Zadatak 121 (Nikolina, gimnazija)

Odredite poluosi, linearni i numerički ekscentricitet hiperbole zadane jednadžbom

$$144\cdot x^2-81\cdot y^2=11664.$$

Rješenje 121

Ponovimo!

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Linearni ekscentricitet hiperbole:

$$e^2=a^2+b^2 \Rightarrow e=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Numerički ekscentricitet hiperbole:

$$\varepsilon=\frac{e}{a}.$$

Da bismo odredili osi hiperbole napišemo njezinu jednadžbu u kanonskom obliku.

$$144\cdot x^2-81\cdot y^2=11664 \Rightarrow 144\cdot x^2-81\cdot y^2=11664 \ /:11664 \Rightarrow \frac{144\cdot x^2}{11664}-\frac{81\cdot y^2}{11664}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{11664}{144}}-\frac{y^2}{\frac{11664}{81}}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{144}=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2=81 \\ b^2=144 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2=81 \ /\sqrt{\ } \\ b^2=144 \ /\sqrt{\ } \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=\sqrt{81} \\ b=\sqrt{144} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=9 \\ b=12 \end{matrix}\right\}.$$

Linearni ekscentricitet hiperbole iznosi:

$$\left.\begin{matrix} a^2=81 \ , \ b^2=144 \\ e=\sqrt{a^2+b^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow e=\sqrt{81+144} \Rightarrow e=\sqrt{225} \Rightarrow e=15.$$

Numerički ekscentricitet hiperbole iznosi:

$$\left.\begin{matrix} e=15 \ , \ a=9 \\ \varepsilon=\frac{e}{a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varepsilon=\frac{15}{9} \Rightarrow \varepsilon=\frac{5}{3}.$$

Vježba 121

Odredite poluosi hiperbole: $4\cdot x^2-9\cdot y^2=36.$

Rezultat: a = 3, b = 2.

Zadatak 122 (Nikolina, gimnazija)

Odredite jednadžbe onih tangenata parabole koje su paralelne sa zadanim pravcem ako je:

$$\begin{cases} y^2=6\cdot x \\ 2\cdot x-3\cdot y+1=0. \end{cases}$$

Rješenje 122

Ponovimo!

Dva pravca zadana svojim jednadžbama u eksplicitnom obliku

$$\begin{cases} y = k_1 \cdot x + l_1 \\ y = k_2 \cdot x + l_2 \end{cases}$$

paralelna su onda i samo onda ako vrijedi

$$k_1 = k_2.$$

Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscisa, ima jednadžbu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x,$$

gdje je p poluparametar parabole, tj.udaljenost žarišta do ravnalice.
Uvjet dodira pravca i parabole
Pravac

$$y = k \cdot x + l$$

dira parabolu

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

onda i samo onda kad vrijedi

$$p = 2 \cdot k \cdot l.$$

Budući da je tangenta pravac, potražit ćemo pravac u eksplicitnom obliku

$$y = k \cdot x + l$$

i iskoristiti uvjet dodira pravca i parabole:

$$p = 2 \cdot k \cdot l.$$

Odredimo poluparametar p parabole.

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = 6 \cdot x \\ y^2 = 2 \cdot p \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot p = 6 \Rightarrow 2 \cdot p = 6 \;/ : 2 \Rightarrow p = 3.$$

Također izračunamo koeficijent smjera zadanog pravca.

$$2 \cdot x - 3 \cdot y + 1 = 0 \Rightarrow -3 \cdot y = -2 \cdot x - 1 \Rightarrow -3 \cdot y = -2 \cdot x - 1 \;/ : (-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{2}{3} \text{ koeficijent smjera}.$$

Budući da je tangenta parabole paralelna sa zadanim pravcem, ima isti koeficijent smjera.

$$k = \frac{2}{3}.$$

Iz uvjeta dodira lako se izračuna l, odsječak tangente na y osi.

$$\left. \begin{array}{l} p = 3 \;,\; k = \frac{2}{3} \\ p = 2 \cdot k \cdot l \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot l \Rightarrow 3 = \frac{4}{3} \cdot l \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot l = 3 \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot l = 3 \;/ \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow l = \frac{9}{4}.$$

Jednadžba tangente je

$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{2}{3} \;,\; l = \frac{9}{4} \\ y = k \cdot x + l \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{9}{4}.$$

Vježba 122

Odredite jednadžbe onih tangenata parabole koje su paralelne sa zadanim pravcem ako je:

$$\begin{cases} y^2 = 6 \cdot x \\ x - 1.5 \cdot y + 0.5 = 0. \end{cases}$$

Rezultat: $y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{9}{4}.$

Zadatak 123 (Nina, gimnazija)

Napiši jednadžbu hiperbole koja prolazi točkom A(10, 8) i ako je zadano a = b.

Rješenje 123

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b.$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Budući da hiperbola prolazi točkom A, njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu hiperbole.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(10,\ 8)\ ,\ a=b \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{10^2}{a^2}-\frac{8^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{100}{a^2}-\frac{64}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{100-64}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{a^2}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=36 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=b \\ a^2=36 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2=36.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=36\ ,\ b^2=36 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36}=1\ /\cdot 36 \Rightarrow x^2-y^2=36.$$

Vježba 123

Napiši jednadžbu hiperbole koja prolazi točkom A(10, 6) i ako je zadano a = b.

Rezultat: $x^2-y^2=64.$

Zadatak 124 (Helena, srednja škola)

Točka na paraboli $y^2 = 18\cdot x$ kojoj je ordinata pozitivna i tri puta veća od apscise je:

$$A.\ T(1,\ 3) \qquad B.\ T(3,\ 1) \qquad C.\ T(2,\ 6) \qquad D.\ T(3,\ 9)$$

Rješenje 124

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscisa, ima jednadžbu

$$y^2=2\cdot p\cdot x,$$

gdje je p poluparametar parabole, tj.udaljenost žarišta do ravnalice.

Kako zapisati da je broj x "en puta" veći od broja y?

$$x=n\cdot y \quad \text{ili} \quad \frac{x}{n}=y \quad \text{ili} \quad \frac{x}{y}=n.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Budući da je ordinata y, točke na paraboli $y^2 = 18 \cdot x$, tri puta veća od apscise, vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} y = 3 \cdot x \\ y^2 = 18 \cdot x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow (3 \cdot x)^2 = 18 \cdot x \Rightarrow 9 \cdot x^2 = 18 \cdot x \Rightarrow 9 \cdot x^2 = 18 \cdot x \ /:9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \cdot x \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-2) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 0 \text{ nema smisla} \\ x_2 = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 2.$$

Računamo ordinatu tražene točke:

$$\left.\begin{matrix} y = 3 \cdot x \\ x = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 3 \cdot 2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow T(x, y) = T(2, 6).$$

Odgovor je pod C

Vježba 124

Točka na paraboli $y^2 = 9 \cdot x$ kojoj je ordinata pozitivna i tri puta veća od apscise je:

$$A.\ T(1, 3) \qquad B.\ T(3, 1) \qquad C.\ T(2, 6) \qquad D.\ T(3, 9)$$

Rezultat: A.

Zadatak 125 (Tina, srednja škola)

Pravac $2 \cdot x + b \cdot y - 1 = 0$ je normala kružnice $x^2 + y^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot y - 3 = 0$, ako je b jednako

$$A.\ 2 \qquad B.\ -2 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -1$$

Rješenje 125

Ponovimo!

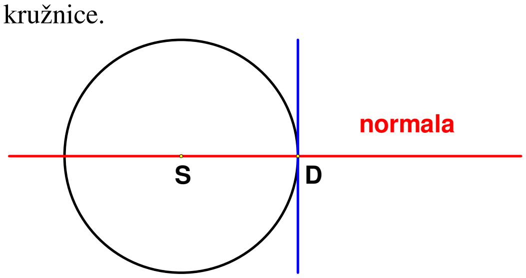
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Opća jednadžba kružnice:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot p \cdot x - 2 \cdot q \cdot y + c = 0 \ , \ r = \sqrt{p^2 + q^2 - c}.$$

Ako je presjek pravca i kružnice jedna točka D kažemo da pravac dira kružnicu ili da je tangenta kružnice. Točku D zovemo diralište tangente. Pravac koji spaja središte S kružnice i diralište D tangente naziva se normala kružnice.



Zadanoj kružnici odredimo koordinate središta S.

$$\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 \cdot p \cdot x - 2 \cdot q \cdot y + c = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2 \cdot p = -2 \\ -2 \cdot q = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2 \cdot p = -2 \ /:(-2) \\ -2 \cdot q = -2 \ /:(-2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p = 1 \\ q = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(p, q) = S(1, 1).$$

Budući da je normala pravac koji prolazi središtem S kružnice, koordinate točke S uvrstit ćemo u jednadžbu pravca.

$$\left.\begin{array}{l} S(x,\ y)=S(1,\ 1) \\ 2\cdot x+b\cdot y-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2\cdot 1+b\cdot 1-1=0\ \Rightarrow\ 2+b-1=0\ \Rightarrow\ b=-2+1\ \Rightarrow\ b=-1.$$

Odgovor je pod D

Vježba 125

Pravac $3 \cdot x + b \cdot y - 2 = 0$ je normala kružnice $x^2 + y^2 - 2 \cdot x - 2 \cdot y - 5 = 0$, ako je b jednako

$A.\ 2 \qquad B.\ -2 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -1$

Rezultat: D.

Zadatak 126 (Iva, strukovna škola)

Kolika je duljina tetive koju na krivulji $3 \cdot x^2 - y^2 = 3$ odsijeca pravac $y + x - 5 = 0$?

$A.\ 6\cdot\sqrt{2}$ jediničnih dužina $\qquad B.\ 7\cdot\sqrt{2}$ jediničnih dužina

$C.\ 8\cdot\sqrt{2}$ jediničnih dužina $\qquad D.\ 9\cdot\sqrt{2}$ jediničnih dužina

Rješenje 126

Ponovimo!

Tetíva u geometriji je spojnica dviju točaka krivulje, posebno na kružnici.

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana formulom

$$|AB|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bismo našli sjecišta krivulje i pravca moramo riješiti sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot x^2-y^2=3 \\ y+x-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot x^2-y^2=3 \\ y=5-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot x^2-(5-x)^2=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^2-\left(25-10\cdot x+x^2\right)=3 \Rightarrow 3\cdot x^2-25+10\cdot x-x^2=3 \Rightarrow 3\cdot x^2-25+10\cdot x-x^2-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2+10\cdot x-28=0 \Rightarrow 2\cdot x^2+10\cdot x-28=0\ /:2 \Rightarrow x^2+5\cdot x-14=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+5\cdot x-14=0 \\ a=1\ ,\ b=5\ ,\ c=-14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=5\ ,\ c=-14 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-14)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{81}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm 9}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-5+9}{2} \\ x_2=\dfrac{-5-9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{4}{2} \\ x_2=-\dfrac{14}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-7 \end{array}\right\} \Rightarrow [y=5-x] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=5-2 \\ y_2=5-(-7) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=3 \\ y_2=5+7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=3 \\ y_2=12 \end{array}\right\}.$$

Sjecišta krivulje i pravca su točke:

$$A(2,\ 3) \text{ i } B(-7,\ 12).$$

Duljina tetive $\overline{AB}$ iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_1,\ y_1)=A(2,\ 3) \\ B(x_2,\ y_2)=B(-7,\ 12) \\ |AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |AB|=\sqrt{(-7-2)^2+(12-3)^2} \Rightarrow |AB|=\sqrt{(-9)^2+9^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|=\sqrt{81+81} \Rightarrow |AB|=\sqrt{81\cdot 2} \Rightarrow |AB|=\sqrt{81}\cdot\sqrt{2} \Rightarrow |AB|=9\cdot\sqrt{2}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 126

Kolika je duljina tetive koju na krivulji $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ odsijeca pravac $y = -x + 5$?

$A.\ 6\cdot\sqrt{2}$ jediničnih dužina $\quad B.\ 7\cdot\sqrt{2}$ jediničnih dužina

$C.\ 8\cdot\sqrt{2}$ jediničnih dužina $\quad D.\ 9\cdot\sqrt{2}$ jediničnih dužina

Rezultat: D.

Zadatak 127 (Iva, strukovna škola)

Zadana je jednakostranična hiperbola $x^2 - y^2 = 8$. Nađite linearni ekscentricitet.

Rješenje 127

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}, \quad \sqrt{a^2}=a\ ,\ a\ge 0.$$

Hiperbola kojoj središte leži u ishodištu koordinatnog sustava, a realna os na osi apscisa ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (\text{kanonska jednadžba hiperbole}).$$

Linearni ekscentricitet hiperbole:

$$e^2=a^2+b^2 \Rightarrow e=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Hiperbolu kojoj su realna i imaginarna poluos jednake nazivamo jednakostranična hiperbola. Za nju vrijedi jednadžba:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ a=b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2-y^2=a^2.$$

Linearni ekscentricitet jednakostranične hiperbole:

$$\left.\begin{array}{l} e^2=a^2+b^2 \\ a=b \end{array}\right\} \Rightarrow e^2=a^2+a^2 \Rightarrow e^2=2\cdot a^2 \Rightarrow e^2=2\cdot a^2\ /\sqrt{\ } \Rightarrow e=\sqrt{2\cdot a^2} \Rightarrow e=a\cdot\sqrt{2}.$$

Računamo linearni ekscentricitet.

$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=8 \\ x^2-y^2=a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=8 \Rightarrow a^2=8\ /\sqrt{\ } \Rightarrow a=\sqrt{8}.$$

$$\left.\begin{array}{l} e = a \cdot \sqrt{2} \\ a = \sqrt{8} \end{array}\right\} \Rightarrow e = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow e = \sqrt{16} \Rightarrow e = 4.$$

Vježba 127

Zadana je jednakostranična hiperbola $x^2 - y^2 = 18$. Nađite linearni ekscentricitet.

Rezultat: 6.

Zadatak 128 (Nikolina, srednja škola)

Kružnica k prolazi točkom T(– 3, 2) i ima isto središte kao i kružnica zadana jednadžbom $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 20$. Koliki je polumjer kružnice k?

$$A.\ \sqrt{10} \qquad B.\ \sqrt{11} \qquad C.\ \sqrt{13} \qquad D.\ \sqrt{14}$$

Rješenje 128

Ponovimo!

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana s

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Kružnice su koncentrične ako imaju isto središte.
Polumjer kružnice je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice.

1.inačica

Kružnica k ima isto središte kao i kružnica zadana jednadžbom $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 20$ pa njezina jednadžba glasi

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = r^2.$$

Budući da kružnica k prolazi točkom T, koordinate točke uvrstit ćemo u jednadžbu kružnice da bismo izračunali njezin polumjer.

$$\left.\begin{array}{l} (x+2)^2 + (y-5)^2 = r^2 \\ T(x, y) = T(-3, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow (-3+2)^2 + (2-5)^2 = r^2 \Rightarrow (-1)^2 + (-3)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 9 = r^2 \Rightarrow 10 = r^2 \Rightarrow r^2 = 10 \Rightarrow r^2 = 10 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow r = \sqrt{10}.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Iz zadane jednadžbe kružnice $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 20$ odredimo koordinate središta.

$$\left.\begin{array}{l} (x+2)^2 + (y-5)^2 = 20 \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow S(p, q) = S(-2, 5).$$

Budući da kružnica k prolazi točkom T(– 3, 2) i ima isto središte S(– 2, 5), njezin polumjer iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} S(x_1, y_1) = S(-2, 5) \\ T(x_2, y_2) = T(-3, 2) \\ r = |ST| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow r = \sqrt{(-3-(-2))^2 + (2-5)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r=\sqrt{(-3+2)^2+(2-5)^2}\ \Rightarrow\ r=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}\ \Rightarrow\ r=\sqrt{1+9}\ \Rightarrow\ r=\sqrt{10}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 128

Kružnica k prolazi točkom T(– 6, 2) i ima isto središte kao i kružnica zadana jednadžbom $(x + 2)^2 + (y – 5)^2 = 20$. Koliki je polumjer kružnice k?

A. 3 *B.* 4 *C.* 5 *D.* 6

Rezultat: C.

Zadatak 129 (Anita, ekonomska škola)

Točka T(6, 5) nalazi se na elipsi čija je velika poluos a = 9. Odredite jednadžbu elipse i udaljenost među fokusima.

Rješenje 129

Ponovimo!

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Broj e naziva se linearni ekscentricitet elipse.

$$e^2=a^2-b^2.$$

Koordinate fokusa F_1 i F_2 elipse su:

$$F_1(-e,\ 0)\quad,\quad F_2(e,\ 0).$$

Budući da točka pripada elipsi, koordinate točke uvrstit ćemo u jednadžbu elipse i izračunati malu poluos b elipse.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(6,\ 5) \\ a=9 \\ b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \end{array}\right\}\Rightarrow b^2\cdot 6^2+9^2\cdot 5^2=9^2\cdot b^2\ \Rightarrow\ 36\cdot b^2+2025=81\cdot b^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 36\cdot b^2-81\cdot b^2=-2025\ \Rightarrow\ -45\cdot b^2=-2025\ \Rightarrow\ -45\cdot b^2=-2025\ /:(-45)\ \Rightarrow\ b^2=45.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=81\ ,\ b^2=45 \\ b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \end{array}\right\}\Rightarrow\ 45\cdot x^2+81\cdot y^2=81\cdot 45\ \Rightarrow\ 45\cdot x^2+81\cdot y^2=3645.$$

Računamo linearni ekscentricitet elipse.

$$\left.\begin{array}{l} a^2=81\ ,\ b^2=45 \\ e^2=a^2-b^2 \end{array}\right\}\Rightarrow\ e^2=81-45\ \Rightarrow\ e^2=36\ \Rightarrow\ e^2=36\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ e=\sqrt{36}\ \Rightarrow\ e=6.$$

Koordinate fokusa elipse iznose

$$\left.\begin{array}{l} F_1(-e,\ 0) \\ F_2(e,\ 0) \\ e=6 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} F_1(-6,\ 0) \\ F_2(6,\ 0) \end{array}\right\}$$

pa je njihova međusoba udaljenost jednaka

$$\left|F_1F_2\right| = 2\cdot e \Rightarrow \left|F_1F_2\right| = 2\cdot 6 \Rightarrow \left|F_1F_2\right| = 12.$$

Vježba 129

Točka T(– 6, – 5) nalazi se na elipsi čija je velika poluos a = 9. Odredite jednadžbu elipse i udaljenost među fokusima.

Rezultat: $45\cdot x^2 + 81\cdot y^2 = 3645$, $\left|F_1F_2\right| = 12.$

Zadatak 130 (Ana, gimnazija)

Napiši jednadžbu elipse čiji fokus je $F(24,\ 0)$ i $a = \sqrt{5}\cdot b.$

Rješenje 130

Ponovimo!

$$a = b \Rightarrow b = a \quad , \quad (a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2 + a^2\cdot y^2 = a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

gdje su a i b velika i mala poluos.
Broj e naziva se linearni ekscentricitet elipse.

$$e^2 = a^2 - b^2.$$

Koordinate fokusa (žarišta) F_1 i F_2 elipse su:

$$F_1(-e,\ 0) \quad , \quad F_2(e,\ 0).$$

$$\left.\begin{array}{l} F(e,\ 0) = F(24,\ 0) \\ a = \sqrt{5}\cdot b \\ e^2 = a^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e = 24 \\ a = \sqrt{5}\cdot b \\ e^2 = a^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow 24^2 = \left(\sqrt{5}\cdot b\right)^2 - b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 576 = 5\cdot b^2 - b^2 \Rightarrow 576 = 4\cdot b^2 \Rightarrow 4\cdot b^2 = 576 \Rightarrow 4\cdot b^2 = 576 \ /:4 \Rightarrow b^2 = 144.$$

Računamo a^2.

$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{5}\cdot b \\ b^2 = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \sqrt{5}\cdot b \ /^2 \\ b^2 = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 5\cdot b^2 \\ b^2 = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = 5\cdot 144 \Rightarrow a^2 = 720.$$

Kanonska ili osna jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 720 \ , \ b^2 = 144 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{720} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

Vježba 130

Napiši jednadžbu elipse čiji fokus je $F(-24,\ 0)$ i $a = \sqrt{5}\cdot b.$

Rezultat: $\dfrac{x^2}{720} + \dfrac{y^2}{144} = 1.$

Zadatak 131 (Ana, gimnazija)

Odredimo jednadžbu hiperbole s fokusima na y – osi koja sadrži točke A(– 1, 2) i B(7, 10).

Rješenje 131

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b.$$

Neka je zadana hiperbola čiji fokusi leže na y – osi, a središte hiperbole je ishodište koordinatnog sustava. Jednadžba takve hiperbole glasi:

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1.$$

Budući da hiperbola sadrži točke A i B, uvrstit ćemo koordinate točaka u jednadžbu hiperbole i dobiti sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(-1,\ 2)\ ,\ \dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=-1 \\ B(x,\ y)=B(7,\ 10)\ ,\ \dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^2}{b^2}-\dfrac{2^2}{a^2}=-1 \\ \dfrac{7^2}{b^2}-\dfrac{10^2}{a^2}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{b^2}-\dfrac{4}{a^2}=-1 \\ \dfrac{49}{b^2}-\dfrac{100}{a^2}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{b^2}-\dfrac{4}{a^2}=-1\ /\cdot(-49) \\ \dfrac{49}{b^2}-\dfrac{100}{a^2}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{49}{b^2}+\dfrac{196}{a^2}=49 \\ \dfrac{49}{b^2}-\dfrac{100}{a^2}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{96}{a^2}=48 \Rightarrow \frac{96}{a^2}=48\ /\cdot\frac{a^2}{48} \Rightarrow a^2=2.$$

Računamo b^2.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{b^2}-\dfrac{4}{a^2}=-1 \\ a^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{b^2}-\frac{4}{2}=-1 \Rightarrow \frac{1}{b^2}-2=-1 \Rightarrow \frac{1}{b^2}=-1+2 \Rightarrow \frac{1}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=1.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=2\ ,\ b^2=1 \\ \dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{2}=-1 \Rightarrow x^2-\frac{y^2}{2}=-1.$$

Vježba 131

Odredimo jednadžbu hiperbole s fokusima na y – osi koja sadrži točke A(1, 2) i B(– 7, 10).

Rezultat: $x^2-\dfrac{y^2}{2}=-1.$

Zadatak 132 (Ivana, ekonomska škola)

Odredi jednadžbu kružnice polumjera r = 5, koja dodiruje os x i prolazi točkom T(– 2, 2). Skiciraj.

Rješenje 132

Ponovimo!

$$(-a-b)^2=(a+b)^2.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r njezin polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Kada kružnica dira os x, točka diranja je od središta udaljena upravo onoliko koliko je os x udaljena od središta, tj. polumjer kružnice jednak je udaljenosti središta S(p, q) do osi x. Vrijedi:

$$q=r \quad , \quad q=-r$$

pa postoje dvije jednadžbe

$$(x-p)^2+(y-r)^2=r^2 \quad , \quad (x-p)^2+(y+r)^2=r^2.$$

Točka T je iznad osi x i zato promatramo kružnicu koja dira os x iznad osi x. Ako je iznad, tada je polumjer upravo jednak q.

$$\left.\begin{matrix} q=r \\ r=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q=5.$$

Budući da kružnica prolazi točkom T, koordinate točke uvrstit ćemo u jednadžbu kružnice.

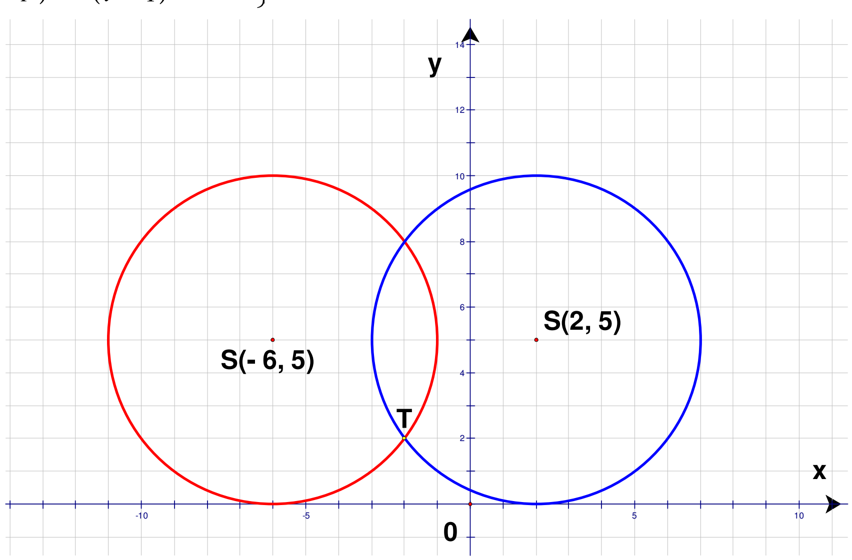
$$\left.\begin{matrix} q=5 \ , \ r=5 \\ T(x,\ y)=T(-2,\ 2) \\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-2-p)^2+(2-5)^2=5^2 \Rightarrow (-2-p)^2+(-3)^2=5^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+p)^2+9=25 \Rightarrow (2+p)^2=25-9 \Rightarrow (2+p)^2=16 \Rightarrow (2+p)^2=16 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+p=\pm\sqrt{16} \Rightarrow 2+p=\pm 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2+p=4 \\ 2+p=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p=4-2 \\ p=-4-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p_1=2 \\ p_2=-6 \end{matrix}\right\}.$$

Postoje dvije kružnice sa zadanim uvjetima.

- $$\left.\begin{matrix} p=2 \ , \ q=5 \ , \ r=5 \\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=5^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=25.$$
- $$\left.\begin{matrix} p=-6 \ , \ q=5 \ , \ r=5 \\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-(-6))^2+(y-5)^2=5^2 \Rightarrow (x+6)^2+(y-5)^2=25.$$



Vježba 132

Odredi jednadžbu kružnice polumjera r = 5, koja dodiruje os x i prolazi točkom T(– 2, 8).

Rezultat: $(x-2)^2+(y-5)^2=25\ ,\ (x+6)^2+(y-5)^2=25.$

Zadatak 133 (Ivana, ekonomska škola)

Odredi jednadžbu kružnice koja sadrži točke A(1, 0) i B(– 1, 4), a središte pripada osi x. Skiciraj.

Rješenje 133

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad(-a-b)^2=(a+b)^2.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r njezin polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Kada središte S(p, q) kružnice pripada osi x, tada je ordinata q središta jednaka nuli, q = 0. Vrijedi jednadžba:

$$(x-p)^2+(y-0)^2=r^2\ \Rightarrow\ (x-p)^2+y^2=r^2.$$

Budući da kružnica sadrži dvije točke A i B, uvrstit ćemo koordinate točaka u jednadžbu kružnice i dobiti sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

- $$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(1,\ 0) \\ (x-p)^2+y^2=r^2 \end{array}\right\}\Rightarrow\ (1-p)^2+0^2=r^2\ \Rightarrow\ (1-p)^2=r^2.$$
- $$\left.\begin{array}{l} B(x,\ y)=B(-1,\ 4) \\ (x-p)^2+y^2=r^2 \end{array}\right\}\Rightarrow\ (-1-p)^2+4^2=r^2\ \Rightarrow\ (1+p)^2+16=r^2.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} (1-p)^2=r^2 \\ (1+p)^2+16=r^2 \end{array}\right\}\Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{komparacije}\end{array}\right]\Rightarrow\ (1-p)^2=(1+p)^2+16\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1-2\cdot p+p^2=1+2\cdot p+p^2+16\ \Rightarrow\ 1-2\cdot p+p^2=1+2\cdot p+p^2+16\ \Rightarrow\ -2\cdot p=2\cdot p+16\ \Rightarrow$$

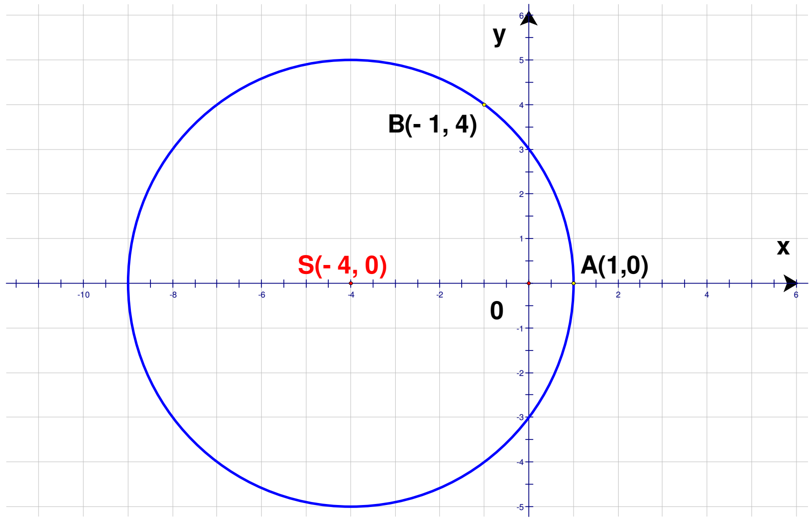
$$\Rightarrow\ -2\cdot p-2\cdot p=16\ \Rightarrow\ -4\cdot p=16\ \Rightarrow\ -4\cdot p=16\ /:(-4)\ \Rightarrow\ p=-4.$$

Računamo r^2.

$$\left.\begin{array}{l} (1-p)^2=r^2 \\ p=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow\ (1-(-4))^2=r^2\ \Rightarrow\ (1+4)^2=r^2\ \Rightarrow\ 5^2=r^2\ \Rightarrow\ r^2=25.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$\left.\begin{array}{l} p=-4\ ,\ r^2=25 \\ (x-p)^2+y^2=r^2 \end{array}\right\}\Rightarrow\ (x-(-4))^2+y^2=25\ \Rightarrow\ (x+4)^2+y^2=25.$$



Vježba 133

Odredi jednadžbu kružnice koja sadrži točke A(– 9, 0) i B(– 1, 4), a središte pripada osi x.

Rezultat: $(x+4)^2+y^2=25.$

Zadatak 134 (Marin, ekonomska škola)

Kako glase jednadžbe onih tangenata elipse $4\cdot x^2+9\cdot y^2=36$ ako je poznat koeficijent smjera $k=\frac{8}{9}$?

Rješenje 134

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Eksplicitni oblik jednadžbe pravca:

$$y=k\cdot x+l \;\;,\;\; k-\text{koeficijent smjera} \;\;,\;\; l-\text{odsječak na } y \text{ osi}.$$

Pravac y = k · x + l dodiruje elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ako i samo ako vrijedi

$$a^2\cdot k^2+b^2=l^2.$$

Prvo napišemo kanonski oblik elipse.

$$4\cdot x^2+9\cdot y^2=36 \Rightarrow 4\cdot x^2+9\cdot y^2=36 \;/:36 \Rightarrow \frac{4\cdot x^2}{36}+\frac{9\cdot y^2}{36}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\cdot x^2}{36}+\frac{9\cdot y^2}{36}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2=9 \\ b^2=4 \end{matrix}\right\}.$$

Iz uvjeta dodira pravca i elipse dobije se odsječak l na y osi tangente.

$$\left.\begin{array}{l} a^2\cdot k^2+b^2=l^2 \\ a^2=9\ ,\ b^2=4\ ,\ k=\frac{8}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow 9\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2+4=l^2 \Rightarrow 9\cdot\frac{64}{81}+4=l^2 \Rightarrow 9\cdot\frac{64}{81}+4=l^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{64}{9}+4=l^2 \Rightarrow \frac{64}{9}+\frac{4}{1}=l^2 \Rightarrow \frac{64+36}{9}=l^2 \Rightarrow \frac{100}{9}=l^2 \Rightarrow l^2=\frac{100}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2=\frac{100}{9}\ /\sqrt{\ } \Rightarrow l_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{100}{9}} \Rightarrow l_{1,2}=\pm\frac{10}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} l_1=\frac{10}{3} \\ l_2=-\frac{10}{3} \end{array}\right\}.$$

Jednadžbe tangenata glase:

$$\left.\begin{array}{l} y=k\cdot x+l\ ,\ k=\frac{8}{9}\ ,\ l=\frac{10}{3} \\ y=k\cdot x+l\ ,\ k=\frac{8}{9}\ ,\ l=-\frac{10}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{8}{9}\cdot x+\frac{10}{3} \\ y=\frac{8}{9}\cdot x-\frac{10}{3} \end{array}\right\}.$$

Vježba 134

Kako glase jednadžbe onih tangenata elipse $4\cdot x^2+9\cdot y^2=36$ ako je poznat koeficijent smjera $k=\frac{2}{3}$?

Rezultat: $y=\frac{2}{3}\cdot x+2\cdot\sqrt{2}\ ,\ y=\frac{2}{3}\cdot x-2\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 135 (Goran, srednja škola)

Točka T(6, 5) nalazi se na elipsi čija je velika poluos a = 9. Odredite jednadžbu elipse i udaljenost među fokusima.

Rješenje 135

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\ge 0.$$

Elipsa kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, smjer glavne osi s x – osi, a smjer sporedne osi s y – osi ima jednadžbu

$$b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Broj e naziva se linearni ekscentricitet elipse.

$$e^2=a^2-b^2 \Rightarrow e=\sqrt{a^2-b^2}.$$

Fokusi (žarišta) elipse su točke s koordinatama:

$$F_1(-e,0)\quad,\quad F_2(e,0).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x,\ x\ge 0 \\ -x,\ x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\ge 0$, vrijedi $|x|=x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.
Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 7 | = 7.
Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 4 | = – (– 4) = 4.
Udaljenost točaka $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Budući da se točka T nalazi na elipsi, njezine koordinate uvrstit ćemo u jednadžbu elipse.

$$\left.\begin{array}{l} T(x, y)=T(6, 5) \\ a=9 \\ b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2\cdot 6^2+9^2\cdot 5^2=9^2\cdot b^2 \Rightarrow 36\cdot b^2+81\cdot 25=81\cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36\cdot b^2+2025=81\cdot b^2 \Rightarrow 36\cdot b^2-81\cdot b^2=2025 \Rightarrow -45\cdot b^2=-2025 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -45\cdot b^2=-2025 \;/:(-45) \Rightarrow b^2=45.$$

Jednadžba elipse glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=81 \;,\; b^2=45 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1.$$

Računamo linearni ekscentricitet elipse.

$$\left.\begin{array}{l} a^2=81 \;,\; b^2=45 \\ e=\sqrt{a^2-b^2} \end{array}\right\} \Rightarrow e=\sqrt{81-45} \Rightarrow e=\sqrt{36} \Rightarrow e=6.$$

Fokusi elipse imaju koordinate

$$F_1(-e, 0)=F_1(-6, 0) \;,\; F_2(e, 0)=F_2(6, 0)$$

pa njihova međusobna udaljenost iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1, y_1)=F_1(-6, 0) \\ F_2(x_2, y_2)=F_2(6, 0) \\ |F_1F_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow |F_1F_2|=\sqrt{(6-(-6))^2+(0-0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F_1F_2|=\sqrt{(6+6)^2+0} \Rightarrow |F_1F_2|=\sqrt{12^2} \Rightarrow |F_1F_2|=12.$$

Vježba 135

Točka T(– 6, – 5) nalazi se na elipsi čija je velika poluos a = 9. Odredite jednadžbu elipse.

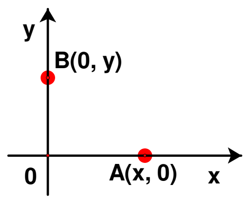
Rezultat: $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{45}=1.$

Zadatak 136 (Maturanti, HTT)

U kojim točkama kružnica $x^2 + y^2 = 25$ siječe koordinatne osi?

Rješenje 136

Ponovimo!



Točka koja pripada osi x ima ordinatu jednaku 0.

Točka koja pripada osi y ima apscisu jednaku 0.

Budući da točke u kojima kružnica siječe os x imaju ordinatu jednaku 0, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+0^2=25 \Rightarrow x^2+0=25 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x^2=25 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{25} \Rightarrow x_{1,2}=\pm 5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-5 \\ x_2=5 \end{array}\right\}.$$

Kružnica siječe os x u dvije točke:

$$A(-5,\ 0) \text{ i } B(5,\ 0).$$

Budući da točke u kojima kružnica siječe os y imaju apscisu jednaku 0, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0^2+y^2=25 \Rightarrow 0+y^2=25 \Rightarrow y^2=25 \Rightarrow y^2=25 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\pm\sqrt{25} \Rightarrow y_{1,2}=\pm 5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=-5 \\ y_2=5 \end{array}\right\}.$$

Kružnica siječe os y u dvije točke:

$$C(0,\ -5) \text{ i } D(0,\ 5).$$

Vježba 136

U kojim točkama kružnica $x^2 + y^2 = 9$ siječe koordinatne osi?

Rezultat: $A(-3,\ 0),\ B(3,\ 0),\ C(0,\ -3),\ D(0,\ 3).$

Zadatak 137 (Maturanti, HTT)

Točka S(– 2, 3) je središte kružnice koja prolazi ishodištem koordinatnoga sustava. Kako glasi jednadžba kružnice?

$A.\ (x+2)^2+(y-3)^2=13 \qquad B.\ (x+2)^2+(y-3)^2=5$

$C.\ (x-2)^2+(y+3)^2=13 \qquad D.\ (x-2)^2+(y+3)^2=5$

Rješenje 137

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana s

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

1.inačica

Kružnica sa središtem u točki S(– 2, 3) ima jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} S(p, q) = S(-2, 3) \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-(-2))^2 + (y-3)^2 = r^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = r^2.$$

Budući da kružnica prolazi ishodištem koordinatnog sustava, koordinate ishodišta uvrstit ćemo u jednadžbu kružnice i izračunati njezin polumjer.

$$\left.\begin{array}{l} O(x, y) = O(0, 0) \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (0+2)^2 + (0-3)^2 = r^2 \Rightarrow 2^2 + (-3)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 9 = r^2 \Rightarrow 13 = r^2 \Rightarrow r^2 = 13.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Kružnica sa središtem u točki S(– 2, 3) ima jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} S(p, q) = S(-2, 3) \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-(-2))^2 + (y-3)^2 = r^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = r^2.$$

Budući da kružnica prolazi ishodištem koordinatnog sustava, njezin polumjer jednak je udaljenosti između točaka S i O.

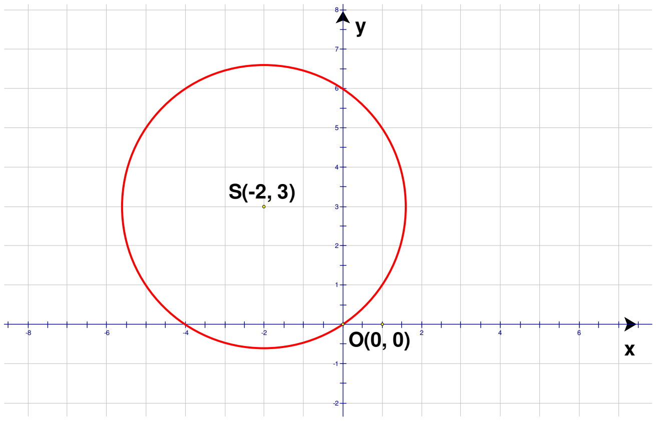
$$\left.\begin{array}{l} S(x_1, y_1) = S(-2, 3) \\ O(x_2, y_2) = O(0, 0) \\ |SO| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ r = |SO| \end{array}\right\} \Rightarrow r = \sqrt{(0-(-2))^2 + (0-3)^2} \Rightarrow r = \sqrt{(0+2)^2 + (0-3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2^2 + (-3)^2} \Rightarrow r = \sqrt{4+9} \Rightarrow r = \sqrt{13}.$$

Jednadžba kružnice glasi:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 13.$$

Odgovor je pod A.



Vježba 137

Kružnica sa središtem u točki S(1, 1) prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Kako glasi jednadžba te kružnice?

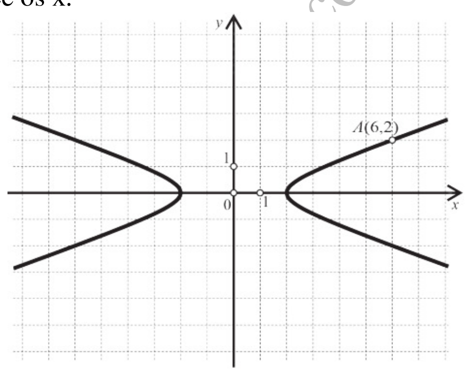
$$A)\ (x-1)^2+(y+1)^2=2 \qquad B)\ (x-1)^2+(y-1)^2=2$$

$$C)\ (x+1)^2+(y-1)^2=1 \qquad D)\ (x-1)^2+(y+1)^2=1$$

Rezultat: B.

Zadatak 138 (Ivan, gimnazija)

Na slici je prikazana hiperbola i njezina točka A. Izračunajte koordinate točke u kojoj tangenta na tu hiperbolu u točki A siječe os x.



Rješenje 138

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

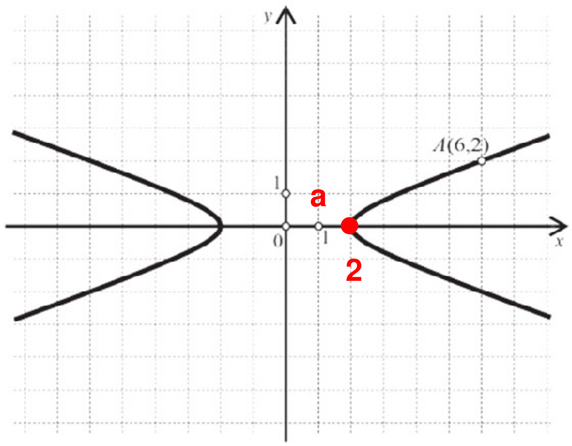
Hiperbola kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, a fokusi leže na osi x ima jednadžbu (osna jednadžba)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2\cdot x^2-a^2\cdot y^2=a^2\cdot b^2,$$

gdje je a realna poluos, b imaginarna poluos.

Jednadžba tangente u točki T(x_1, y_1) hiperbole:

$$b^2 \cdot x_1 \cdot x - a^2 \cdot y_1 \cdot y = a^2 \cdot b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x_1 \cdot x}{a^2} - \frac{y_1 \cdot y}{b^2} = 1.$$



Sa slike vidi se da je realna poluos hiperbole a = 2.

$$a = 2 \;\Rightarrow\; a^2 = 2^2 \;\Rightarrow\; a^2 = 4.$$

Budući da točka A pripada hiperboli, koordinate točke uvrstit ćemo u jednadžbu hiperbole i izračunati imaginarnu poluos b.

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 4 \;,\; A(x, y) = A(6, 2) \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6^2}{4} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{4} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{4} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{1} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{1} - \frac{4}{b^2} = 1 \;/\cdot b^2 \Rightarrow 9 \cdot b^2 - 4 = b^2 \Rightarrow 9 \cdot b^2 - b^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot b^2 = 4 \Rightarrow 8 \cdot b^2 = 4 \;/:8 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{8} \Rightarrow b^2 = \frac{4}{8} \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2}.$$

Jednadžba hiperbole glasi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 4 \;,\; b^2 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Tangenta na hiperbolu prolazi točkom A pa je njezina jednadžba oblika:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 4 \;,\; b^2 = \dfrac{1}{2} \\ A(x_1, y_1) = A(6, 2) \\ \dfrac{x_1 \cdot x}{a^2} - \dfrac{y_1 \cdot y}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6 \cdot x}{4} - \frac{2 \cdot y}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{6 \cdot x}{4} - \frac{\frac{2}{1} \cdot y}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot x - 4 \cdot y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot y = -\frac{3}{2} \cdot x + 1 \Rightarrow -4 \cdot y = -\frac{3}{2} \cdot x + 1 \;/\cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{3}{8} \cdot x - \frac{1}{4}.$$

Budući da tangenta siječe x os, sjecište će imati ordinatu jednaku nula, y = 0.

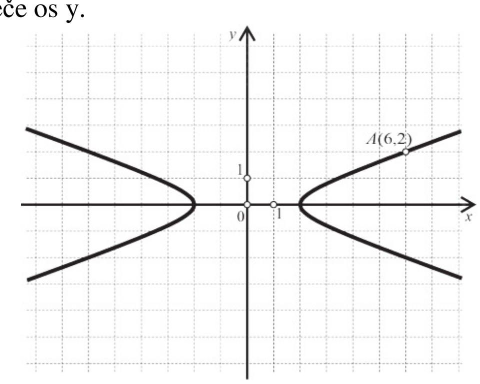
$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{3}{8}\cdot x-\frac{1}{4} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{8}\cdot x-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow \frac{3}{8}\cdot x-\frac{1}{4}=0 \;/\cdot\frac{8}{3} \Rightarrow x-\frac{2}{3}=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Koordinate točke glase:

$$\left(\frac{2}{3},\ 0\right).$$

Vježba 138

Na slici je prikazana hiperbola i njezina točka A. Izračunajte koordinate točke u kojoj tangenta na tu hiperbolu u točki A siječe os y.



Rezultat: $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right).$

Zadatak 139 (Tina, srednja škola)

Zadan je skup svih točaka koje su od točke (2, 4) udaljene za 3. Napišite jednadžbu tog skupa i skicirajte ga u zadanom koordinatnom sustavu.

Rješenje 139

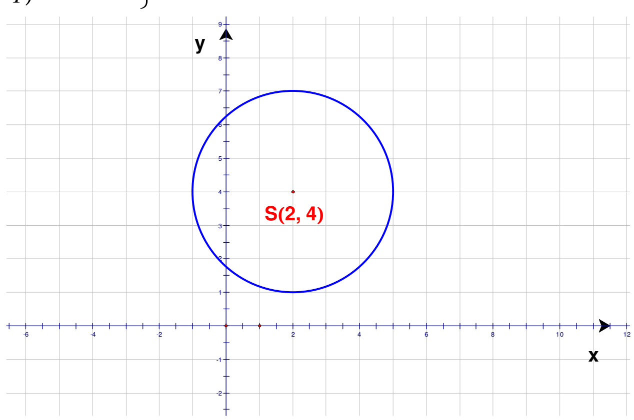
Ponovimo!

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta) te ravnine.
Ako je S(p, q) središte kružnice, a r polumjer, tada središnja jednadžba kružnice glasi:

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Skup svih točaka koje su od točke (2, 4) udaljene za 3 je kružnica sa središtem S(p, q) = S(2, 4) i polumjerom r = 3. Njezina jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} S(p,\ q)=S(2,\ 4)\ ,\ r=3 \\ (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=3^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=9.$$



Vježba 139

Zadan je skup svih točaka koje su od točke (4, 2) udaljene za 3. Napišite jednadžbu tog skupa.

Rezultat: $(x-4)^2+(y-2)^2=9.$

Zadatak 140 (Ivan, srednja škola)

Točka T(10, y > 0) leži na krivulji $2 \cdot y^2 = 5 \cdot x$. Koliko je točka T udaljena od žarišta te krivulje?

Rješenje 140

Ponovimo!

Parabola kojoj tjeme leži u ishodištu, a žarište na pozitivnom dijelu osi apscisa, ima jednadžbu

$$y^2=2\cdot p\cdot x,$$

gdje je p poluparametar parabole, tj.udaljenost žarišta do ravnalice.
Koordinate žarišta (fokusa) F parabole su:

$$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right).$$

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke ravnine. Tada je udaljenost točaka A i B dana formulom

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \sqrt{a^2}=|a|.$$

Uočimo da je krivulja parabola.

$$2\cdot y^2=5\cdot x \Rightarrow 2\cdot y^2=5\cdot x\ /:2 \Rightarrow y^2=\frac{5}{2}\cdot x.$$

Njezin poluparametar p iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} y^2=2\cdot p\cdot x \\ y^2=\frac{5}{2}\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot p=\frac{5}{2} \Rightarrow 2\cdot p=\frac{5}{2}\ /\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow p=\frac{5}{4}.$$

Tada žarište (fokus) parabole ima koordinate.

$$\left.\begin{array}{l} F\left(\frac{p}{2},\ 0\right) \\ p=\frac{5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow F\left(\frac{\frac{5}{4}}{2},\ 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{1}},\ 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{5}{8},\ 0\right).$$

Budući da točka T pripada paraboli, uvrstit ćemo koordinate točke u jednadžbu parabole i izračunati ordinatu y.

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(10,\ y) \\ y^2=\frac{5}{2}\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow y^2=\frac{5}{2}\cdot 10 \Rightarrow y^2=\frac{5}{2}\cdot 10 \Rightarrow y^2=25 \Rightarrow y^2=25\ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y_{1,2} = \pm\sqrt{25} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} y_1 = 5 \\ y_2 = -5 \text{ nije rješenje zbog } y > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; y = 5 \;\Rightarrow\; T(x,\, y) = T(10,\, 5).$$

Računamo udaljenost između točaka T i F.

$$\left.\begin{array}{l} T(x_1,\, y_1) = T(10,\, 5) \\ F(x_2,\, y_2) = F\left(\dfrac{5}{8},\, 0\right) \\ |TF| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \; |TF| = \sqrt{\left(\frac{5}{8} - 10\right)^2 + (0-5)^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; |TF| = \sqrt{\left(\frac{5}{8} - \frac{10}{1}\right)^2 + (-5)^2} \;\Rightarrow\; |TF| = \sqrt{\left(\frac{5-80}{8}\right)^2 + 25} \;\Rightarrow\; |TF| = \sqrt{\left(-\frac{75}{8}\right)^2 + 25} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; |TF| = \sqrt{\frac{5625}{64} + 25} \;\Rightarrow\; |TF| = \sqrt{\frac{5625}{64} + \frac{25}{1}} \;\Rightarrow\; |TF| = \sqrt{\frac{5625 + 1600}{64}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; |TF| = \sqrt{\frac{7225}{64}} \;\Rightarrow\; |TF| = \frac{85}{8} \;\Rightarrow\; |TF| = 10.625.$$

Vježba 140

Točka T(10, y < 0) leži na krivulji $2 \cdot y^2 = 5 \cdot x$. Koliko je točka T udaljena od žarišta te krivulje?

Rezultat: 10.625.