Zadatak 141 (Rex, ekonomska škola)

Koji od pravaca prolazi ishodištem koordinatnog sustava?

$$A.\ \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \qquad B.\ x+y=1 \qquad C.\ 2\cdot x+3\cdot y=0 \qquad D.\ y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}$$

Rješenje 141

Ponovimo!

$$\frac{0}{n}=0\ ,\ n\neq 0 \quad , \quad n\cdot 0=0.$$

Budući da pravac treba prolaziti ishodištem koordinatnog sustava (točkom O(0, 0)), uvrstit ćemo koordinate ishodišta u jednadžbe pravaca i provjeriti dobije li se točna (istinita) jednakost.

$$O(x,\ y)=O(0,\ 0)\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1 \\ x+y=1 \\ 2\cdot x+3\cdot y=0 \\ y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{0}{3}+\frac{0}{-2}=1 \\ 0+0=1 \\ 2\cdot 0+3\cdot 0=0 \\ 0=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0+0=1 \\ 0+0=1 \\ 0+0=0 \\ 0=0+\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0\neq 1 \\ 0\neq 1 \\ 0=0\ \text{točno} \\ 0\neq\frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 141

Koji od pravaca prolazi ishodištem koordinatnog sustava?

$$A.\ \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=0 \qquad B.\ x+y=1 \qquad C.\ 2\cdot x+3\cdot y=1 \qquad D.\ y=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}$$

Rezultat: A.

Zadatak 142 (Martin, srednja škola)

Odredite koordinate točke koja je simetrična točki A(4, – 2) s obzirom na pravac y = 2 · x – 3.

Rješenje 142

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Uvjet okomitosti:

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

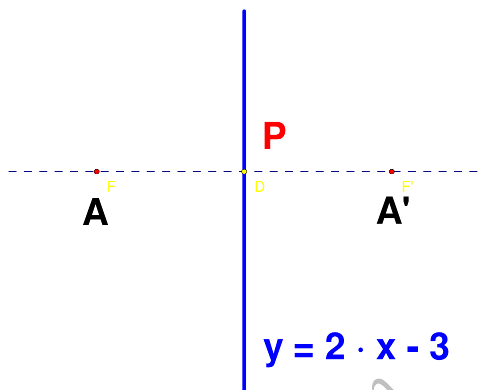
$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom T(x_1, y_1) glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Koordinate polovišta P dužine $\overline{AB}$, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) su

$$P(x, y) = P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$



Najprije naći ćemo jednadžbu pravca koji prolazi točkom A i okomit je na pravac y = 2 · x – 3 čiji je koeficijent smjera

$$k_1 = 2.$$

Traženi pravac ima koeficijent smjera

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{2}$$

pa njegova jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1, y_1) = A(4, -2) \\ k_2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\, y - y_1 = k_2 \cdot (x - x_1) \,\right] \Rightarrow y - (-2) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 2 = -\frac{1}{2} \cdot x + 2 \Rightarrow y + 2 = -\frac{1}{2} \cdot x + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x.$$

Da bismo odredili koordinate polovišta P dužine $\overline{AA'}$ moramo riješiti sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \cdot x - 3 \\ y = -\frac{1}{2} \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot x - 3 = -\frac{1}{2} \cdot x \Rightarrow 2 \cdot x - 3 = -\frac{1}{2} \cdot x \;/ \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot x - 6 = -x \Rightarrow 4 \cdot x + x = 6 \Rightarrow 5 \cdot x = 6 \Rightarrow 5 \cdot x = 6 \;/ : 5 \Rightarrow x = \frac{6}{5}.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2} \cdot x \\ x = \frac{6}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \Rightarrow y = -\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow y = -\frac{3}{5}.$$

Točka P ima koordinate:

$$P(x,\ y)=P\left(\frac{6}{5},\ -\frac{3}{5}\right).$$

Sada računamo koordinate točke A' koja je simetrična točki A s obzirom na pravac y = 2 · x – 3. Uočimo da je točka P polovište dužine $\overline{AA'}$.

$$\left.\begin{matrix} A(x_1,\ y_1)=A(4,\ -2) \\ P(x_\circ,\ y_\circ)=P\left(\frac{6}{5},\ -\frac{3}{5}\right) \\ A'(x_2,\ y_2)=A'(x,\ y)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \frac{x_1+x_2}{2}=x_\circ \\ \frac{y_1+y_2}{2}=y_\circ\end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{4+x}{2}=\frac{6}{5} \\ \frac{-2+y}{2}=-\frac{3}{5}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{4+x}{2}=\frac{6}{5}\ /\cdot 10 \\ \frac{-2+y}{2}=-\frac{3}{5}\ /\cdot 10\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 5\cdot(4+x)=12 \\ 5\cdot(-2+y)=-6\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 20+5\cdot x=12 \\ -10+5\cdot y=-6\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5\cdot x=12-20 \\ 5\cdot y=-6+10\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5\cdot x=-8 \\ 5\cdot y=4\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 5\cdot x=-8\ /:5 \\ 5\cdot y=4\ /:5\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-\frac{8}{5} \\ y=\frac{4}{5}\end{matrix}\right\}.$$

Točka A' ima koordinate:

$$A'(x,\ y)=A'\left(-\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right).$$

Vježba 142

Odredite koordinate točke koja je simetrična točki $A\left(-\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ s obzirom na pravac y = 2 · x – 3.

Rezultat: A(4, – 2).

Zadatak 143 (Marina, srednja škola)

Točka T(x, 2 · x – 6) jednako je udaljena od točaka A(0, 4) i B(8, 0) za svaku vrijednost realnog broja x. Dokaži!

Rješenje 143

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left.\begin{matrix} a=n \\ b=n\end{matrix}\right\} \Rightarrow a=b.$$

Udaljenost točaka $A(x_1,\ y_1)$ i $B(x_2,\ y_2)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Odredimo |AT| i |BT|:

- $$\left.\begin{matrix} A(x_1,\ y_1)=A(0,\ 4) \\ T(x_2,\ y_2)=T(x,\ 2\cdot x-6)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\ |AT|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT|=\sqrt{(x-0)^2+(2\cdot x-6-4)^2} \Rightarrow |AT|=\sqrt{x^2+(2\cdot x-10)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT|=\sqrt{x^2+(2\cdot x)^2-2\cdot 2\cdot x\cdot 10+10^2} \Rightarrow |AT|=\sqrt{x^2+4\cdot x^2-40\cdot x+100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AT| = \sqrt{5 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 100}$$

- $$\left.\begin{array}{l} B(x_1, y_1) = B(8, 0) \\ T(x_2, y_2) = T(x, 2 \cdot x - 6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[|BT| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BT| = \sqrt{(x-8)^2 + (2 \cdot x - 6 - 0)^2} \Rightarrow |BT| = \sqrt{(x-8)^2 + (2 \cdot x - 6)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BT| = \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2 + (2 \cdot x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BT| = \sqrt{x^2 - 16 \cdot x + 64 + 4 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 36} \Rightarrow |BT| = \sqrt{5 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 100}.$$

Očito je:

$$\left.\begin{array}{l} |AT| = \sqrt{5 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 100} \\ |BT| = \sqrt{5 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 100} \end{array}\right\} \Rightarrow |AT| = |BT|.$$

Vježba 143

Točka T(x, – 6 + 2 · x) jednako je udaljena od točaka A(0, 4) i B(8, 0) za svaku vrijednost realnog broja x. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 144 (Ante, tehnička škola)

Odredi koeficijent a tako da pravci $x + 3 \cdot y + 5 = 0$, $a \cdot x + (a-1) \cdot y = 1$ i $2 \cdot x - 5 \cdot y - 12 = 0$ prolaze istom točkom.

Rješenje 144

Ponovimo!

Opća jednadžba ravnine glasi

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0,$$

gdje su A, B, C i D koeficijenti, realni brojevi.

Naći ćemo sjecište prvog i trećeg pravca tako da riješimo sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} x + 3 \cdot y + 5 = 0 \\ 2 \cdot x - 5 \cdot y - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3 \cdot y = -5 \\ 2 \cdot x - 5 \cdot y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 3 \cdot y = -5 \; / \cdot (-2) \\ 2 \cdot x - 5 \cdot y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2 \cdot x - 6 \cdot y = 10 \\ 2 \cdot x - 5 \cdot y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow -11 \cdot y = 22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11 \cdot y = 22 \; / : (-11) \Rightarrow y = -2.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} x + 3 \cdot y = -5 \\ y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 3 \cdot (-2) = -5 \Rightarrow x - 6 = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -5 + 6 \Rightarrow x = 1.$$

Sjecište pravaca je točka

$$S(x, y) = S(1, -2).$$

Točka S pripada i pravcu

$$a \cdot x + (a-1) \cdot y = 1$$

pa njezine koordinate uvrstimo u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} S(x,\ y)=S(1,\ -2) \\ a\cdot x+(a-1)\cdot y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ a\cdot 1+(a-1)\cdot(-2)=1\ \Rightarrow\ a-2\cdot a+2=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a-2\cdot a=1-2\ \Rightarrow\ -a=-1\ \Rightarrow\ -a=-1\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ a=1.$$

Vježba 144

Odredi koeficijent a tako da pravci $x+3\cdot y+5=0,\ a\cdot x-(1-a)\cdot y=1$ i $2\cdot x-5\cdot y-12=0$ prolaze istom točkom.

Rezultat: a = 1.

Zadatak 145 (Miroslav, srednja škola)

Kakvi moraju biti predznaci od A i B da kut, što ga pravac $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ čini s pozitivnim smjerom osi x, bude:

a) manji od 90º

b) veći od 90º?

Rješenje 145

Ponovimo!

$$-\frac{a}{b}>0\ \Rightarrow\ a \text{ i } b \text{ imaju suprotne predznake} \quad , \quad -\frac{a}{b}<0\ \Rightarrow\ a \text{ i } b \text{ imaju jednake predznake}$$

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

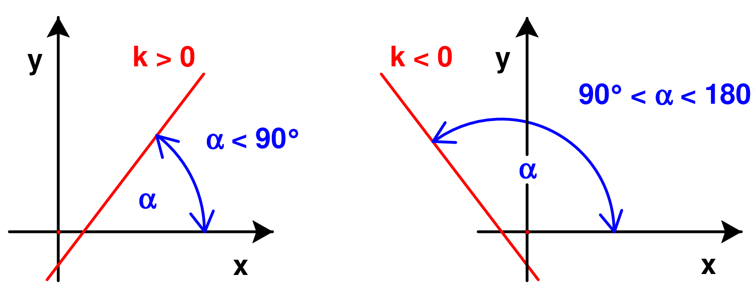
Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Za koeficijent smjera k vrijedi:

- k > 0 … pravac čini s pozitivnim smjerom osi x šiljasti kut (kut manji od 90º)
- k < 0 … pravac čini s pozitivnim smjerom osi x tupi kut (kut između 90º i 180º)



Preoblikujemo implicitni oblik jednadžbe pravca u eksplicitni.

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0\ \Rightarrow\ B\cdot y=-A\cdot x-C\ \Rightarrow\ B\cdot y=-A\cdot x-C\ /\cdot\frac{1}{B}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=-\frac{A}{B}\cdot x-\frac{C}{B}\ \Rightarrow\ \left[\ y=k\cdot x+l\ \right]\ \Rightarrow\ k=-\frac{A}{B}.$$

a)

$$k>0\ \Rightarrow\ -\frac{A}{B}>0\ \Rightarrow\ A \text{ i } B \text{ imaju suprotne predznake}$$

b)

$$k<0 \Rightarrow -\frac{A}{B}<0 \Rightarrow A \text{ i } B \text{ imaju jednake predznake}.$$

Vježba 145

Kakvi moraju biti predznaci od A i B da kut, što ga pravac $A \cdot x - B \cdot y + C = 0$ čini s pozitivnim smjerom osi x, bude:
a) manji od 90º
b) veći od 90º?

Rezultat: a) jednaki b) suprotni

Zadatak 146 (Asterix, gimnazija)

Napiši nekoliko točaka koje imaju svojstvo da im je zbroj apscise i ordinate jednak 2. Nacrtaj ih u koordinatnom sustavu. Što primjećuješ? Kako bismo ovu svezu koordinata napisali matematičkim simbolima?

Rješenje 146

Ponovimo!

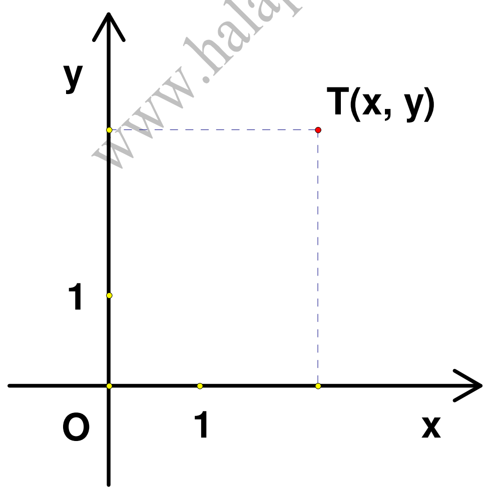
Kako zapisati "… broj b je n – terostruko veći od broja a …?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

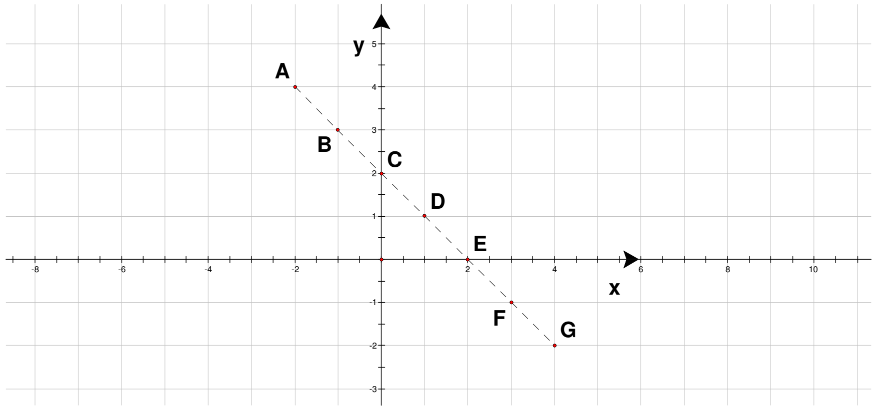
naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Uređenu trojku (O; x, y) pri čemu su x i y okomiti brojevni pravci s istim ishodištem nazivamo pravokutni koordinatni sustav u ravnini.



Svakoj točki T ravnine pridružen je jedan i samo jedan uređeni par realnih brojeva (x, y). Broj x zove se apscisa točke T, a broj y ordinata točke T.
Točke koje imaju svojstvo da im je zbroj apscise i ordinate jednak 2, na primjer, su:

$$A(-2, 4), B(-1, 3), C(0, 2), D(1, 1), E(2, 0), F(3, -1), G(4, -2), itd.$$

Točke leže na pravcu. Uvjerimo se!



Neka su T(x, y) točke koje imaju svojstvo da im je zbroj apscise i ordinate jednak 2. Matematički zapisujemo

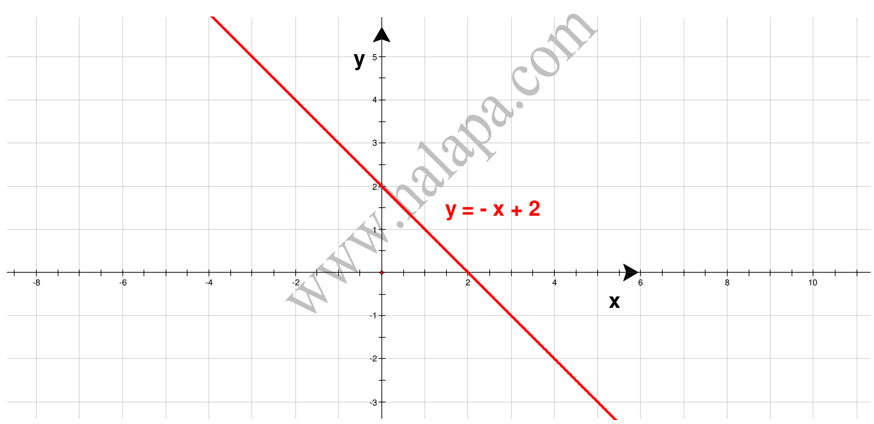
$$x + y = 2.$$

To je jednadžba pravca.

$$x + y = 2 \;\Rightarrow\; y = -x + 2.$$

Budući da je pravac određen s dvije točke, dovoljno je naći dvije njegove točke.

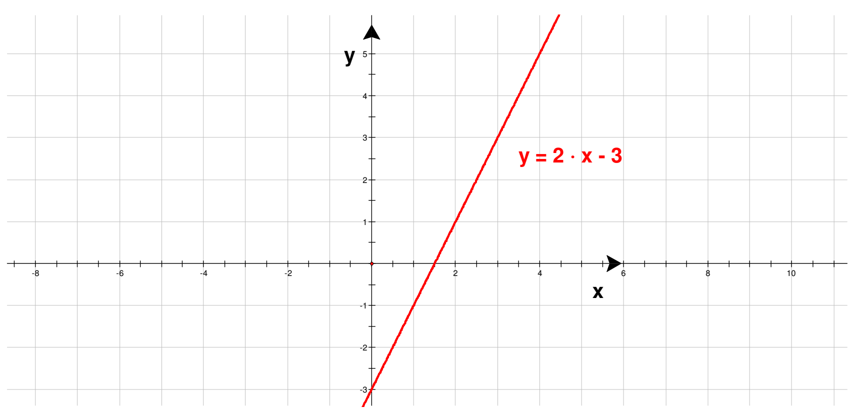
x	0	1
y = – x + 2	2	1



Vježba 146

Napiši nekoliko točaka koje imaju svojstvo da im je razlika dvostruke apscise i ordinate jednaka 3. Što primjećuješ? Kako bismo ovu svezu koordinata napisali matematičkim simbolima?

Rezultat: $2 \cdot x - y = 3 \;\Rightarrow\; \ldots \;\Rightarrow\; y = 2 \cdot x - 3.$



Zadatak 147 (Dora, gimnazija)

Odredite jednadžbu pravca koji sadrži točku T(8, 1), a sa pravcima $7 \cdot x + 6 \cdot y - 42 = 0$ i $9 \cdot x + 2 \cdot y - 14 = 0$ zatvara jednakokračan trokut.

Rješenje 147

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \alpha = \beta \Rightarrow tg\,\alpha = tg\,\beta \quad , \quad i = \sqrt{-1}.$$

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Kut između pravaca

$$y = k_1 \cdot x + l_1 \quad , \quad y = k_2 \cdot x + l_2$$

računa se iz formule

$$tg\,\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| = |y| \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = y \\ x = -y \end{matrix} \right\}.$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \ne 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Jednadžbe simetrala kutova što ih zatvaraju dva pravca koji se sijeku

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0 \end{array}\right\}$$

glase:

$$\frac{\left| A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{\left| A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \right|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Izostavimo li apsolutne vrijednosti, dobijemo

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

ili

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{simetrala kuta koji ne sadrži} \\ \text{ishodište koordinatnog sustava} \end{array}\right]$$

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = -\frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{simetrala kuta koji sadrži} \\ \text{ishodište koordinatnog sustava} \end{array}\right].$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Kod jednakokračnog trokuta duljine dviju stranica su jednake. Stranice jednakih duljina zovemo kracima trokuta.
Nasuprot većoj stranici u trokutu leži veći kut. Nasuprot manjoj stranici u trokutu leži manji kut. Nasuprot stranica jednake duljine u trokutu leže jednaki kutovi.

1.inačica

Jednadžba pravca točkom T(8, 1) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_1, y_1\right) = T(8, 1) \\ y - y_1 = k \cdot \left(x - x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = k \cdot (x - 8) \Rightarrow y - 1 = k \cdot x - 8 \cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = k \cdot x - 8 \cdot k + 1 \Rightarrow y = k \cdot x + 1 - 8 \cdot k.$$

Njegov koeficijent smjera je k.
Jednadžbe zadanih pravaca, također, napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo našli njihove koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{array}{l} 7 \cdot x + 6 \cdot y - 42 = 0 \\ 9 \cdot x + 2 \cdot y - 14 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 \cdot y = -7 \cdot x + 42 \\ 2 \cdot y = -9 \cdot x + 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 \cdot y = -7 \cdot x + 42 \; /:6 \\ 2 \cdot y = -9 \cdot x + 14 \; /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = -\frac{7}{6} \cdot x + 7 \\ y = -\frac{9}{2} \cdot x + 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = -\frac{7}{6} \\ k_2 = -\frac{9}{2} \end{array}\right\}.$$

Odredimo kutove koje pravac

$$y = k \cdot x + 1 - 8 \cdot k$$

zatvara sa pravcima

$$y = -\frac{7}{6} \cdot x + 7 \; , \; y = -\frac{9}{2} \cdot x + 7.$$

- $$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{7}{6}\cdot x+7\ \ ,\ \ k_1=-\frac{7}{6} \\ y=k\cdot x+1-8\cdot k\ \ ,\ \ k_2=k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[tg\,\varphi_1=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| \right] \Rightarrow tg\,\varphi_1=\left|\frac{k-\left(-\frac{7}{6}\right)}{1+\left(-\frac{7}{6}\right)\cdot k}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg\,\varphi_1=\left|\frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}\right|.$$

- $$\left.\begin{array}{l} y=k\cdot x+1-8\cdot k\ \ ,\ \ k_1=k \\ y=-\frac{9}{2}\cdot x+7\ \ ,\ \ k_2=-\frac{9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[tg\,\varphi_2=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| \right] \Rightarrow tg\,\varphi_2=\left|\frac{-\frac{9}{2}-k}{1+k\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ tg\,\varphi_2=\left|\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k}\right|.$$

Budući da traženi pravac sa zadanim pravcima pravi jednakokračan trokut, kutovi koje s njima zatvara međusobno su jednaki.

$$tg\,\varphi_1=tg\,\varphi_2\ \Rightarrow\ \left|\frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}\right|=\left|\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k}\right|.$$

Treba riješiti dvije jednadžbe.
Prva jednadžba

$$\left|\frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}\right|=\left|\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k}\right| \Rightarrow \frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}=\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k} \Rightarrow \frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}=\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k}\ /\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{7}{6}\cdot k\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}\cdot k\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(k+\frac{7}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}\cdot k\right)=\left(-\frac{9}{2}-k\right)\cdot\left(1-\frac{7}{6}\cdot k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}-\frac{21}{4}\cdot k=-\frac{9}{2}+\frac{21}{4}\cdot k-k+\frac{7}{6}\cdot k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}-\frac{21}{4}\cdot k=-\frac{9}{2}+\frac{21}{4}\cdot k-k+\frac{7}{6}\cdot k^2\ /\cdot 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot k-54\cdot k^2+14-63\cdot k=-54+63\cdot k-12\cdot k+14\cdot k^2\ /\cdot 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot k-54\cdot k^2+14-63\cdot k+54-63\cdot k+12\cdot k-14\cdot k^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -68\cdot k^2-102\cdot k+68=0 \Rightarrow -68\cdot k^2-102\cdot k+68=0\ /:(-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 34\cdot k^2+51\cdot k-34=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 34\cdot k^2+51\cdot k-34=0 \\ a=34\ \ ,\ \ b=51\ \ ,\ \ c=-34 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=34 \ ,\ b=51 \ ,\ c=-34 \\ k_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{-51\pm\sqrt{51^2-4\cdot 34\cdot(-34)}}{2\cdot 34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2}=\frac{-51\pm\sqrt{2\,601+4\,624}}{68} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{-51\pm\sqrt{7\,225}}{68} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{-51\pm 85}{68} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=\dfrac{-51+85}{68} \\ k_2=\dfrac{-51-85}{68}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=\dfrac{34}{68} \\ k_2=-\dfrac{136}{68}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=\dfrac{34}{68} \\ k_2=-\dfrac{136}{68}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=\dfrac{1}{2} \\ k_2=-2\end{array}\right\}.$$

Postoje dva pravca:

- $$\left.\begin{array}{l} y=k\cdot x+1-8\cdot k \\ k=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+1-8\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+1-8\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x+1-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\cdot x-3.$$

- $$\left.\begin{array}{l} y=k\cdot x+1-8\cdot k \\ k=-2\end{array}\right\} \Rightarrow y=-2\cdot x+1-8\cdot(-2) \Rightarrow y=-2\cdot x+1+16 \Rightarrow y=-2\cdot x+17.$$

Druga jednadžba

$$\left|\frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}\right|=\left|\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k}\right| \Rightarrow \frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}=-\frac{-\frac{9}{2}-k}{1-\frac{9}{2}\cdot k} \Rightarrow \frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}=\frac{\frac{9}{2}+k}{1-\frac{9}{2}\cdot k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k+\frac{7}{6}}{1-\frac{7}{6}\cdot k}=\frac{\frac{9}{2}+k}{1-\frac{9}{2}\cdot k} \ /\cdot\left(1-\frac{7}{6}\cdot k\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}\cdot k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(k+\frac{7}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}\cdot k\right)=\left(\frac{9}{2}+k\right)\cdot\left(1-\frac{7}{6}\cdot k\right) \Rightarrow$$

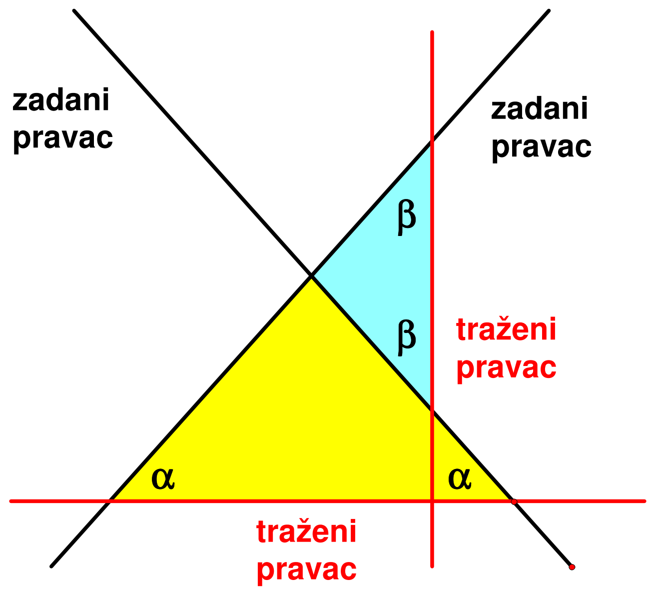
$$\Rightarrow k-\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}-\frac{21}{4}\cdot k=\frac{9}{2}-\frac{21}{4}\cdot k+k-\frac{7}{6}\cdot k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}-\frac{21}{4}\cdot k=\frac{9}{2}-\frac{21}{4}\cdot k+k-\frac{7}{6}\cdot k^2 \Rightarrow -\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}=\frac{9}{2}-\frac{7}{6}\cdot k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{2}\cdot k^2+\frac{7}{6}=\frac{9}{2}-\frac{7}{6}\cdot k^2 \ /\cdot 6 \Rightarrow -27\cdot k^2+7=27-7\cdot k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -27\cdot k^2+7\cdot k^2=27-7 \Rightarrow -20\cdot k^2=20 \Rightarrow -20\cdot k^2=20 \ /:(-20) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2=-1 \Rightarrow k^2=-1 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow k_{1,2}=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow k_{1,2}=\pm i \ ,$$ nema realnih rješenja.



2.inačica

Jednadžba pravca točkom T(8, 1) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_1,\ y_1\right)=T(8,\ 1) \\ y-y_1=k\cdot\left(x-x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow\ y-1=k\cdot(x-8)\ \Rightarrow\ y-1=k\cdot x-8\cdot k\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=k\cdot x-8\cdot k+1\ \Rightarrow\ y=k\cdot x+1-8\cdot k.$$

Njegov koeficijent smjera je k.

Simetrala kuta je pravac kojem je svaka točka jednako udaljena od oba kraka kuta. Budući da dva pravca koji se sijeku određuju dva suplementarna kuta (zbroj dva kuta je 180º), dobit ćemo jednadžbe dvaju međusobno okomitih pravaca.

$$\left.\begin{array}{l} 7\cdot x+6\cdot y-42=0 \\ 9\cdot x+2\cdot y-14=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{\left|7\cdot x+6\cdot y-42\right|}{\sqrt{7^2+6^2}}=\frac{\left|9\cdot x+2\cdot y-14\right|}{\sqrt{9^2+2^2}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\left|7\cdot x+6\cdot y-42\right|}{\sqrt{49+36}}=\frac{\left|9\cdot x+2\cdot y-14\right|}{\sqrt{81+4}}\ \Rightarrow\ \frac{\left|7\cdot x+6\cdot y-42\right|}{\sqrt{85}}=\frac{\left|9\cdot x+2\cdot y-14\right|}{\sqrt{85}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{\left|7\cdot x+6\cdot y-42\right|}{\sqrt{85}}=\frac{\left|9\cdot x+2\cdot y-14\right|}{\sqrt{85}}\ /\cdot\sqrt{85}\ \Rightarrow\ \left|7\cdot x+6\cdot y-42\right|=\left|9\cdot x+2\cdot y-14\right|.$$

Jednadžba prve simetrale glasi:

$$\left|7\cdot x+6\cdot y-42\right|=\left|9\cdot x+2\cdot y-14\right|\ \Rightarrow\ 7\cdot x+6\cdot y-42=9\cdot x+2\cdot y-14\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 6\cdot y-2\cdot y=9\cdot x-14-7\cdot x+42\ \Rightarrow\ 4\cdot y=2\cdot x+28\ \Rightarrow\ 4\cdot y=2\cdot x+28\ /:4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=\frac{2}{4}\cdot x+7\ \Rightarrow\ y=\frac{2}{4}\cdot x+7\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}\cdot x+7.$$

Koeficijent smjera je $k=\frac{1}{2}.$

Traženi pravac je okomit na tu simetralu pa njegov koeficijent smjera iznosi $k=-2,$ a pripadna jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} y = k \cdot x + 1 - 8 \cdot k \\ k = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2 \cdot x + 1 - 8 \cdot (-2) \Rightarrow y = -2 \cdot x + 1 + 16 \Rightarrow y = -2 \cdot x + 17.$$

Jednadžba druge simetrale glasi:

$$|7 \cdot x + 6 \cdot y - 42| = |9 \cdot x + 2 \cdot y - 14| \Rightarrow 7 \cdot x + 6 \cdot y - 42 = -(9 \cdot x + 2 \cdot y - 14) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot x + 6 \cdot y - 42 = -9 \cdot x - 2 \cdot y + 14 \Rightarrow 6 \cdot y + 2 \cdot y = -9 \cdot x + 14 - 7 \cdot x + 42 \Rightarrow$$

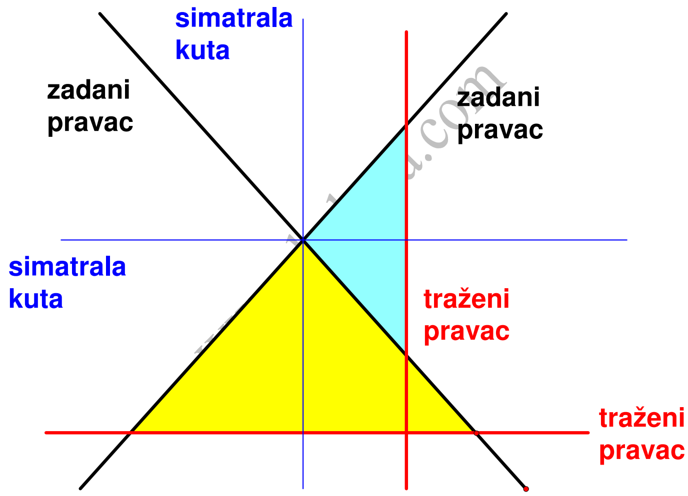
$$\Rightarrow 8 \cdot y = -16 \cdot x + 56 \Rightarrow 8 \cdot y = -16 \cdot x + 56 \; /:8 \Rightarrow y = -2 \cdot x + 7.$$

Koeficijent smjera je $k = -2$.

Traženi pravac je okomit na tu simetralu pa njegov koeficijent smjera iznosi $k = \frac{1}{2}$, a pripadna jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} y = k \cdot x + 1 - 8 \cdot k \\ k = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x + 1 - 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x + 1 - 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x + 1 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x - 3.$$



Vježba 147

Odredite jednadžbu pravca koji sadrži točku T(8, 1), a sa pravcima 7 · x + 6 · y = 42 i 9 · x + 2 · y = 14 zatvara jednakokračan trokut.

Rezultat: $y = -2 \cdot x + 17$, $y = \frac{1}{2} \cdot x - 3.$

Zadatak 148 (Đurđica, ekonomska škola)

Danu eksplicitnu jednadžbu pravca napišite u implicitnom i segmentnom obliku, ako je $y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{5}.$

Rješenje 148

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Implicitni oblik jednadžbe pravca

$$y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{5} \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{5} \ / \cdot 15 \Rightarrow 15 \cdot y = -20 \cdot x - 3 \Rightarrow 20 \cdot x + 15 \cdot y + 3 = 0.$$

Segmentni oblik jednadžbe pravca

$$y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{5} \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{1}{5} \ / \cdot 15 \Rightarrow 15 \cdot y = -20 \cdot x - 3 \Rightarrow 20 \cdot x + 15 \cdot y = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20 \cdot x + 15 \cdot y = -3 \ / : (-3) \Rightarrow \frac{20 \cdot x}{-3} + \frac{15 \cdot y}{-3} = 1 \Rightarrow \frac{20 \cdot x}{-3} + \frac{15 \cdot y}{-3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{20 \cdot x}{-3} + \frac{5 \cdot y}{-1} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{3}{20}} + \frac{y}{-\frac{1}{5}} = 1.$$

Vježba 148

Danu eksplicitnu jednadžbu pravca napišite u implicitnom i segmentnom obliku, ako je $y = -\frac{3}{2} \cdot x - \frac{1}{3}$.

Rezultat: $9 \cdot x + 6 \cdot y + 2 = 0 \ , \ \frac{x}{-\frac{2}{9}} + \frac{y}{-\frac{1}{3}} = 1.$

Zadatak 149 (Đurđica, ekonomska škola)

Danu implicitnu jednadžbu pravca napišite u eksplicitnom i segmentnom obliku, ako je $2 \cdot x - 3 \cdot y - 6 = 0.$

Rješenje 149

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i

jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca

$$2 \cdot x - 3 \cdot y - 6 = 0 \;\Rightarrow\; -3 \cdot y = -2 \cdot x + 6 \;\Rightarrow\; -3 \cdot y = -2 \cdot x + 6 \; /: (-3) \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{3} \cdot x - 2.$$

Segmentni oblik jednadžbe pravca

$$2 \cdot x - 3 \cdot y - 6 = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot x - 3 \cdot y = 6 \;\Rightarrow\; 2 \cdot x - 3 \cdot y = 6 \; /: 6 \;\Rightarrow\; \frac{2 \cdot x}{6} - \frac{3 \cdot y}{6} = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{2 \cdot x}{6} - \frac{3 \cdot y}{6} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1.$$

Vježba 149

Danu implicitnu jednadžbu pravca napišite u eksplicitnom i segmentnom obliku, ako je $3 \cdot x - 2 \cdot y + 6 = 0.$

Rezultat: $y = \frac{3}{2} \cdot x + 3 \quad , \quad \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1.$

Zadatak 150 (Đurđica, ekonomska škola)

Danu segmentnu jednadžbu pravca napišite u eksplicitnom i implicitnom obliku, ako je $\frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1.$

Rješenje 150

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Ako su (m, 0) i (0, n) koordinate presjeka pravca s koordinatnim osima, onda pravac ima jednadžbu

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Nju nazivamo segmentni oblik jednadžbe pravca.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1 \; / \cdot (-10) \;\Rightarrow\; -5 \cdot x + 2 \cdot y = -10 \;\Rightarrow\; 2 \cdot y = 5 \cdot x - 10 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2 \cdot y = 5 \cdot x - 10 \; /: 2 \;\Rightarrow\; y = \frac{5}{2} \cdot x - 5.$$

Implicitni oblik jednadžbe pravca

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-5}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{-5}=1 \;/\cdot 10 \Rightarrow 5\cdot x-2\cdot y=10 \Rightarrow 5\cdot x-2\cdot y-10=0.$$

Vježba 150

Danu segmentnu jednadžbu pravca napišite u eksplicitnom i implicitnom obliku, ako je $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1.$

Rezultat: $y=\frac{2}{3}\cdot x-2 \;,\; 2\cdot x-3\cdot y-6=0.$

Zadatak 151 (Marija, ekonomska škola)

Pravci s nagibima k_1 i k_2, $0 < k_1 < k_2$, zatvaraju kut od 45°. Tada vrijedi jednakost:

$$A.\ (1-k_1)\cdot(1-k_2)=2 \quad , \quad B.\ (1+k_1)\cdot(1-k_2)=1$$
$$C.\ (1-k_1)\cdot(1+k_2)=2 \quad , \quad D.\ (1-k_1)\cdot(1-k_2)=-2$$

Rješenje 151

Ponovimo!

$$tg\,45^\circ=1 \quad , \quad tg\frac{\pi}{4}=1 \quad , \quad \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b \quad , \quad a=b \;,\; c\in R \Rightarrow a+c=b+c.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kut između pravaca

$$y=k_1\cdot x+l_1 \quad , \quad y=k_2\cdot x+l_2$$

računa se iz formule

$$tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|.$$

Budući da je $0 < k_1 < k_2$, slijedi:

$$tg\,45^\circ=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \Rightarrow 1=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \Rightarrow k_2-k_1=1+k_1\cdot k_2 \Rightarrow k_2-k_1=1+k_1\cdot k_2 \;/+1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+k_2-k_1=1+1+k_1\cdot k_2 \Rightarrow 1+k_2-k_1=2+k_1\cdot k_2 \Rightarrow 1+k_2-k_1-k_1\cdot k_2=2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1-k_1+k_2-k_1\cdot k_2=2 \Rightarrow (1-k_1)+k_2\cdot(1-k_1)=2 \Rightarrow (1-k_1)\cdot(1+k_2)=2.$$

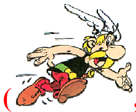
Odgovor je pod C.

Vježba 151

Pravci s nagibima k_1 i k_2, $0 < k_1 < k_2$, zatvaraju kut od $\frac{\pi}{4}$. Tada vrijedi jednakost:

$$A.\ (1-k_1)\cdot(1-k_2)=2 \quad , \quad B.\ (1+k_1)\cdot(1-k_2)=1$$
$$C.\ (1-k_1)\cdot(1+k_2)=2 \quad , \quad D.\ (1-k_1)\cdot(1-k_2)=-2$$

Rezultat: C.

Zadatak 152 ( **, gimnazija)**

Odredite sve vrijednosti realnog broja p za koje se pravci zadani jednadžbama $2 \cdot x - 4 \cdot y - 5 = 0$ i $p \cdot x - 7 \cdot y + p = 0$ ne sijeku.

Rješenje 152

Ponovimo!

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Jednadžbe pravaca napišemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili koeficijente smjerova. Budući da se pravci ne sijeku, oni su usporedni. To znači da imaju jednake koeficijente smjerova.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot x - 4 \cdot y - 5 = 0 \\ p \cdot x - 7 \cdot y + p = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 \cdot y = -2 \cdot x + 5 \\ -7 \cdot y = -p \cdot x - p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 \cdot y = -2 \cdot x + 5 \ / \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ -7 \cdot y = -p \cdot x - p \ / \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{4} \cdot x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{p}{7} \cdot x + \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{4} \cdot x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{p}{7} \cdot x + \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{5}{4} \\ y = \frac{p}{7} \cdot x + \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \frac{1}{2} \\ k_2 = \frac{p}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet paralelnosti} \\ k_1 = k_2 \end{array}\right] \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{p}{7} \Rightarrow \frac{p}{7} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{7} = \frac{1}{2} \ / \cdot 7 \Rightarrow p = \frac{7}{2}.$$

Vježba 152

Odredite sve vrijednosti realnog broja p za koje se pravci zadani jednadžbama $2 \cdot x - 4 \cdot y - 3 = 0$ i $p \cdot x - 7 \cdot y + p = 0$ ne sijeku.

Rezultat: $p = \frac{7}{2}.$

Zadatak 153 (Iva, gimnazija)

Zadan je pravac 5 + y – 2 · x = 0. Nađite sjecišta pravca s koordinatnim osima.

Rješenje 153

Ponovimo!

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Ako pravac ne prolazi ishodištem tada točka presjeka pravca s x – osi ima koordinate $S_1(x, 0)$, a točka presjeka pravca s y – osi ima koordinate $S_2(0, y)$.

Kada pravac siječe y – os vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ 5 + y - 2 \cdot x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5 + y - 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 5 + y - 0 = 0 \Rightarrow 5 + y = 0 \Rightarrow y = -5.$$

Sjecište pravca i y – osi glasi:

$$S_1(0, -5).$$

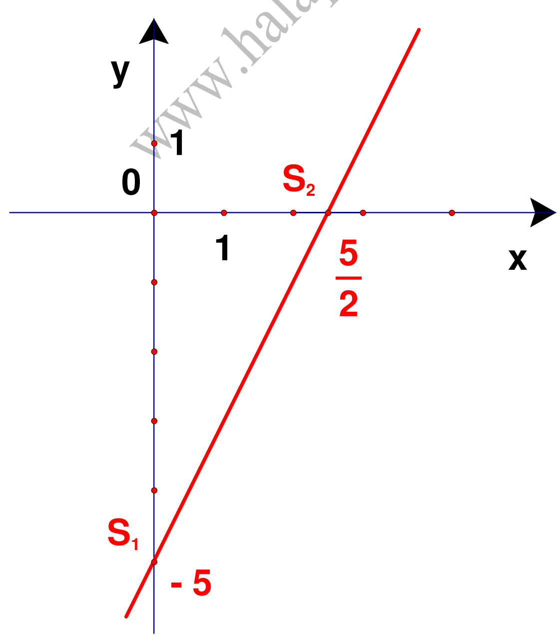
Kada pravac siječe x – os vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ 5 + y - 2 \cdot x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5 + 0 - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow 5 - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow -2 \cdot x = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot x = -5 \; /: (-2) \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Sjecište pravca i x – osi glasi:

$$S_2\left(\frac{5}{2}, 0\right).$$



Vježba 153

Zadan je pravac 5 + y – x = 0. Nađite sjecišta pravca s koordinatnim osima.

Rezultat: $S_1(5, 0)$, $S_2(0, -5)$.