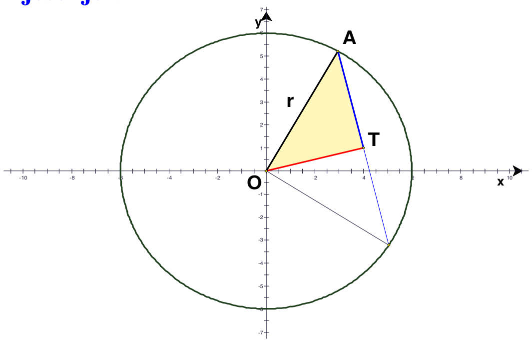
Zadatak 021 (Ines, hotelijerska škola)

Točka T(4, 1) raspolavlja tetivu kružnice $x^2 + y^2 = 36$. Kolika je duljina tetive?

Rješenje 021



Odredimo $|OT|$:

$$\left.\begin{matrix} O(0,0) \\ T(4,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow |OT| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(4-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}.$$

Polumjer kružnice iznosi: r = $|OA|$ = 6.

Budući da je trokut OTA pravokutan, pomoću Pitagorina poučka izračunamo $|AT|$:

$$|AT|^2 = |OA|^2 - |OT|^2 \Rightarrow |AT|^2 = 6^2 - \left(\sqrt{17}\right)^2 = 36 - 17 = 19 \Rightarrow |AT| = \sqrt{19}.$$

Duljina tetive je: $t = 2 \cdot |AT| = 2 \cdot \sqrt{19}.$

Vježba 021

Točka T(4, 1) raspolavlja tetivu kružnice $x^2 + y^2 = 49$. Kolika je duljina tetive?

Rezultat: $t = 8 \cdot \sqrt{2}.$

Zadatak 022 (Tarcus, gimnazija)

Žarišta elipse podudaraju se sa žarištima hiperbole $x^2 - y^2 = 8$, a velika poluos elipse iznosi 5. Kako glasi njezina jednadžba?

Rješenje 022

Nađemo linearni ekscentricitet hiperbole:

$$\left.\begin{matrix} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ e^2 = a^2 + b^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - y^2 = 8 \;/:8 \\ e^2 = a^2 + b^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1 \\ e^2 = a^2 + b^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow e^2 = 8 + 8 \Rightarrow e^2 = 16 \Rightarrow e = 4.$$

Budući da se žarišta elipse podudaraju sa žarištima hiperbole, linearni je ekscentricitet elipse jednak 4. Velika poluos elipse iznosi a = 5. Mala poluos elipse je:

$$\left.\begin{matrix} e = 4 \;,\; a = 5 \\ e^2 = a^2 - b^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4^2 = 5^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 16 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{matrix} a = 5 \;,\; b = 3 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \;/\cdot 225 \Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225.$$

Vježba 022

Žarišta elipse podudaraju se sa žarištima hiperbole $x^2 - y^2 = 8$, a velika poluos elipse iznosi 5. Kolika je njezina površina?

Rezultat: $P = ab\pi = 15\pi$.

Zadatak 023 (3A, hotelijerska škola)

Normala na elipsu $3x^2 + 4y^2 = 48$ u točki T(2, 3) zatvara s koordinatnim osima trokut površine

$$A.\ \frac{1}{2} \qquad B.\ \frac{1}{3} \qquad C.\ \frac{1}{4} \qquad D.\ \frac{1}{5} \qquad E.\ \frac{1}{6}$$

Rješenje 023

Jednadžba tangente na elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ u točki $T(x_0, y_0)$ te elipse glasi:

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1.$$

Slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 + 4y^2 = 48 \\ T(x_0, y_0) = T(2, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x^2 + 4y^2 = 48 \;/:48 \\ T(x_0, y_0) = T(2, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3x^2}{48} + \frac{4y^2}{48} = 1 \\ T(x_0, y_0) = T(2, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ T(x_0, y_0) = T(2, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot x}{16} + \frac{3 \cdot y}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1 \;/\cdot 8 \Rightarrow x + 2y = 8 \Rightarrow 2y = -x + 8 \;/:2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x + 4.$$

Budući da je normala okomita na tangentu ima koeficijent smjera k = 2. Također prolazi točkom T(2, 3) pa njezina jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} k = 2 \;,\; T(2, 3) \\ y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 3 = 2 \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{segmentni} \\ \text{oblik} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - y = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = \frac{1}{2} \\ n = -1 \end{array}\right. \Rightarrow P = \frac{|m \cdot n|}{2} = \frac{\left|\frac{1}{2} \cdot (-1)\right|}{2} = \frac{1}{4}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 023

Kolika je površina trokuta koji tangenta na elipsu $3x^2 + 4y^2 = 48$ u točki T(2, 3) zatvara s koordinatnim osima?

Rezultat: 16.

Zadatak 024 (Mira, gimnazija)

Odredi duljinu tetive kružnice $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ ako joj je točka P(0, 3) polovište.

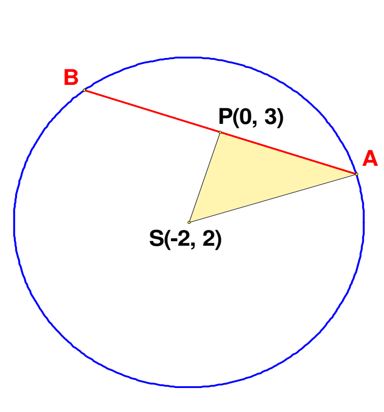
Rješenje 024

Kružnica je zadana općom jednadžbom:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2px - 2qy + c = 0 \;,\; c = p^2 + q^2 - r^2. \end{array}\right.$$

Najprije moramo odrediti p, q, r i napisati njezinu središnju jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} -2p = 4 \\ -2q = -4 \\ c = -17 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p = -2 \\ q = 2 \\ r^2 = p^2 + q^2 - c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p = -2 \\ q = 2 \\ r^2 = (-2)^2 + 2^2 + 17 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p = -2 \\ q = 2 \\ r^2 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$



Središte kružnice je S(– 2, 2), a polumjer r = 5. Sa slike vidi se:

$$|SP| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5},$$

$$|SA| = r = 5.$$

Budući da je trokut SAP pravokutan, pomoću Pitagorina poučka izračuna se $|AP|$:

$$|AP|^2 = |SA|^2 - |SP|^2 \Rightarrow |AP|^2 = 5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 25 - 5 = 20 \Rightarrow$$

$$|AP| = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}.$$

Duljina tetive $\overline{AB}$ je: $|AB| = 2 \cdot |AP| = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 4 \cdot \sqrt{5}.$

Vježba 024

Odredi duljinu tetive kružnice $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ ako joj je točka $P(0, 2)$ polovište.

Rezultat: $2 \cdot \sqrt{21}.$

Zadatak 025 (Anamarija, hotelijerska škola)

Izračunajte opseg kruga zadanog jednadžbom $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0.$

Rješenje 025

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l}(x-p)^2+(y-q)^2=r^2\\ x^2+y^2-16x-16y+64=0\end{array}\right\} \Rightarrow x^2-16x+y^2-16y+64=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2-16x+8^2\right)-8^2+\left(y^2-16y+8^2\right)-8^2+64=0 \Rightarrow (x-8)^2+(y-8)^2-64-64+64=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-8)^2+(y-8)^2=64 \Rightarrow r^2=64 \Rightarrow r=8 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{opseg kruga}\\ O=2\cdot r\cdot \pi\\ r=8\end{array}\right\} \Rightarrow O=2\cdot 8\cdot \pi=16\pi.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-2\cdot p\cdot x-2\cdot q\cdot y+c=0\\ x^2+y^2-16x-16y+64=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}-2\cdot p=-16\\ -2\cdot q=-16\\ c=64\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}p=8\\ q=8\\ c=64\end{array}\right\} \Rightarrow r^2=p^2+q^2-c=64+64-64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2=64 \Rightarrow r=8 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{opseg kruga}\\ O=2\cdot r\cdot \pi\\ r=8\end{array}\right\} \Rightarrow O=2\cdot 8\cdot \pi=16\pi.$$

Vježba 025

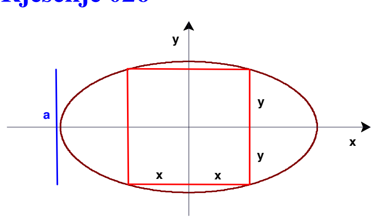
Izračunajte površinu kruga zadanog jednadžbom $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0.$

Rezultat: $64\pi.$

Zadatak 026 (Anamarija, hotelijerska škola)

Elipsi $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ upisan je kvadrat kojem su koordinatne osi ujedno i osi simetrije. Nađite stranicu kvadrata.

Rješenje 026



Budući da je riječ o kvadratu upisanom u elipsu, vrijedi:

$$2x=2y \Rightarrow x=y \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1 \;/\cdot 144 \Rightarrow 9x^2+16x^2=144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2=144 \;/:25 \Rightarrow x^2=\frac{144}{25} \;/\sqrt{\ } \Rightarrow x=\frac{12}{5}.$$

Stranica kvadrata iznosi:

$$a=2\cdot x=2\cdot\frac{12}{5}=\frac{24}{5}=4.8.$$

Vježba 026

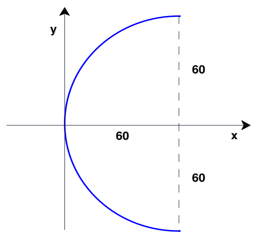
Elipsi $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ upisan je kvadrat kojem su koordinatne osi ujedno i osi simetrije. Nađite opseg kvadrata.

Rezultat: 19.2.

Zadatak 027 (Anamarija, hotelijerska škola)

Osni presjek reflektora ima oblik parabole, promjer zrcala je 120, a dubina 60. Na kojoj udaljenosti od tjemena presjeka treba staviti izvor svjetlosti da reflektirane zrake budu usporedne.

Rješenje 027



Ponovimo! Pri konstrukciji slike koju stvara sferno zrcalo zraka koja prolazi kroz žarište (fokus) reflektira se usporedno s osi. Dakle, da bi zrake bile usporedne treba izvor svjetlosti staviti u žarište parabole.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2 \cdot p \cdot x \\ F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 60^2 = 2 \cdot p \cdot 60 \ /:60 \Rightarrow 2 \cdot p = 60 \ /:4 \Rightarrow \frac{p}{2} = 15.$$

Tražena udaljenost iznosi 15.

Vježba 027

Osni presjek reflektora ima oblik parabole, promjer zrcala je 160, a dubina 80. Na kojoj udaljenosti od tjemena presjeka treba staviti izvor svjetlosti da reflektirane zrake budu usporedne.

Rezultat: 20.

Zadatak 028 (Ines, gimnazija, Marko, tehnička škola)

Koju jednadžbu ima parabola simetrična paraboli $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3$ s obzirom na pravac x = – 1?

Rješenje 028

Uporabit ćemo postupak nadopunjavanja do potpunog kvadrata kako bismo kvadratnu funkciju $y = ax^2 + bx + c$ napisali u obliku $y = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$:

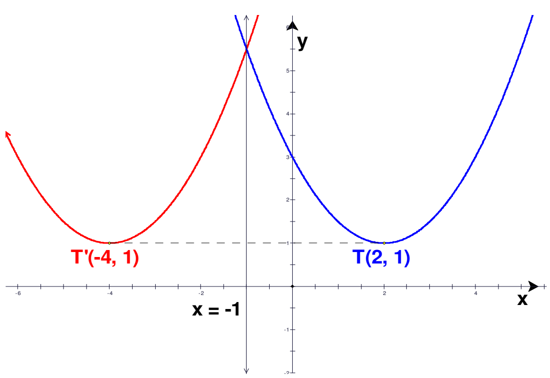
$$y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3 = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 6\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 4 + 2\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{x^2 - 4 \cdot x + 4}_{\text{kvadrat razlike}} + 2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left((x-2)^2 + 2\right) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 + 1.$$

Tjeme parabole je T(2, 1). Budući da je pravac x = – 1 os simetrije, tjeme tražene parabole ima koordinate:

$$\left.\begin{array}{l} T(2, 1) \\ T'(x, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 - x = 2 - (-1) \Rightarrow -1 - x = 2 + 1 \Rightarrow -1 - x = 3 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow T'(-4, 1).$$

To se vidi i iz skice:



Jednadžba tražene parabole iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} y = a \cdot \left(x - x_0\right)^2 + y_0 \\ T'\left(x_0, y_0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \cdot \left(x - x_0\right)^2 + y_0 \\ T'(-4, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot (x+4)^2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + 8 \cdot x + 16\right) + 1 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^2 + 4 \cdot x + 8 + 1 = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 4 \cdot x + 9.$$

Vježba 028

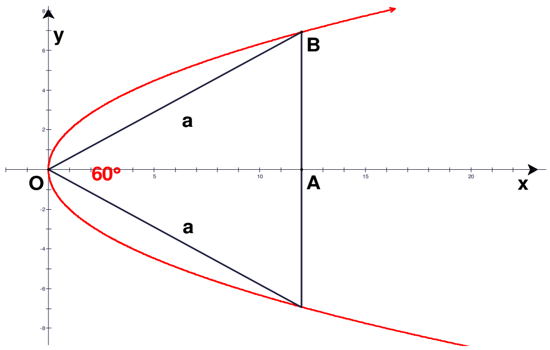
Koju jednadžbu ima parabola simetrična paraboli $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3$ s obzirom na pravac x = – 2?

Rezultat: $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 6 \cdot x + 19.$

Zadatak 029 (Ines, hotelijerska škola)

U parabolu $y^2 = 4x$ upisan je jednakostraničan trokut čiji je jedan vrh u ishodištu. Kolika je duljina stranice tog trokuta?

Rješenje 029



Sa slike vidi se:

$$y = |AB| = \frac{a}{2} \qquad (1)$$

$$x = |OA| = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ (visina jednakostraničnog trokuta)} \qquad (2)$$

Duljinu stranice izračunamo uvrštavanjem dobijenih vrijednosti (1) i (2) u jednadžbu parabole:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}, \ y = \frac{a}{2} \\ y^2 = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} = 4 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 2 \cdot a \cdot \sqrt{3} \ / \cdot 4 \Rightarrow a^2 = 8 \cdot a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow a^2 - 8 \cdot a \cdot \sqrt{3} = 0 \Rightarrow a \cdot \left(a - 8 \cdot \sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ (nema smisla) i } a - 8 \cdot \sqrt{3} = 0 \Rightarrow a = 8 \cdot \sqrt{3}.$$

Vježba 029

U parabolu $y^2 = 2x$ upisan je jednakostraničan trokut čiji je jedan vrh u ishodištu. Kolika je duljina stranice tog trokuta?

Rezultat: $a = 4 \cdot \sqrt{3}.$

Zadatak 030 (Anamarija, hotelijerska škola)

Luk mosta ima oblik parabole $x^2 = -120 \cdot y$, a visina luka je 7.5 m. Nađi duljinu mosta.

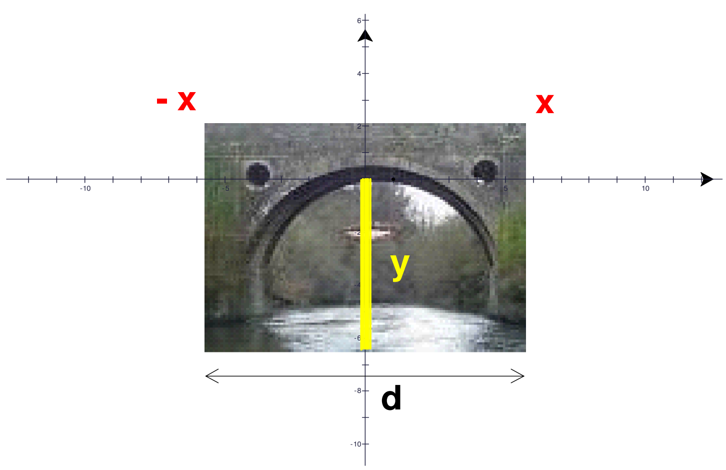
Rješenje 030

Iz visine luka mosta slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = |-120 \cdot y| \\ y = 7.5 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = |-120 \cdot 7.5| \Rightarrow x^2 = |-900| \Rightarrow x^2 = 900 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -30 \\ x_2 = 30. \end{array}\right.$$

Duljina mosta iznosi:

$$d = |x_1| + x_2 = 30 + 30 = 60 \ m.$$



Vježba 030

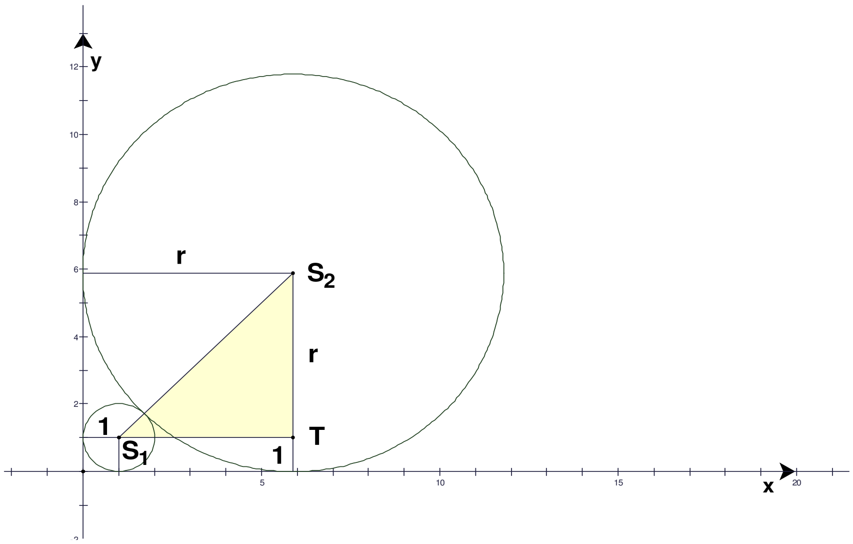
Luk mosta ima oblik parabole $x^2 = -128 \cdot y$, a visina luka je 8 m. Nađi duljinu mosta.

Rezultat: 64 m.

Zadatak 031 (Ines, hotelijerska škola)

Kružnica polumjera 1 u prvom kvadrantu dira obje koordinatne osi. Nađite polumjer veće kružnice koja dira zadanu kružnicu i obje koordinatne osi.

Rješenje 031



Središte kružnice polumjera 1 u prvom kvadrantu koja dira obje koordinatne osi je: $S_1(1, 1)$.
Središte kružnice koja dira zadanu kružnicu i obje koordinatne osi je: $S_2(r, r)$.
Udaljenost njihovih središta iznosi: $|S_1S_2| = r + 1$. Uočimo pravokutan trokut S_1TS_2 i uporabom Pitagorina poučka izračunamo polumjer r:

$$\left.\begin{array}{l} |S_1T| = |TS_2| = r - 1 \\ |S_1S_2| = r + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |S_1T|^2 + |TS_2|^2 = |S_1S_2|^2 \Rightarrow (r-1)^2 + (r-1)^2 = (r+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 - 2r + 1 + r^2 - 2r + 1 = r^2 + 2r + 1 \Rightarrow r^2 - 6r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{6 \pm 4 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} r_1 = 3 + 2 \cdot \sqrt{2} & \text{polumjer tražene kružnice} \\ r_2 = 3 - 2 \cdot \sqrt{2} & \text{polumjer manje kružnice koja dira} \\ & \text{zadanu kružnicu i obje koordinatne osi} \end{array}\right.$$

Vježba 031

Kružnica polumjera 1 u prvom kvadrantu dira obje koordinatne osi. Nađite polumjer manje kružnice koja dira zadanu kružnicu i obje koordinatne osi.

Rezultat: $r = 3 - 2 \cdot \sqrt{2}.$

Zadatak 032 (Ines, hotelijerska škola)

Nađi kut među tangentama kružnice $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ u točkama s ordinatom 0.

Rješenje 032

Odredimo točke na kružnici kojima je ordinata nula:

$$\left.\begin{array}{l} T(x, 0) \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+1)^2 + (0-1)^2 = 2 \Rightarrow (x+1)^2 + 1 = 2 \Rightarrow (x+1)^2 = 1 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow x + 1 = \pm 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 1. \end{array}\right.$$

Napišimo jednadžbe tangenata na kružnicu:

$$\left.\begin{array}{l} T(x_1, y_1) \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1 - p) \cdot (x - p) + (y_1 - q) \cdot (y - q) = r^2,$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1(0,0) \\ (x+1)^2+(y-1)^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow (0+1)\cdot(x+1)+(0-1)\cdot(y-1)=2 \Rightarrow x+1-y+1=2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x \\ \text{koeficijent smjera} \\ k_1=1, \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} T_2(-2,0) \\ (x+1)^2+(y-1)^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow (-2+1)\cdot(x+1)+(0-1)\cdot(y-1)=2 \Rightarrow -x-1-y+1=2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-x-2 \\ \text{koeficijent smjera} \\ k_2=-1. \end{array}\right.$$

Budući da za koeficijente smjerova vrijedi $k_1 \cdot k_2 = -1$ tangente su međusobno okomite: $\varphi = 90°$.
Ili ovako:

$$tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|=\left|\frac{-1-1}{1+1\cdot(-1)}\right|=\left|\frac{-2}{0}\right|=\infty \Rightarrow \varphi=90^0.$$

Vježba 032

Nađi kut među tangentama kružnice $x^2 + y^2 = 4$ u točkama s ordinatom 0.

Rezultat: $\varphi=0^0$ tangente su usporedne.

Zadatak 033 (Ivana, gimnazija)

Pravac $y = 2x - 14$ dodiruje elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ čiji je linearni ekscentricitet $e = 2$. Nađite poluos b.

Rješenje 033

$$\left.\begin{array}{l} y=2x-14 \\ b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k=2\ ,\ l=-14 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\}.$$

Iz uvjeta tangencionalnosti i linearnog ekscentriciteta dobiva se sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2\cdot k^2+b^2=l^2 \ -\ \text{tangencijalnost} \\ e^2=a^2-b^2 \ -\ \text{linearni ekscentricitet} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a^2+b^2=196 \\ a^2-b^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 5\cdot a^2=200 \ /:5 \Rightarrow a^2=40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40-b^2=4 \Rightarrow -b^2=4-40 \Rightarrow -b^2=-36 \ /\cdot(-1) \Rightarrow b^2=36 \Rightarrow b=6.$$

Vježba 033

Pravac $y = 2x - 14$ dodiruje elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ čiji je linearni ekscentricitet $e = 2$. Nađite poluos a.

Rezultat: $a=2\cdot\sqrt{10}.$

Zadatak 034 (Ivana, gimnazija)

Numerički ekscentricitet hiperbole iznosi $\varepsilon = 2$. Nađite kut između asimptota.

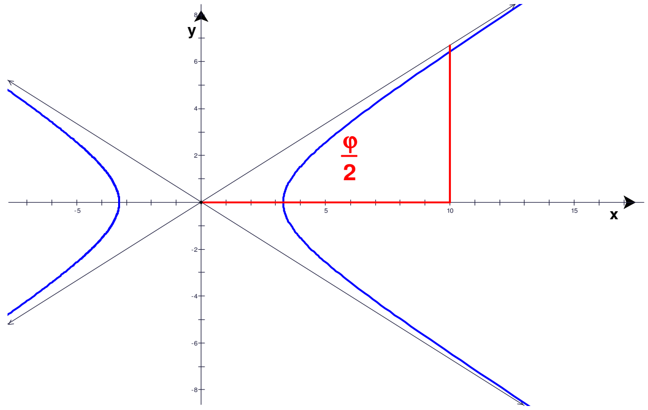
Rješenje 034

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon=\dfrac{e}{a} \\ e^2=a^2+b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2=\dfrac{e}{a} \\ b^2=e^2-a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e=2\cdot a \\ b^2=e^2-a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2=(2\cdot a)^2-a^2 \Rightarrow b^2=4\cdot a^2-a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2=3\cdot a^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow b=a\cdot\sqrt{3}.$$

Tražimo kut φ:

$$tg\frac{\varphi}{2}=\frac{y}{x}=\frac{b}{a} \Rightarrow tg\frac{\varphi}{2}=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{a} \Rightarrow tg\frac{\varphi}{2}=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\varphi}{2}=60^0 \Rightarrow \varphi=120^0.$$



Vježba 034

Numerički ekscentricitet hiperbole iznosi ε = 3. Nađite kut između asimptota.

Rezultat: $\frac{\varphi}{2}=70^{0}31' \Rightarrow \varphi=140^{0}62' \Rightarrow \varphi=141^{0}2'.$

Zadatak 035 (Ivana, gimnazija)

Za koji realan broj a pravac 2x + 3y + a = 0 prolazi žarištem (fokusom) parabole $y^2 = -4x$?

Rješenje 035

$$\left.\begin{array}{l} y^2=2\cdot p\cdot x \\ y^2=-4\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot p=-4 \Rightarrow p=-2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F\left(\frac{p}{2},0\right) \\ F(-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x+3\cdot y+a=0 \\ F(-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(-1)+3\cdot 0+a=0 \Rightarrow a=2.$$

Vježba 035

Za koji realan broj a pravac 2x + 3y + 2a = 0 prolazi žarištem (fokusom) parabole $y^2 = -4x$?

Rezultat: a = 1.

Zadatak 036 (Ivana, gimnazija)

Nađite površinu pravokutnog trokuta kojemu dva vrha leže u žarištima hiperbole $x^2 - y^2 = 9$, a vrh s pravim kutom na asimptoti te hiperbole.

Rješenje 036

Najprije odredimo:

- fokuse (žarišta) hiperbole

$$x^2-y^2=9 \;/:9 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=9 \\ b^2=9 \end{array}\right\} \Rightarrow e^2=a^2+b^2 \Rightarrow e^2=9+9 \Rightarrow e^2=9\cdot 2 \;/\sqrt{} \Rightarrow$$

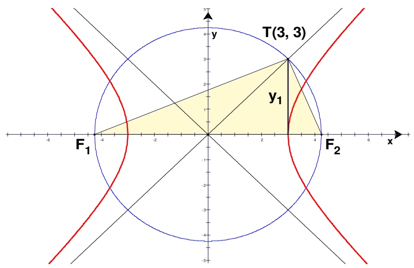
$$\Rightarrow e=3\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F_1\left(-3\cdot\sqrt{2},0\right) \\ F_2\left(3\cdot\sqrt{2},0\right) \end{array}\right\},$$

- jednadžbe asimptota hiperbole

$$x^2-y^2=9 \;/:9 \Rightarrow \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=9 \\ b^2=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\cdot x \Rightarrow y=\pm\frac{3}{3}\cdot x \Rightarrow y=\pm x.$$

Budući da dva vrha pravokutnog trokuta leže u žarištima hiperbole, a vrh s pravim kutom na asimptoti te hiperbole (prema Talesovom teoremu oni leže na kružnici polumjera e sa središtem u ishodištu), moramo naći presjek kružnice $x^2 + y^2 = 18$ i asimptote y = x:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=18 \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+x^2=18 \Rightarrow 2\cdot x^2=18 \;/:2 \Rightarrow x^2=9 \;/\sqrt{} \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow y=\pm 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=3 \\ y_2=-3 \end{array}\right\}.$$



Površina pravokutnog trokuta F_1F_2T iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} \left|F_1F_2\right| = 2 \cdot e = 6 \cdot \sqrt{2} \\ P = \dfrac{\left|F_1F_2\right| \cdot y_1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow P = \frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot 3}{2} = 9 \cdot \sqrt{2}.$$

Vježba 036

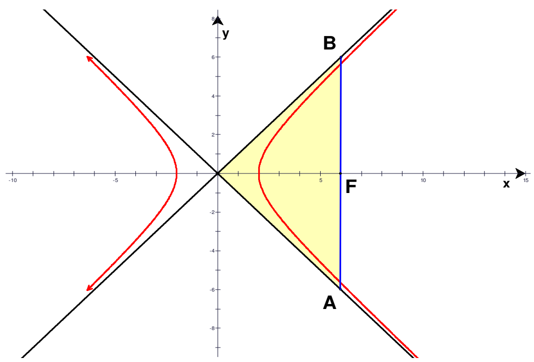
Nađite visinu na hipotenuzu pravokutnog trokuta kojemu dva vrha leže u žarištima hiperbole $x^2 - y^2 = 9$, a vrh s pravim kutom na asimptoti te hiperbole.

Rezultat: $t = 8 \cdot \sqrt{2}.$

Zadatak 037 (Andrijana, gimnazija)

Fokusom (žarištem) hiperbole $x^2 - y^2 = 4$ povučena je okomica na njezinu realnu os. Nađite polumjer kružnice opisane trokutu kojeg omeđuju asimptote hiperbole i ta okomica.

Rješenje 037



Tražimo linearni ekscentricitet hiperbole:

$$x^2 - y^2 = 4 \; /:4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow e^2 = 4 + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^2 = 8 \; /\sqrt{} \Rightarrow e = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Koordinate fokusa F su:

$$F(e, 0) = F\left(2 \cdot \sqrt{2}, 0\right).$$

Asimptote hiperbole su pravci:

$$\left.\begin{array}{l} y = \pm \dfrac{b}{a} \cdot x \\ a = b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array}\right\}.$$

Tražimo presjek asimptota i okomice na y os koja je povučena fokusom F:

$$\left.\begin{array}{l} x = e = 2 \cdot \sqrt{2} \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow A\left(2 \cdot \sqrt{2}, -2 \cdot \sqrt{2}\right),$$

$$\left.\begin{array}{l} x = e = 2 \cdot \sqrt{2} \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow B\left(2 \cdot \sqrt{2}, 2 \cdot \sqrt{2}\right).$$

Odredimo duljine stranica jednakostraničnog trokuta OAB:

$$\left.\begin{array}{l} O(0, 0) \\ A\left(2 \cdot \sqrt{2}, -2 \cdot \sqrt{2}\right) \\ B\left(2 \cdot \sqrt{2}, 2 \cdot \sqrt{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow |OA| = |OB| = \sqrt{\left(2 \cdot \sqrt{2} - 0\right)^2 + \left(2 \cdot \sqrt{2} - 0\right)^2} = \sqrt{8 + 8} = \sqrt{16} = 4,$$

$$|AB| = \sqrt{\left(2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + \left(2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(4 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = 4 \cdot \sqrt{2}.$$

Površina trokuta OAB iznosi:

$$P_{OAB} = \frac{|AB| \cdot |OF|}{2} = \frac{|AB| \cdot e}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{2} = 8.$$

Tada je polumjer kružnice opisane trokutu OAB jednak:

$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot P}=\frac{|OA|\cdot|AB|\cdot|OB|}{4\cdot P_{OAB}}=\frac{4\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot 4}{4\cdot 8}=2\cdot\sqrt{2}.$$

Vježba 037

Fokusom (žarištem) hiperbole $x^2 - y^2 = 4$ povučena je okomica na njezinu realnu os. Nađite opseg trokuta kojeg omeđuju asimptote hiperbole i ta okomica.

Rezultat: $8+4\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 038 (Ines, hotelijerska škola)

Ako su pravci x = y i y = x + 4 tangente iste kružnice nađi njezin polumjer.

Rješenje 038

1.inačica

Budući da pravci imaju iste koeficijente smjerova oni su usporedni (paralelni):

$$y = x \quad , \quad y = x + 4.$$

Promjer kružnice jednak je udaljenosti između pravaca. Udaljenost između dva pravca računamo na sljedeći način:

- na pravcu y = x odaberemo jednu točku, na primjer T(0, 0) i nađemo njezinu udaljenost od drugog pravca y = x + 4.

$$\left.\begin{array}{l} T(0,0) \\ y=x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T(0,0) \\ x-y+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|1\cdot 0-1\cdot 0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|4|}{\sqrt{2}}=$$

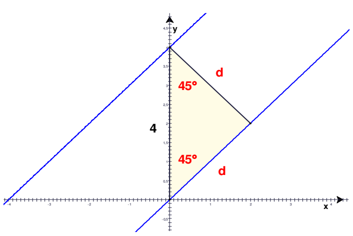
$$=\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{2}=2\cdot\sqrt{2}.$$

Polumjer kružnice iznosi:

$$d=2\cdot r \Rightarrow r=\frac{1}{2}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

2.inačica

Sa slike vidi se:



Trokut je pravokutan i jednakokračan pa vrijedi:

$$d^2+d^2=4^2 \Rightarrow 2\cdot d^2=16 \;/:2 \Rightarrow d^2=8 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{8} \Rightarrow d=2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow [d=2\cdot r] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot r=2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow r=\sqrt{2}.$$

Vježba 038

Ako su pravci x = y i y = x + 2 tangente iste kružnice nađi njezin promjer.

Rezultat: $d=\sqrt{2}.$

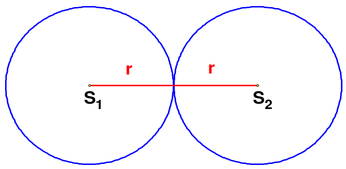
Zadatak 039 (Ines, hotelijerska škola)

Ako se kružnice $(x-2)^2 + (y+3)^2 = r^2$ i $(x+1)^2 + (y-1)^2 = r^2$ međusobno dodiruju izvana nađi polumjer svake od njih.

Rješenje 039

$$\left.\begin{array}{l} (x-2)^2+(y+3)^2=r^2 \\ (x+1)^2+(y-1)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{odredimo središta} \\ \text{kružnica} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S_1(2,-3) \\ S_2(-1,1) \end{array}\right\}.$$

Budući da kružnice imaju jednake polumjere i dodiruju se izvana, vrijedi:



$$\left.\begin{array}{l} S_1(x_1, y_1) = S_1(2, -3) \quad , \quad S_2(x_2, y_2) = S_2(-1, 1) \\ 2 \cdot r = \left| S_1 S_2 \right| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot r = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2} \Rightarrow 2 \cdot r = \sqrt{9+16} \Rightarrow 2 \cdot r = 5 \;/:2 \Rightarrow r = 2.5.$$

Vježba 039

Ako se kružnice $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = r^2$ i $(x - 8)^2 + (y - 7)^2 = r^2$ međusobno dodiruju izvana nađi polumjer svake od njih.

Rezultat: 2.5.

Zadatak 040 (Ines, hotelijerska škola)

Kako glasi jednadžba hiperbole kojoj su pravci $5x - 6y = 16$ i $13x - 10y = 48$ tangente?

Rješenje 040

Jednadžbe pravaca napisat ćemo u eksplicitnom obliku kako bismo odredili njihove koeficijente smjerova i odsječke na y – osi:

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 6y = 16 \\ 13x - 10y = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -6y = -5x + 16 \;/:(-6) \\ -10y = -13x + 48 \;/:(-10) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{5}{6} \cdot x - \frac{16}{6} \\ y = \frac{13}{10} \cdot x - \frac{48}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{5}{6} \cdot x - \frac{8}{3} \\ y = \frac{13}{10} \cdot x - \frac{24}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = \frac{5}{6} \;,\; l_1 = -\frac{8}{3} \\ k_2 = \frac{13}{10} \;,\; l_2 = -\frac{24}{5} \end{array}\right\}.$$

Postavimo uvjet da pravac $y = k \cdot x + l$ bude tangenta hiperbole: $a^2 \cdot k^2 - b^2 = l^2$.

Dobit ćemo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - b^2 = \left(-\frac{8}{3}\right)^2 \\ a^2 \cdot \left(\frac{13}{10}\right)^2 - b^2 = \left(-\frac{24}{5}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{25}{36} \cdot a^2 - b^2 = \frac{64}{9} \;/\cdot(-1) \\ \frac{169}{100} \cdot a^2 - b^2 = \frac{576}{25} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\frac{25}{36} \cdot a^2 + b^2 = -\frac{64}{9} \\ \frac{169}{100} \cdot a^2 - b^2 = \frac{576}{25} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{25}{36} \cdot a^2 + \frac{169}{100} \cdot a^2 = -\frac{64}{9} + \frac{576}{25} \Rightarrow a^2 \cdot \left(\frac{169}{100} - \frac{25}{36}\right) = \frac{576}{25} - \frac{64}{9} \Rightarrow a^2 = \frac{\frac{576}{25} - \frac{64}{9}}{\frac{169}{100} - \frac{25}{36}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{\frac{576 \cdot 9 - 64 \cdot 25}{25 \cdot 9}}{\frac{169 \cdot 36 - 25 \cdot 100}{100 \cdot 36}} = \frac{\frac{3584}{25 \cdot 9}}{\frac{3584}{100 \cdot 36}} = \frac{\frac{1}{25 \cdot 9}}{\frac{1}{100 \cdot 36}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{4 \cdot 4}} = 16.$$

Računamo b^2:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{25}{36} \cdot a^2 - b^2 = \frac{64}{9} \\ a^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -b^2 = \frac{64}{9} - \frac{25}{36} \cdot a^2 \;/\cdot(-1) \\ a^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2 = \frac{25}{36} \cdot a^2 - \frac{64}{9} \\ a^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 = \frac{25}{36} \cdot 16 - \frac{64}{9} =$$

$$= \frac{25}{9} \cdot 4 - \frac{64}{9} == \frac{100}{9} - \frac{64}{9} = \frac{36}{9} = 4.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ a^2=16\ ,\ b^2=4\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1\ /\cdot 16 \Rightarrow x^2-4\cdot y^2=16.$$

Vježba 040

Kako glasi jednadžba hiperbole kojoj su pravci x – y – 2 = 0 i 5x + 7y + 2 = 0 tangente?

Rezultat: $x^2-2\cdot y^2=8.$