Zadatak 001 (Tihomir, tehnička škola)

Prikaži vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{c} = 8\vec{i}$.

Rješenje 001

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori i α, β realni brojevi. Vektor $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ nazivamo linearnom kombinacijom vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ s koeficijentima α i β.

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b},$$

$$8\vec{i} = \alpha \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j}) + \beta \cdot (4\vec{i} - 3\vec{j}) \;\Rightarrow\; 8\vec{i} = 2\alpha\vec{i} + 3\alpha\vec{j} + 4\beta\vec{i} - 3\beta\vec{j},$$

[na desnoj strani izlučimo vektor $\vec{i}$ i vektor $\vec{j}$]

$$8\vec{i} = (2\alpha + 4\beta)\,\vec{i} + (3\alpha - 3\beta)\,\vec{j},$$

Ako su $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ dva vektora, oni su jednaki ako i samo ako su im odgovarajuće koordinate jednake, tj. $a_x = b_x$ i $a_y = b_y$.

$$8\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = (2\alpha + 4\beta)\,\vec{i} + (3\alpha - 3\beta)\,\vec{j},$$

[sustav rješavamo metodom suprotnih koeficijenata]

$$\begin{aligned} 2\alpha + 4\beta &= 8 \quad / \cdot 3 \\ 3\alpha - 3\beta &= 0 \quad / \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6\alpha + 12\beta &= 24 \\ 12\alpha - 12\beta &= 0 \end{aligned}$$

$$18\alpha = 24 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}.$$

Ako α uvrstimo u drugu jednadžbu dobijemo:

$$3 \cdot \alpha - 3 \cdot \beta = 0 \;\Rightarrow\; 3 \cdot \frac{4}{3} - 3 \cdot \beta = 0 \quad /:3 \;\Rightarrow\; \frac{4}{3} - \beta = 0 \;\Rightarrow\; \beta = \frac{4}{3}.$$

$$\vec{c} = \frac{4}{3} \cdot \vec{a} + \frac{4}{3} \cdot \vec{b}.$$

Vježba 001

Prikaži vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Rezultat: $\vec{c} = -10\vec{a} - 7\vec{b}$.

Zadatak 002 (Toni, gimnazija)

Ako vektori zatvaraju kut 60º, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, pronađite $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Rješenje 002

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iznosi:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 3 \cdot 0.5 = 6.$$

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ sa samim sobom glasi:

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2.$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}.$$

Sada je:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right) \circ \left(\vec{a}-\vec{b}\right)} = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 - 2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2} = \sqrt{4^2 - 2 \cdot 6 + 3^2} = \sqrt{16 - 12 + 9} = \sqrt{13}.$$

Vježba 002

Ako vektori zatvaraju kut 60º, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, pronađite $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Rezultat: $\sqrt{37}$.

Zadatak 003 (Ines, gimnazija)

Zadani su vektori $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Odredi vektor $\vec{x} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$ za kojega je $\vec{a} \circ \vec{x} = 3$, $\vec{b} \circ \vec{x} = -5$.

Rješenje 003

Ako su vektori zadani u koordinatnom sustavu, tada se skalarni produkt definira na ovaj način:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \\ \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y.$$

Budući da su u zadatku zadana dva skalarna produkta, dobije se sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \circ \vec{x} = 3 \\ \vec{b} \circ \vec{x} = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2A + B = 3 \\ 3A - 2B = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2A + B = 3 \;/ \cdot 2 \\ 3A - 2B = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4A + 2B = 6 \\ 3A - 2B = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1.$$

Iz jednadžbe – 2A + B = 3 izračunamo B:

$$-2 \cdot (-1) + B = 3 \;\Rightarrow\; 2 + B = 3 \;\Rightarrow\; B = 1.$$

Vektor $\vec{x}$ je $\vec{x} = -\vec{i} + \vec{j} = (-1, 1)$.

Vježba 003

Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Odredi vektor $\vec{x} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$ za kojega je $\vec{a} \circ \vec{x} = 7$, $\vec{b} \circ \vec{x} = 8$.

Rezultat: $\vec{x} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} = (2, 3)$.

Zadatak 004 (Miš, gimnazija)

Zadani su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = x\vec{i} + 5\vec{j}$. Odredi realni parametar x tako da

a) su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni,

b) su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti,

c) je vektor $\vec{b}$ pet puta dulji od vektora $\vec{a}$,

d) odredi jedinični vektor $\vec{a_0}$.

Rješenje 004

a)

U koordinatnom sustavu vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zadani su na sljedeći način:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}.$$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako postoji realni broj k tako da vrijedi:

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b},$$

tj. ako su im odgovarajuće komponente proporcionalne:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = k.$$

Budući da vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = x\vec{i} + 5\vec{j}$ moraju biti kolinearni, vrijedi:

$$\frac{3}{x} = \frac{-1}{5} \Rightarrow -x = 15 \Rightarrow x = -15.$$

b)

U koordinatnom sustavu skalarni produk vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ definira se:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} \\ \vec{b} &= b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y.$$

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomita ako im je skalarni produkt jednak nuli:

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0.$$

Budući da vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = x\vec{i} + 5\vec{j}$ moraju biti okomiti, slijedi:

$$3 \cdot x + (-1) \cdot 5 = 0 \Rightarrow 3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}.$$

c)

U koordinatnom sustavu duljina vektora $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ definira se:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Budući da vektor $\vec{b} = x\vec{i} + 5\vec{j}$ mora biti pet puta dulji od vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, pišemo jednakost:

$$\left|\vec{b}\right| = 5 \cdot \left|\vec{a}\right| \Rightarrow \sqrt{x^2 + 5^2} = 5 \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 25} = 5 \cdot \sqrt{9 + 1} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 25} = 5 \cdot \sqrt{10} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 25 = 25 \cdot 10 \Rightarrow x^2 + 25 = 250 \Rightarrow x^2 = 225 \;/\sqrt{} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 15.$$

d)

Jedinični vektor računa se po formuli:

$$\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \cdot \vec{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \cdot \vec{j}.$$

Za vektor $\vec{a} = 3\,\vec{i} - \vec{j}$ pripadni jedinični vektor iznosi:

$$\vec{a}_0 = \frac{3\,\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{3\,\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{9+1}} = \frac{3\,\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\,\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{10}}\,\vec{j} = [\text{racionalizacija nazivnika}] = \frac{3\sqrt{10}}{10}\,\vec{i} - \frac{\sqrt{10}}{10}\,\vec{j}.$$

Vježba 004

Zadani su vektori $\vec{a} = 6\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$, $\vec{b} = x\,\vec{i} + 10\,\vec{j}$. Odredi realni parametar x tako da

a) su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni,

b) su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomiti,

c) je vektor $\vec{b}$ pet puta dulji od vektora $\vec{a}$,

d) odredi jedinični vektor $\vec{a}_0$.

Rezultat: a) x = – 30, b) $x = \frac{10}{3}$, c) $x_{1,2} = \pm 30$,

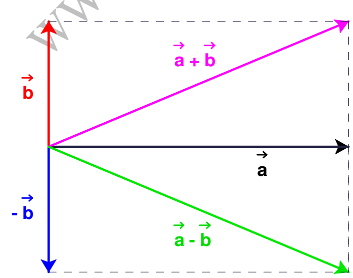
d) $\vec{a}_0 = \frac{3\sqrt{10}}{10}\,\vec{i} - \frac{\sqrt{10}}{10}\,\vec{j}$.

Zadatak 005 (Miš, gimnazija)

Kakav međusobni položaj imaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako vrijedi jednakost: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$?

Rješenje 005

Sa slike je vidljivo da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ moraju biti okomiti:

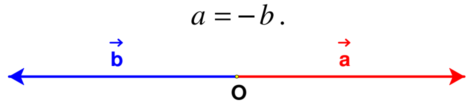


Vježba 005

Kakav međusobni položaj imaju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako vrijedi jednakost: $\vec{a} + \vec{b}$?

Rezultat: Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su suprotni:

$$\vec{a} = -\vec{b}.$$



Zadatak 006 (Anastazija, gimnazija)

Odredi realan broj m tako da vektori $\vec{a} = (2m - 1)\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ i $\vec{b} = 3\,\vec{i} + (2m - 1)\,\vec{j}$ zatvaraju s vektorom $\vec{i}$ jednake kutove.

Rješenje 006

Podsjetimo se!

Ako su $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ dva vektora, tada vrijedi:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y,$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2},$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|},$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Za jedinične vektore $\vec{i}$ i $\vec{j}$ vrijedi:

$$\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = 1 \quad , \quad \vec{i} \circ \vec{j} = \vec{j} \circ \vec{i} = 0 \quad , \quad \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1.$$

Promatrajmo skalarne produkte vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ s vektorom $\vec{i}$. Uvjet je da zatvaraju s vektorom jednake kutove:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \circ \vec{i} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{i}\right| \cdot \cos\alpha \\ \vec{b} \circ \vec{i} = \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{i}\right| \cdot \cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{i}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{i}\right|} \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \frac{\vec{b} \circ \vec{i}}{\left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{i}\right|}.$$

Sada je:

$$\Rightarrow \frac{\vec{a} \circ \vec{i}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{i}\right|} = \frac{\vec{b} \circ \vec{i}}{\left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{i}\right|} \Rightarrow \frac{\left((2m-1)\vec{i} + 3\vec{j}\right) \circ \vec{i}}{\sqrt{(2m-1)^2 + 3^2} \cdot 1} = \frac{\left(3\vec{i} + (2m-1)\vec{j}\right) \circ \vec{i}}{\sqrt{3^2 + (2m-1)^2} \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2m-1)\,\vec{i} \circ \vec{i} + 3\,\vec{j} \circ \vec{i}}{\sqrt{(2m-1)^2 + 3^2}} = \frac{3\,\vec{i} \circ \vec{i} + (2m-1)\,\vec{j} \circ \vec{i}}{\sqrt{3^2 + (2m-1)^2}} \Rightarrow \frac{(2m-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0}{\sqrt{(2m-1)^2 + 9}} = \frac{3 \cdot 1 + (2m-1) \cdot 0}{\sqrt{9 + (2m-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{\sqrt{(2m-1)^2 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{9 + (2m-1)^2}} \Rightarrow 2m - 1 = 3 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2.$$

Vježba 006

Odredi realan broj m tako da vektori $\vec{a} = (m - 1)\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ i $\vec{b} = 3\,\vec{i} + (m - 1)\,\vec{i}$ zatvaraju s vektorom $\vec{i}$ jednake kutove.

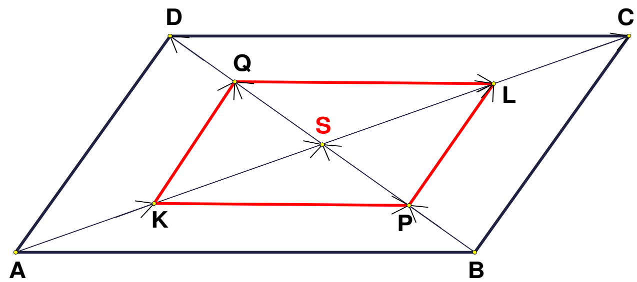
Rezultat: m = 4.

Zadatak 007 (Seve, hotelijerska škola)

Zadan je paralelogram ABCD. Na dijagonali AC dane su točke K i L tako da je $|AK| = |LC|$. Na dijagonali BD određene su točke P i Q za koje vrijedi $|BP| = |QD|$. Dokažite da je KPLQ paralelogram.

Rješenje 007

Pokazat ćemo jednakost vektora $\vec{PL} = \vec{KQ}$ i $\vec{KP} = \vec{QL}$.



Dijagonale paralelograma ABCD raspolavljaju se u točki S. Budući da je $\vec{BP} = \vec{QD}$, slijedi da je $\vec{PS} = \vec{SQ}$. Analogno iz jednakosti $\vec{AK} = \vec{LC}$ slijedi da je $\vec{KS} = \vec{SL}$. Sa slike vidi se da vrijedi:

$$\vec{PL} = \vec{PS} + \vec{SL}, \quad (\text{pravilo trokuta})$$

$$\vec{KQ} = \vec{KS} + \vec{SQ}. \quad (\text{pravilo trokuta})$$

Dokažimo da je $\vec{PL} = \vec{KQ}$.

$$\vec{PL} = \vec{PS} + \vec{SL} = \vec{SL} + \vec{PS} = \left[\vec{SL} = \vec{KS} \ , \ \vec{PS} = \vec{SQ} \right] = \vec{KS} + \vec{SQ} = \vec{KQ}.$$

Slično se pokazuje da je $\vec{KP} = \vec{QL}$. Iz jednakosti $\vec{BP} = \vec{QD}$ slijedi da je $\vec{PS} = \vec{SQ}$. Sa slike vidi se da je:

$$\vec{KP} = \vec{KS} + \vec{SP}, \quad (\text{pravilo trokuta})$$

$$\vec{QL} = \vec{QS} + \vec{SL}. \quad (\text{pravilo trokuta})$$

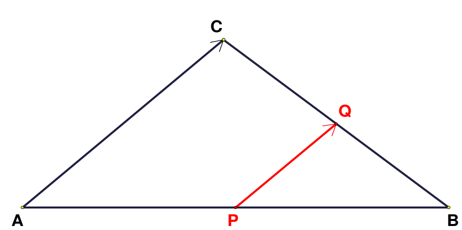
Dokažimo da je $\vec{KP} = \vec{QL}$.

$$\vec{KP} = \vec{KS} + \vec{SP} = \vec{SP} + \vec{KS} = \left[\vec{SP} = \vec{QS} \ , \ \vec{KS} = \vec{SL} \right] = \vec{QS} + \vec{SL} = \vec{QL}.$$

Vježba 007

Zadan je trokut ABC. Na stranici AB dano je polovište P, a na stranici BC polovište Q. Dokažite da je $\vec{PQ} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AC}$.

Rezultat:



Zadatak 008 (Seve, hotelijerska škola)

Izračunaj $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$, ako je $\left|\vec{a}\right|=5$, $\left|\vec{b}\right|=4$ i kut između $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je 120^0.

Rješenje 008

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\circ\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\circ\vec{a}+\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{b}\circ\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+2\cdot\vec{a}\circ\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2+2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 120^0+\left|\vec{b}\right|^2=5^2+2\cdot5\cdot4\cdot(-0.5)+4^2=25-20+16=21.$$

Vježba 008

Izračunaj $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$, ako je $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=7$ i kut između $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je 60^0.

Rezultat: 37.

Zadatak 009 (Seve, hotelijerska škola)

Ako je $\left|\vec{m}\right|=\left|\vec{n}\right|=1$, $\angle\left(\vec{m},\vec{n}\right)=120^0$, $\vec{a}=\vec{m}-\vec{n}$ i $\vec{b}=\vec{m}+2\cdot\vec{n}$, izračunaj $\vec{a}\circ\vec{b}$.

Rješenje 009

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\left(\vec{m}-\vec{n}\right)\circ\left(\vec{m}+2\cdot\vec{n}\right)=\vec{m}\circ\vec{m}+2\cdot\vec{m}\circ\vec{n}-\vec{m}\circ\vec{n}-2\cdot\vec{n}\circ\vec{n}=\left|\vec{m}\right|^2+\vec{m}\circ\vec{n}-2\cdot\left|\vec{n}\right|^2=$$

$$=\left|\vec{m}\right|^2+\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot\cos 120^0-2\cdot\left|\vec{n}\right|^2=1^2+1\cdot1\cdot(-0.5)-2\cdot1^2=1-0.5-2=-1.5.$$

Vježba 009

Ako je $\left|\vec{m}\right|=\left|\vec{n}\right|=2$, $\angle\left(\vec{m},\vec{n}\right)=120^0$, $\vec{a}=2\cdot\vec{m}+\vec{n}$ i $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$, izračunaj $\vec{a}\circ\vec{b}$.

Rezultat: 2.

Zadatak 010 (Leon, gimnazija)

Provjeri jesu li vektori $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$ linearno zavisni ili linearno nezavisni.

Rješenje 010

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ bit će linearno nezavisni ako iz $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\gamma\cdot\vec{c}=\vec{0}$ slijedi da je $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ bit će linearno zavisni ako iz $\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\gamma\cdot\vec{c}=\vec{0}$ slijedi da je bar jedan od koeficijenata α, β, γ različit od nule.

Ovdje je:

$$\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b}+\gamma\cdot\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow\alpha\cdot\left(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)+\beta\cdot\left(3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}\right)+\gamma\cdot\left(\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}\right)=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha\cdot\vec{i}-3\alpha\cdot\vec{j}+\alpha\cdot\vec{k}+3\beta\cdot\vec{i}-\beta\cdot\vec{j}+5\beta\cdot\vec{k}+\gamma\cdot\vec{i}-4\gamma\cdot\vec{j}+3\gamma\cdot\vec{k}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(2\alpha+3\beta+\gamma)\cdot\vec{i}+(-3\alpha-\beta-4\gamma)\cdot\vec{j}+(\alpha+5\beta+3\gamma)\vec{k}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(2\alpha+3\beta+\gamma)\cdot\vec{i}+(-3\alpha-\beta-4\gamma)\cdot\vec{j}+(\alpha+5\beta+3\gamma)\vec{k}=0\,\vec{i}+0\,\vec{j}+0\,\vec{k}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\text{Dva su vektora jednaka ako su im odgovarajuće komponente jednake}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\alpha+3\beta+\gamma=0 \\ -3\alpha-\beta-4\gamma=0 \\ \alpha+5\beta+3\gamma=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{iz prve jednadžbe izračunamo} \\ \gamma \text{ i uvrstimo u ostale dvije} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \gamma=-2\alpha-3\beta \\ -3\alpha-\beta-4\gamma=0 \\ \alpha+5\beta+3\gamma=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3\alpha-\beta-4\cdot(-2\alpha-3\beta)=0 \\ \alpha+5\beta+3\cdot(-2\alpha-3\beta)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3\alpha-\beta+8\alpha+12\beta=0 \\ \alpha+5\beta-6\alpha-9\beta=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5\alpha+11\beta=0 \\ -5\alpha-4\beta=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 7\beta=0 \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [5\alpha+11\beta=0] \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow [\gamma=-2\alpha-3\beta] \Rightarrow \gamma=0.$$

Dobili smo α = β = γ = 0, a to znači da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno nezavisni.

Vježba 010

Provjeri jesu li vektori $\vec{a}=6\,\vec{i}-2\,\vec{j}+10\,\vec{k}$, $\vec{b}=4\,\vec{i}-6\,\vec{j}+2\,\vec{k}$, $\vec{c}=2\,\vec{i}-8\,\vec{j}+6\,\vec{k}$ linearno zavisni ili linearno nezavisni.

Rezultat: Vektori su linearno nezavisni.

Zadatak 011 (Gimnazijalka, gimnazija)

Zadani su vektori $\vec{a}=-2\cdot\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}$. Odredi vektor $\vec{x}=A\cdot\vec{i}+B\cdot\vec{j}$ za kojega je $\vec{a}\circ\vec{x}=3$, $\vec{b}\circ\vec{x}=-5$.

Rješenje 011

Uporabom skalarnog produkta dobije se sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{a}\circ\vec{x}=3 \\ \vec{b}\circ\vec{x}=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \left(-2\cdot\vec{i}+\vec{j}\right)\circ\left(A\cdot\vec{i}+B\cdot\vec{j}\right)=3 \\ \left(3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}\right)\circ\left(A\cdot\vec{i}+B\cdot\vec{j}\right)=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2\cdot A+B=3\ /\cdot 2 \\ 3\cdot A-2\cdot B=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -4\cdot A+2\cdot B=6 \\ 3\cdot A-2\cdot B=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -A=1 \Rightarrow A=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2\cdot A+B=3 \\ A=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2\cdot(-1)+B=3 \Rightarrow 2+B=3 \Rightarrow B=1.$$

Vektor glasi: $\vec{x}=-\vec{i}+\vec{j}$.

Vježba 011

Zadani su vektori $\vec{a}=-2\cdot\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}$. Odredi vektor $\vec{x}=A\cdot\vec{i}+B\cdot\vec{j}$ za kojega je $\vec{a}\circ\vec{x}=4$, $\vec{b}\circ\vec{x}=-5$.

Rezultat: $-3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}$.

Zadatak 012 (Ivan, gimnazija)

Zadan je vektor $\vec{a}=-4\,\vec{i}+3\,\vec{j}$. Odredite vektor $\vec{x}$ tako da bude kolinearan s vektorom $\vec{a}$, da ima duljinu 15 i da s osi y zatvara tupi kut.

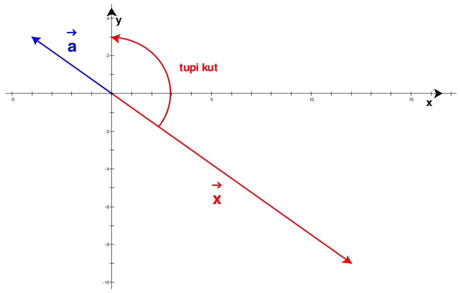
Rješenje 012

Budući da vektor $\vec{x}$ mora biti kolinearan s vektorom $\vec{a}$ i s osi y mora zatvarati tupi kut, vrijedi:

$$\vec{x}=k\cdot\vec{a}\quad,\quad k<0.$$

Pomoću duljine vektora $\vec{x}$ izračunamo k:

$$\left.\begin{array}{r} \left|\vec{x}\right|=15 \\ \vec{x}=k\cdot\vec{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\vec{x}\right|=\left|k\cdot\vec{a}\right| \Rightarrow \left|\vec{x}\right|=|k|\cdot\left|\vec{a}\right| \Rightarrow 15=|k|\cdot\sqrt{(-4)^2+3^2} \Rightarrow 15=|k|\cdot\sqrt{16+9} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 15 = |k| \cdot 5 \;/:5 \Rightarrow |k| = 3 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 3 \; (\text{nije rješenje zbog } k<0) \\ k_2 = -3 \; (\text{rješenje je}). \end{cases}$$

Vektor $\vec{x}$ glasi:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} = k \cdot \vec{a} \\ k = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{x} = -3 \cdot \left(-4\vec{i} + 3\vec{j} \right) = 12\vec{i} - 9\vec{j}.$$

Vježba 012

Zadan je vektor $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$. Odredite vektor $\vec{x}$ tako da bude kolinearan s vektorom $\vec{a}$, da ima duljinu 20 i da s osi y zatvara tupi kut.

Rezultat: $16\vec{i} - 12\vec{j}$.

Zadatak 013 (Ivan, gimnazija)

Izračunaj $\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} + \vec{c} \circ \vec{a}$ ako je $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 5, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

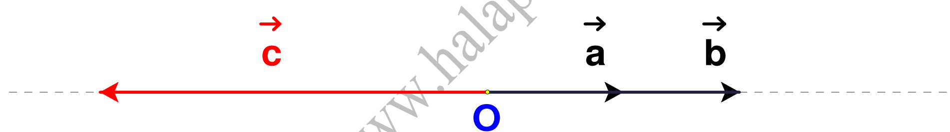
Rješenje 013

Zbroj vektora je nulvektor pa vrijedi:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}.$$

Za zbroj duljina vektora vrijedi:

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|.$$



To znači da su:

- vektori kolinearni
- kutovi 0º (između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$) odnosno 180º (između vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$ i između vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$).

Prema definiciji skalarnog produkta imamo:

$$\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} + \vec{c} \circ \vec{a} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 0^0 + 3 \cdot 5 \cdot \cos 180^0 + 5 \cdot 2 \cdot \cos 180^0 = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \cdot (-1) =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \cdot (-1) = 6 - 15 - 10 = -19$$

jer je cos 0º = 1, cos 180º = – 1.

Vježba 013

Izračunaj $\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} - \vec{c} \circ \vec{a}$ ako je $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 5, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 014 (Vedrana, gimnazija)

Koliki je skalarni produkt dva radijus vektora koje određuju točke A(3, 1) i B(– 2, 6)?

Rješenje 014

Ponovimo!

Ako je zadana točka A(x, y) pripadni radijus vektor glasi: $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.

Skalarni produkt radijus vektora $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ računa se po formuli:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r_1}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}\\ \vec{r_2}=x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{r_1}\circ\vec{r_2}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2.$$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l}A(x_1,y_1)=A(3,1)\\ B(x_2,y_2)=B(-2,6)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{r_1}=3\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}\\ \vec{r_2}=-2\cdot\vec{i}+6\cdot\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{r_1}\circ\vec{r_2}=3\cdot(-2)+1\cdot 6=-6+6=0.$$

Vježba 014

Koliki je skalarni produkt dva radijus vektora koje određuju točke A(5, 3) i B(– 3, 5)?

Rezultat: 0.

Zadatak 015 (Vedrana, gimnazija)

Zadani su vektori $\vec{a}=4\cdot\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=-\vec{i}+2\cdot\vec{j}$. Koliki je iznos vektora $\vec{c}$, ako je $\vec{c}=\vec{a}+2\cdot\vec{b}$?

Rješenje 015

$$\vec{c}=\vec{a}+2\cdot\vec{b}=4\cdot\vec{i}+\vec{j}+2\cdot\left(-\vec{i}+2\cdot\vec{j}\right)=4\cdot\vec{i}+\vec{j}-2\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}=2\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}.$$

Iznos vektora $\vec{c}$ je:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{c}=c_x\cdot\vec{i}+c_y\cdot\vec{j}\\ \vec{c}=2\cdot\vec{i}+5\cdot\vec{j}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\left|\vec{c}\right|=\sqrt{c_x^2+c_y^2}\\ \left|\vec{c}\right|=\sqrt{2^2+5^2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\vec{c}\right|=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}.$$

Vježba 015

Zadani su vektori $\vec{a}=10\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}$, $\vec{b}=-\vec{i}+2\cdot\vec{j}$. Koliki je iznos vektora $\vec{c}$, ako je $\vec{c}=\vec{a}+2\cdot\vec{b}$?

Rezultat: 10.

Zadatak 016 (Vedrana, gimnazija)

Zadani su vektori $\vec{a}=3\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}$, $\vec{b}=4\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}$. Dokaži da su međusobno okomiti.

Rješenje 016

Dva su vektora međusobno okomita ako je njihov skalarni produkt jednak nuli, tj. ako vrijedi

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}\\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}\\ \vec{a}\perp\vec{b}\end{array}\right\}\Rightarrow a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=0.$$

Dokažimo tvrdnju!

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}\ ,\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}\\ \vec{a}\circ\vec{b}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}\right)\circ\left(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_x \cdot b_x \cdot \vec{i}^{\,2} + \underbrace{a_x \cdot b_y \cdot \vec{i} \circ \vec{j}}_{0} + \underbrace{a_y \cdot b_x \cdot \vec{j} \circ \vec{i}}_{0} + a_y \cdot b_y \cdot \vec{j}^{\,2} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = 1 \\ \vec{i} \circ \vec{j} = \vec{j} \circ \vec{i} = 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0.$$

Za vektore $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$ i $\vec{b} = 4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$ vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = 3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} \\ \vec{b} = 4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 12 - 12 = 0.$$

Vježba 016

Zadani su vektori $\vec{a} = 8 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$, $\vec{b} = 3 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j}$. Dokaži da su međusobno okomiti.

Rezultat: Točno je.

Zadatak 017 (Vedrana, gimnazija)

Pri translaciji za vektor $\vec{a}$ parabola $y = x^2$ preslika se u parabolu $y = x^2 - 2 \cdot x - 3$.

Nađite vektor $\vec{a}$.

Rješenje 017

Odredimo koordinate tjemena translatirane parabole:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2 \cdot x - 3 \\ a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{b}{2 \cdot a} \\ y_0 = \dfrac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} \\ y_0 = \dfrac{4 \cdot 1 \cdot (-3) - (-2)^2}{4 \cdot 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = \dfrac{-12 - 4}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow T(1, -4).$$

Zadana parabola translatirana je za vektor $\vec{a} = \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}$.

Vježba 017

Pri translaciji za vektor $\vec{a}$ parabola $y = x^2$ preslika se u parabolu $y = x^2 - 4 \cdot x - 6$.

Nađite vektor $\vec{a}$.

Rezultat: Zadana parabola translatirana je za vektor $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - 10 \cdot \vec{j}$.

Zadatak 018 (Vedrana, gimnazija)

Pri translaciji za vektor $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}$ parabola $y = x^2$ preslika se u parabolu $y = x^2 + b \cdot x + c$. Koja je to parabola?

Rješenje 018

Zadani vektor ima vrh (kraj) u točki T3, – 4) koja je istodobno tjeme translatirane parabole. Vodeći koeficijent parabole je a = 1. Uvrstimo koordinate tjemena u jednadžbu parabole:

$$\left.\begin{array}{l} T(3, -4) \\ y = x^2 + b \cdot x + c \end{array}\right\} \Rightarrow 3^2 + b \cdot 3 + c = -4 \Rightarrow 9 + 3 \cdot b + c = -4 \Rightarrow 3 \cdot b + c = -13.$$

Iz apscise tjemena odredimo linearni koeficijent b:

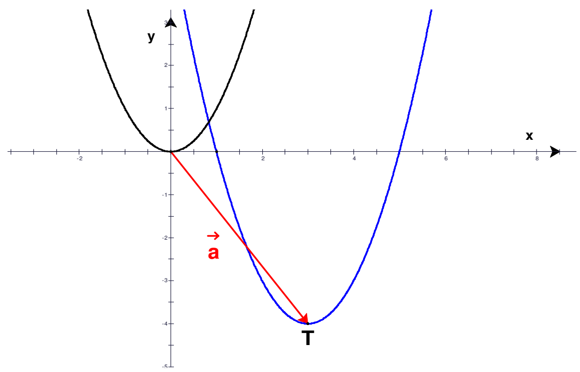
$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{b}{2 \cdot a} \\ x_0 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{b}{2 \cdot 1} = 3 \;/\cdot(-2) \Rightarrow b = -6.$$

Slobodni koeficijent c ima vrijednost:

$$\left.\begin{array}{l} b = -6 \\ 3 \cdot b + c = -13 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot (-6) + c = -13 \Rightarrow -18 + c = -13 \Rightarrow c = 5.$$

Jednadžba parabole glasi:

$$y = x^2 - 6 \cdot x + 5.$$



Vježba 018

Pri translaciji za vektor $\vec{a} = 6 \cdot \vec{i} - 8 \cdot \vec{j}$ parabola $y = x^2$ preslika se u parabolu $y = x^2 + b \cdot x + c$. Koja je to parabola?

Rezultat: $y = x^2 - 6 \cdot x + 5.$

Zadatak 019 (Ante, tehnička škola)

Ako je $\left| k \cdot \vec{a} \right| = \left| \vec{a} \right|$, $k \in R$, koliko je k?

Rješenje 019

$$\left| k \cdot \vec{a} \right| = \left| \vec{a} \right| \Rightarrow \left| k \right| \cdot \left| \vec{a} \right| = \left| \vec{a} \right| \;/:\left| \vec{a} \right| \Rightarrow \left| k \right| = 1 \Rightarrow k = \pm 1.$$

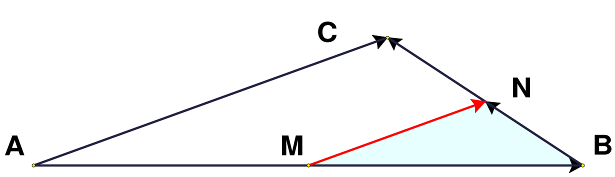
Vježba 019

Ako je $\left| k \cdot \vec{a} \right| = \left| 5 \cdot \vec{a} \right|$, $k \in R$, koliko je k?

Rezultat: $k = \pm 5.$

Zadatak 020 (Ante, tehnička škola)

Zadan je trokut ABC i točke M i N koje polove stranice AB i BC. Dokažite jednakost: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$



Rješenje 020

Prema slici slijedi:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \right) = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Vježba 020

Zadan je trokut ABC i točke M i N koje polove stranice AB i AC. Dokažite jednakost: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$

Rezultat: Dokaz sličan.