u točki B pod pravim kutom. Umnožak koordinata točke B je:

$$A.\ -17 \qquad B.\ 17 \qquad C.\ 16 \qquad D.\ -16$$

Rezultat: C.

Zadatak 110 (Sanja, strukovna škola)

Napiši jednadžbu pravca koji prolazi točkom A(2, – 3) i sa pozitivnim smjerom x osi zatvara kut 45°.

Rješenje 110

Ponovimo!

$$tg\,45^0 = 1.$$

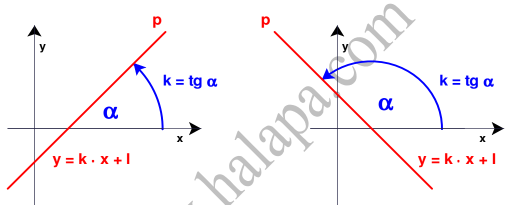
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

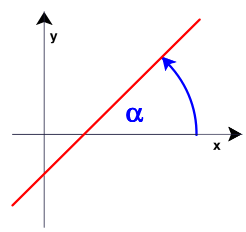
Prikloni kut pravca je kut za koji treba u pozitivnom smjeru zarotirati pozitivni dio x – osi oko presjeka pravca i osi do pravca p. Njegov tangens jednak je koeficijentu smjera pravca, tj.

$$tg\ \alpha = k.$$

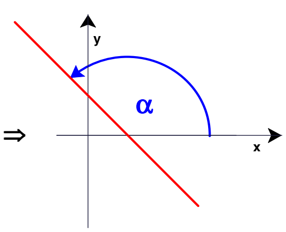


Veza između nagiba pravca i veličine priklonog kuta:

① Prikloni kut je šiljasti kut => tangens šiljastog kuta je pozitivan broj => koeficijent smjera je pozitivan broj.

$\alpha < 90° \;\Rightarrow\; tg\,\alpha > 0 \;\Rightarrow\; k > 0 \;\Rightarrow$ 

② Prikloni kut je tupi kut => tangens tupog kuta je negativan broj => koeficijent smjera je negativan broj.

$\alpha > 90° \;\Rightarrow\; tg\,\alpha < 0 \;\Rightarrow\; k < 0 \;\Rightarrow$ 

Najprije izračunamo koeficijent smjera traženog pravca.

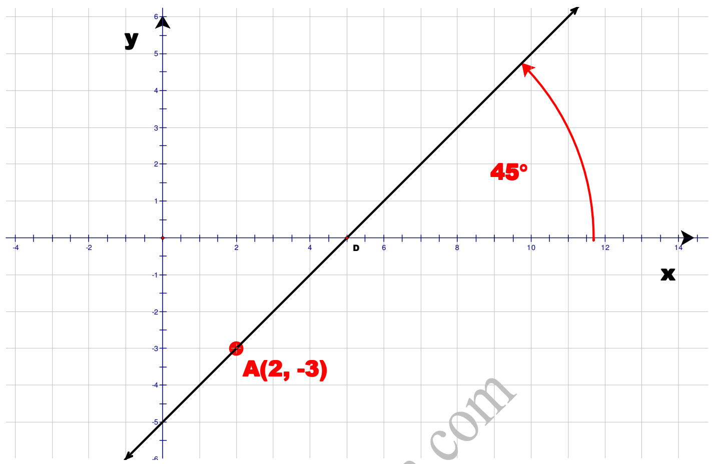
$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 45^0 \\ k = tg\,\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow k = tg\,45^0 \Rightarrow k = 1.$$

Budući da znamo koeficijent smjera k = 1, uvrstit ćemo koordinate točke A kojom pravac prolazi u njegovu jednadžbu kako bismo izračunali l odsječak na y osi.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y) = A(2,\ -3) \\ k = 1 \\ y = k \cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow -3 = 1 \cdot 2 + l \Rightarrow -3 = 2 + l \Rightarrow 2 + l = -3 \Rightarrow l = -3 - 2 \Rightarrow l = -5.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} k = 1\ ,\ l = -5 \\ y = k \cdot x + l \end{array}\right\} \Rightarrow y = 1 \cdot x - 5 \Rightarrow y = x - 5.$$



Vježba 110

Napiši jednadžbu pravca koji prolazi točkom A(1, – 4) i sa pozitivnim smjerom x osi zatvara kut 45°.

Rezultat: y = x – 5.

Zadatak 111 (Sanja, strukovna škola)

Odredi jednadžbu pravca koji je okomit na pravac x – 3 · y + 1 = 0, a prolazi sjecištem pravaca 3 · x – 2 · y – 6 = 0 i 7 · x + y + 3 = 0.

Rješenje 111

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Iz jednadžbe postavljenog pravca izračunamo njegov koeficijent smjera k_1.

$$x - 3 \cdot y + 1 = 0 \Rightarrow -3 \cdot y = -x - 1 \Rightarrow -3 \cdot y = -x - 1 \ / \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{3}.$$

Budući da je traženi pravac okomit na zadani pravac, koeficijent smjera traženog pravca glasi:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{3} \\ k_2 &= -\frac{1}{k_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{\frac{1}{3}} \Rightarrow k_2 = -\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow k_2 = -3.$$

Sada odredimo koordinate sjecišta pravaca $3 \cdot x - 2 \cdot y - 6 = 0$ i $7 \cdot x + y + 3 = 0$ tako da riješimo sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot x - 2 \cdot y - 6 &= 0 \\ 7 \cdot x + y + 3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot x - 2 \cdot y &= 6 \\ 7 \cdot x + y &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot x - 2 \cdot y &= 6 \\ 7 \cdot x + y &= -3 \ / \cdot 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 \cdot x - 2 \cdot y &= 6 \\ 14 \cdot x + 2 \cdot y &= -6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 17 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Računamo y.

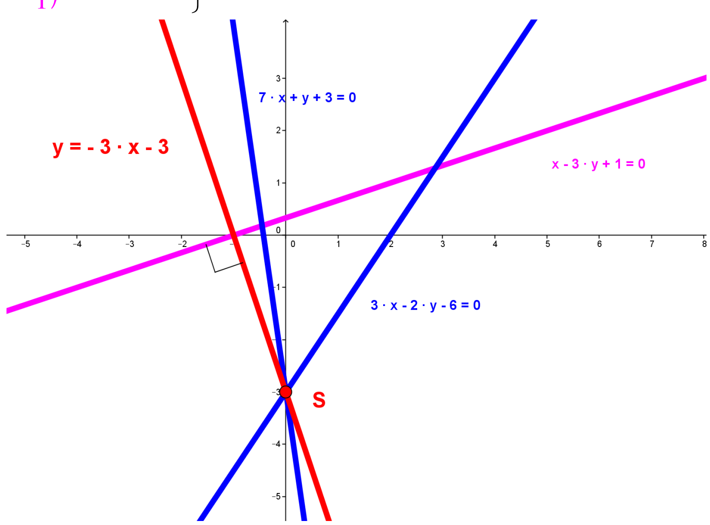
$$\left.\begin{aligned} 7 \cdot x + y &= -3 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 7 \cdot 0 + y = -3 \Rightarrow 0 + y = -3 \Rightarrow y = -3.$$

Koordinate sjecišta pravaca glase:

$$S(x, y) = S(0, -3).$$

Jednadžba traženog pravca je:

$$\left.\begin{aligned} & k_2 = -3 \ , \ S(x_1, y_1) = S(0, -3) \\ & y - y_1 = k_2 \cdot (x - x_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y - (-3) = -3 \cdot (x - 0) \Rightarrow y + 3 = -3 \cdot x \Rightarrow y = -3 \cdot x - 3.$$



Vježba 111

Odredi jednadžbu pravca koji je okomit na pravac $-x + 3 \cdot y - 1 = 0$, a prolazi sjecištem pravaca $3 \cdot x - 2 \cdot y - 6 = 0$ i $7 \cdot x + y + 3 = 0$.

Rezultat: $y = -3 \cdot x - 3.$

Zadatak 112 (4A, TUPŠ)

Odredite sve parametre $m \in R$ tako da pravci $3 \cdot x + y = m$ i $x + m \cdot y = 2$ budu paralelni.

$$A.\ m = \frac{1}{3} \qquad B.\ m \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\} \qquad C.\ m \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \qquad D.\ m = 3$$

Rješenje 112

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Jednadžbe pravaca napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili njihove koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{matrix} 3 \cdot x + y = m \\ x + m \cdot y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = -3 \cdot x + m \\ m \cdot y = -x + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = -3 \cdot x + m \\ m \cdot y = -x + 2 \ / \cdot \frac{1}{m} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = -3 \cdot x + m \\ y = -\frac{1}{m} \cdot x + \frac{2}{m} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} k_1 = -3 \\ k_2 = -\frac{1}{m} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet usporednosti} \\ k_1 = k_2 \end{bmatrix} \Rightarrow -3 = -\frac{1}{m} \Rightarrow -3 = -\frac{1}{m} \ / \cdot \left(-\frac{m}{3}\right) \Rightarrow m = \frac{1}{3}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 112

Odredite sve parametre $m \in R$ tako da pravci $3 \cdot x + y = m$ i $x + m \cdot y = 5$ budu paralelni.

$$A.\ m = \frac{1}{3} \qquad B.\ m \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\} \qquad C.\ m \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \qquad D.\ m = 3$$

Rezultat: A.

Zadatak 113 (Valentina, ekonomska škola)

Zadan je skup svih točaka koje su jednako udaljene od točaka A(– 4, 3) i B(2, 1). Napišite jednadžbu toga skupa i nacrtajte ga u zadanom koordinatnom sustavu.

Rješenje 113

Ponovimo!

Simetrala dužine je pravac koji je okomit na nju i prolazi njezinim polovištem. Svaka točka simetrale jednako je udaljena od rubnih točaka dužine.

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ su

$$P(x, y) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Pravac točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$, ima koeficijent smjera:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.
Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od točaka A i B simetrala je dužine $\overline{AB}$. Postupak rješavanja prikazat ćemo u četiri koraka.

1.korak

Odredimo polovište P dužine $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-4, 3) \\ B(x_2, y_2) = B(2, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)\right] \Rightarrow P\left(\frac{-4 + 2}{2}, \frac{3 + 1}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{-2}{2}, \frac{4}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-2}{2}, \frac{4}{2}\right) \Rightarrow P(-1, 2).$$

2.korak

Izračunamo koeficijent smjera pravca AB.

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(-4, 3) \\ B(x_2, y_2) = B(2, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right] \Rightarrow k = \frac{1 - 3}{2 - (-4)} \Rightarrow k = \frac{-2}{2 + 4} \Rightarrow k = \frac{-2}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{-2}{6} \Rightarrow k = -\frac{1}{3}.$$

3.korak

Pravac AB ima koeficijent smjera $k_1 = -\frac{1}{3}$. Simetrala dužine $\overline{AB}$ je pravac koji je okomit na pravac AB pa njezin koeficijent smjera k_2 glasi:

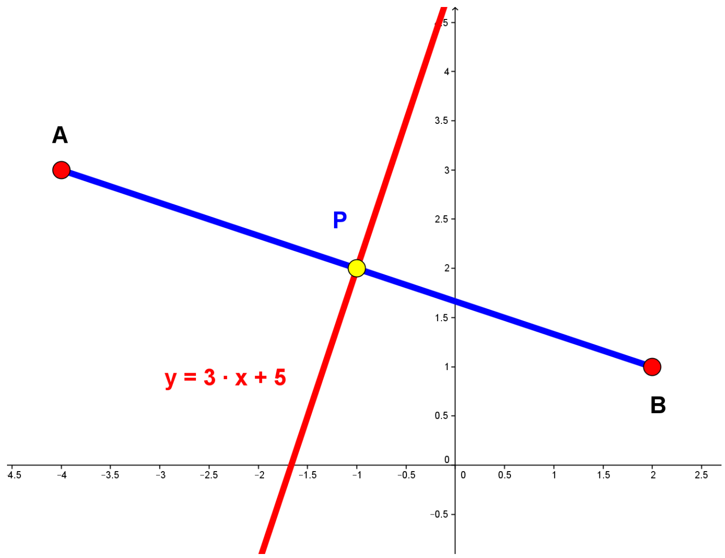
$$\left.\begin{array}{l} k_1 = -\frac{1}{3} \\ k_2 = -\frac{1}{k_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow k_2 = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow k_2 = 3.$$

4.korak

Jednadžba simetrale (pravca koji prolazi točkom P(– 1, 2) i ima koeficijent smjera k = 3) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} P(x_1, y_1) = P(-1, 2) \\ k = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \right] \Rightarrow y - 2 = 3 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow y - 2 = 3 \cdot (x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = 3 \cdot x + 3 \Rightarrow y = 3 \cdot x + 3 + 2 \Rightarrow y = 3 \cdot x + 5.$$



Vježba 113

Zadan je skup svih točaka koje su jednako udaljene od točaka A(0, 0) i B(3, 5). Napišite jednadžbu toga skupa.

Rezultat: $y = -\frac{3}{5} \cdot x + \frac{17}{4}.$

Zadatak 114 (Ana, gimnazija)

Točke A(m + n, 1) i B(m – n, – 1) pripadaju pravcu $2 \cdot x - 3 \cdot y + 11 = 0.$ Tada je:

A. $m \cdot n = 7.5$ B. $m \cdot n = -2$ C. $m \cdot n = -8.25$ D. $m \cdot n = -1$

Rješenje 114

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a = b \Rightarrow a^2 = b^2.$$

$$\left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow a-c=b-d$$

Budući da točke A i B pripadaju zadanom pravcu, uvrstit ćemo njihove koordinate u jednadžbu pravca.

- $\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(m+n,\ 1) \\ 2\cdot x-3\cdot y+11=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(m+n)-3\cdot 1+11=0 \Rightarrow 2\cdot m+2\cdot n-3+11=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot m+2\cdot n=3-11 \Rightarrow 2\cdot m+2\cdot n=-8 \Rightarrow 2\cdot m+2\cdot n=-8\ /:2 \Rightarrow m+n=-4.$

- $\left.\begin{array}{l} B(x,\ y)=B(m-n,\ -1) \\ 2\cdot x-3\cdot y+11=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(m-n)-3\cdot(-1)+11=0 \Rightarrow 2\cdot m-2\cdot n+3+11=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot m-2\cdot n=-3-11 \Rightarrow 2\cdot m-2\cdot n=-14 \Rightarrow 2\cdot m-2\cdot n=-14\ /:2 \Rightarrow m-n=-7.$

Dobili smo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} m+n=-4 \\ m-n=-7 \end{array}\right\}.$$

1.inačica

Riješimo sustav jednadžbi metodom suprotnih koeficijenata.

$$\left.\begin{array}{l} m+n=-4 \\ m-n=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot m=-11 \Rightarrow 2\cdot m=-11\ /:2 \Rightarrow m=-5.5.$$

Računamo n.

$$\left.\begin{array}{l} m=-5.5 \\ m+n=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow -5.5+n=-4 \Rightarrow n=-4+5.5 \Rightarrow n=1.5.$$

Tada je:

$$m\cdot n=-5.5\cdot 1.5=-8.25.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} m+n=-4 \\ m-n=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m+n=-4\ /^2 \\ m-n=-7\ /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (m+n)^2=16 \\ (m-n)^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m^2+2\cdot m\cdot n+n^2=16 \\ m^2-2\cdot m\cdot n+n^2=49 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2+2\cdot m\cdot n+n^2-\left(m^2-2\cdot m\cdot n+n^2\right)=16-49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2+2\cdot m\cdot n+n^2-m^2+2\cdot m\cdot n-n^2=-33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2+2\cdot m\cdot n+n^2-m^2+2\cdot m\cdot n-n^2=-33 \Rightarrow 2\cdot m\cdot n+2\cdot m\cdot n=-33 \Rightarrow 4\cdot m\cdot n=-33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot m\cdot n=-33\ /:4 \Rightarrow m\cdot n=-8.25.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 114

Točke A(m + n, 1) i B(m – n, – 1) pripadaju pravcu $2\cdot x-3\cdot y+11=0$. Tada je:

A. $m^2+n^2=32.5$ *B.* $m^2+n^2=30.25$ *C.* $m^2+n^2=20.5$ *D.* $m^2+n^2=-28$

Rezultat: A.

Zadatak 115 (Ivan, gimnazija)

Zadan je pravac $2 \cdot x - 5 \cdot y - 17 = 0$. Odredite jednadžbu pravca koji je okomit na njega i siječe ga u točki s ordinatom y = 3.

Rješenje 115

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Uvjet okomitosti:

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Jednadžbu zadanog pravca preoblikujemo u eksplicitni oblik kako bismo odredili njegov koeficijent smjera.

$$2 \cdot x - 5 \cdot y - 17 = 0 \Rightarrow -5 \cdot y = -2 \cdot x + 17 \Rightarrow -5 \cdot y = -2 \cdot x + 17 \; / : (-5) \Rightarrow y = \frac{2}{5} \cdot x - \frac{17}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{2}{5}.$$

Pravci su međusobno okomiti pa traženi pravac ima koeficijent smjera koji iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = \frac{2}{5} \\ k_2 = -\frac{1}{k_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{\frac{2}{5}} \Rightarrow k_2 = -\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{5}} \Rightarrow k_2 = -\frac{5}{2}.$$

Budući da traženi pravac siječe pravac $2 \cdot x - 5 \cdot y - 17 = 0$ u točki s ordinatom y = 3, njezina apscisa ima vrijednost:

$$\left.\begin{array}{l} y=3 \\ 2\cdot x-5\cdot y-17=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot x-5\cdot 3-17=0\ \Rightarrow\ 2\cdot x-15-17=0\ \Rightarrow\ 2\cdot x=15+17\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x=32\ \Rightarrow\ 2\cdot x=32\ /:2\ \Rightarrow\ x=16.$$

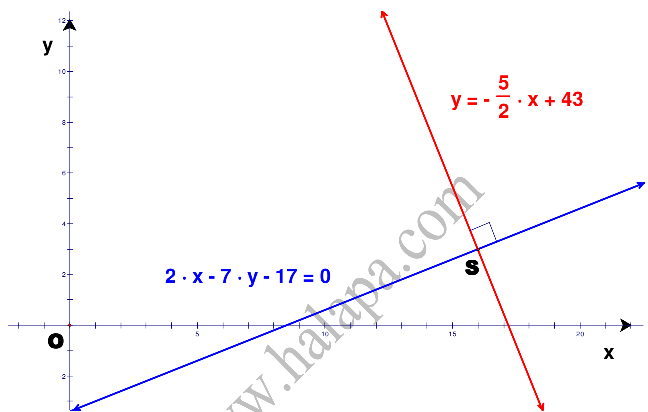
Sjecište pravaca ima koordinate:

$$S(x,\ y)=S(16,\ 3).$$

Jednadžba pravca koji prolazi točkom S i ima koeficijent smjera k_2 glasi:

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1,\ y_1)=S(16,\ 3) \\ k_2=-\dfrac{5}{2} \\ y-y_1=k\cdot(x-x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ y-3=-\frac{5}{2}\cdot(x-16)\ \Rightarrow\ y-3=-\frac{5}{2}\cdot x+40\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=-\frac{5}{2}\cdot x+40+3\ \Rightarrow\ y=-\frac{5}{2}\cdot x+43.$$



Vježba 115

Zadan je pravac 2 · x – 5 · y – 17 = 0. Odredite jednadžbu pravca koji je okomit na njega i siječe ga u točki s apscisom x = 16.

Rezultat: $y=-\dfrac{5}{2}\cdot x+43.$

Zadatak 116 (Luka, gimnazija)

Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x)=x^2-2\cdot x-3$ u točki s apscisom x = 4.

Rješenje 116

Ponovimo!

Oznake za derivaciju su:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^n	$n\cdot x^{n-1}$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot \left(f(x)\right)' \quad , \quad \left(f(x) \pm g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' \pm \left(g(x)\right)'.$$

Tangenta na graf funkcije f u točki T(x_0, y_0) ima jednadžbu:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Postupak rada:

① Izračunamo ordinatu točke T(x_0, y_0) (točka pripada grafu funkcije f).

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = f(x_0) \\ f(x_0) = x_0^2 - 2 \cdot x_0 - 3 \\ x_0 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_0 = x_0^2 - 2 \cdot x_0 - 3 \\ x_0 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow y_0 = 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 \Rightarrow y_0 = 16 - 8 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow T(x_0, y_0) = T(4, 5).$$

② Deriviramo funkciju f.

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3 \Rightarrow f'(x) = \left(x^2 - 2 \cdot x - 3\right)' \Rightarrow f'(x) = \left(x^2\right)' - (2 \cdot x)' - 3' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(x^2\right)' - 2 \cdot x' - 3' \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x - 2 \cdot 1 - 0 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x - 2.$$

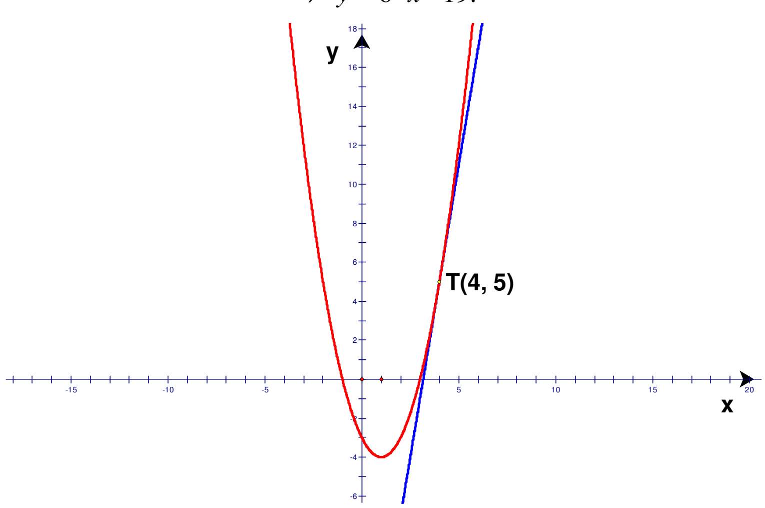
③ Nađemo vrijednost $f'(x_0)$ za $x_0 = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 2 \cdot x_0 - 2 \\ x_0 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(4) = 2 \cdot 4 - 2 \Rightarrow f'(4) = 6.$$

④ Odredimo jednadžbu tangente.

$$\left.\begin{array}{l} T(x_0, y_0) = T(4, 5) \\ f'(x_0) = f'(4) = 6 \\ y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 5 = 6 \cdot (x - 4) \Rightarrow y - 5 = 6 \cdot x - 24 \Rightarrow y = 6 \cdot x - 24 + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 6 \cdot x - 19.$$



Vježba 116

Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3$ u točki s apscisom x = – 1.

Rezultat: $y = -4 \cdot x - 4.$

Zadatak 117 (Petar, veleučilište)

Odredi odreske koje na koordinatnim osima odsijeca ravnina $2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z - 12 = 0.$

Rješenje 117

Ponovimo!

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

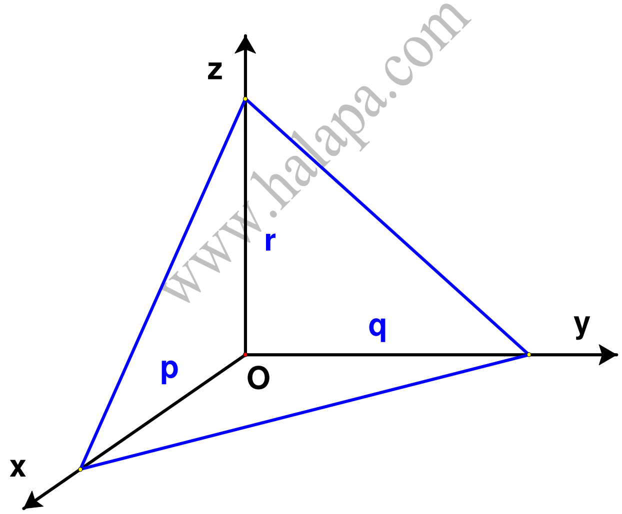
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Segmentni oblik jednadžbe ravnine glasi:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

gdje su p, q i r segmenti jer su njihove apsolutne vrijednosti jednake duljini odrezaka ravnine na koordinatnim osima.



Preoblikujemo jednadžbu ravnine tako da je dovedemo u segmentni oblik.

$$2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z - 12 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z = 12 \Rightarrow 2 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z = 12 \ / \cdot \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot x}{12} + \frac{3 \cdot y}{12} + \frac{4 \cdot z}{12} = 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{12} + \frac{3 \cdot y}{12} + \frac{4 \cdot z}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow \left. \begin{matrix} p = 6 \\ q = 4 \\ r = 3 \end{matrix} \right\}.$$

Vježba 117

Odredi odreske koje na koordinatnim osima odsijeca ravnina $6 \cdot x + 3 \cdot y + 4 \cdot z - 12 = 0.$

Rezultat: $p = 2 \ , \ q = 4 \ , \ r = 3.$

Zadatak 118 (Josip, gimnazija)

Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom T(4, 3) i odsječci na koordinatnim osima su mu jednaki?

Rješenje 118

Ponovimo!

Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b.$$

Pravac je skup svih točaka (x, y) u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0,$$

pri čemu je barem jedan od koeficijenata A, B različit od nule. Ova se jednadžba naziva implicitni oblik jednadžbe pravca.

Budući da pravac prolazi točkom T(x, y), uvrstit ćemo njezine koordinate u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(4,\ 3) \\ m=n \\ \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{m}+\frac{3}{m}=1 \Rightarrow \frac{7}{m}=1 \Rightarrow m=7.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} m=n=7 \\ \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1 \Rightarrow \frac{x}{7}+\frac{y}{7}=1 \ /\cdot 7 \Rightarrow x+y=7 \Rightarrow x+y-7=0.$$

Vježba 118

Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom T(5, 2) i odsječci na koordinatnim osima su mu jednaki?

Rezultat: $x+y-7=0.$

Zadatak 119 (Josip, gimnazija)

Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom T(4, 3) i odsječak na x – osi dva puta je veći od odsječka na y – osi?

Rješenje 119

Ponovimo!

Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.

Kako zapisati "broj b je n puta veći od broja a"?

$$b=n\cdot a \quad , \quad \frac{b}{n}=a \quad , \quad \frac{b}{a}=n.$$

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Pravac je skup svih točaka (x, y) u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0,$$

pri čemu je barem jedan od koeficijenata A, B različit od nule. Ova se jednadžba naziva implicitni oblik jednadžbe pravca.
Budući da pravac prolazi točkom T(x, y), uvrstit ćemo njezine koordinate u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} T(x, y) = T(4, 3) \\ m = 2 \cdot n \\ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{2 \cdot n} + \frac{3}{n} = 1 \Rightarrow \frac{4}{2 \cdot n} + \frac{3}{n} = 1 \Rightarrow \frac{2}{n} + \frac{3}{n} = 1 \Rightarrow \frac{5}{n} = 1 \Rightarrow n = 5.$$

Računamo m.

$$\left.\begin{array}{l} m = 2 \cdot n \\ n = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 2 \cdot 5 \Rightarrow m = 10.$$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} m = 10 \ , \ n = 5 \\ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1 \ / \cdot 10 \Rightarrow x + 2 \cdot y = 10 \Rightarrow x + 2 \cdot y - 10 = 0.$$

Vježba 119

Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom T(4, 4) i odsječak na x – osi četiri puta je veći od odsječka na y – osi?

Rezultat: $x + 4 \cdot y - 20 = 0.$

Zadatak 120 (Josip, gimnazija)

Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom T(4, 3) i odsječak na x – osi za dva je veći od odsječka na y – osi?

Rješenje 120

Ponovimo!

Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Kako zapisati "broj b je za n veći od broja a"?

$$b = a + n \quad , \quad b - n = a \quad , \quad b - a = n.$$

Kako zapisati "broj b je za n manji od broja a"?

$$b + n = a \quad , \quad b = a - n \quad , \quad a - b = n.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Pravac je skup svih točaka (x, y) u ravnini čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0,$$

pri čemu je barem jedan od koeficijenata A, B različit od nule. Ova se jednadžba naziva implicitni oblik jednadžbe pravca.
Budući da pravac prolazi točkom T(x, y), uvrstit ćemo njezine koordinate u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y) = T(4,\ 3) \\ m = n+2 \\ \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{n+2} + \frac{3}{n} = 1 \Rightarrow \frac{4}{n+2} + \frac{3}{n} = 1 \; / \cdot n \cdot (n+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot n + 3 \cdot (n+2) = n \cdot (n+2) \Rightarrow 4 \cdot n + 3 \cdot n + 6 = n^2 + 2 \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot n + 3 \cdot n + 6 - n^2 - 2 \cdot n = 0 \Rightarrow -n^2 + 5 \cdot n + 6 = 0 \Rightarrow -n^2 + 5 \cdot n + 6 = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 5 \cdot n - 6 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n^2 - 5 \cdot n - 6 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = -6 \\ n_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{5+7}{2} \\ n_2 = \dfrac{5-7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{12}{2} \\ n_2 = -\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \dfrac{12}{2} \\ n_2 = -\dfrac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = 6 \\ n_2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Računamo m.

- $\left.\begin{array}{l} m = n+2 \\ n = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 6+2 \Rightarrow m = 8.$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} m = 8 \ , \ n = 6 \\ \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1 \; / \cdot 24 \Rightarrow 3 \cdot x + 4 \cdot y = 24 \Rightarrow 3 \cdot x + 4 \cdot y - 24 = 0.$$

- $\left.\begin{array}{l} m = n+2 \\ n = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow m = -1+2 \Rightarrow m = 1.$

Jednadžba pravca glasi:

$$\left.\begin{array}{l} m = 1 \ , \ n = -1 \\ \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x - y - 1 = 0.$$

Vježba 120

Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom T(4, 3) i odsječak na y – osi za dva je manji od odsječka na x – osi?

Rezultat: $3 \cdot x + 4 \cdot y - 24 = 0, \ x - y - 1 = 0.$