Zadatak 021 (4A, hotelijerska škola)

Zapiši binarni broj $1101010011101_{(2)}$ u heksadekadskom sustavu.

Rješenje 021

Binarni sustav, sustav s bazom 2, za zapisivanje brojeva koristi znamenke 0 i 1.
Heksadekadski sustav, sustav s bazom 16, za zapisivanje brojeva koristi znamenke
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
ali i slova A, B, C, D, E, F pri čemu je
$A_{(16)} = 10$, $B_{(16)} = 11$, $C_{(16)} = 12$, $D_{(16)} = 13$, $E_{(16)} = 14$ i $F_{(16)} = 15$.

Binarni prikaz brojeva koje koristimo za zapis broja u heksadekadskom sustavu dan je u tablici.

Heksadekadski prikaz broja	Binarni prikaz broja
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A (= 10)	1010
B (= 11)	1011
C (= 12)	1100
D (= 13)	1101
E (= 14)	1110
F (= 15)	1111

Da bismo binarni broj preveli u heksadekadski "razdijelit" ćemo binarni broj u skupine od četiri znamenke počevši s desna, i svakoj skupini pridružiti odgovarajuću heksadekadsku znamenku.

Tada je:

$$1101010011101_{(2)} = \underbrace{0001}_{1}\underbrace{1010}_{A}\underbrace{1001}_{9}\underbrace{1101}_{D}{}_{(2)} = 1A9D_{(16)}.$$

Vježba 021

Zapiši binarni broj $1100001011010101_{(2)}$ u heksadekadskom sustavu.

Rezultat: $C2D5_{(16)}$.

Zadatak 022 (4A, hotelijerska škola)

Prikaži u dekadskoj bazi broj $A10E9_{(16)}$.

Rješenje 022

Heksadekadski sustav, sustav s bazom 16, za zapisivanje brojeva koristi znamenke
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
ali i slova A, B, C, D, E, F pri čemu je
$A_{(16)} = 10$, $B_{(16)} = 11$, $C_{(16)} = 12$, $D_{(16)} = 13$, $E_{(16)} = 14$ i $F_{(16)} = 15$.

1.inačica

U sustavu s bazom b prirodni broj N zapisujemo kao

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_{0\,(b)}$$

pri čemu brojevi a_i , $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ mogu poprimiti vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, \ldots, b - 1\}$.

Vrijednost prirodnog broja N zapisanog u sustavu s bazom b je

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_{0\,(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0.$$

Zato računamo ovako:

$$N = A10E9_{(16)} = \overset{4}{A}\,\overset{3}{1}\,\overset{2}{0}\,\overset{1}{E}\,\overset{0}{9}{}_{(16)} = A \cdot 16^4 + 1 \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 + E \cdot 16^1 + 9 =$$

$$= 10 \cdot 16^4 + 1 \cdot 16^3 + 14 \cdot 16^1 + 9 = 655360 + 4096 + 224 + 9 = 659689.$$

2.inačica

Cijeli postupak računanja ispišimo u obliku tablice:

	A(= 10)	1	0	E(= 14)	9
16	10	161	2576	41230	659689

Svaki se broj u drugom redu dobije tako da se prethodni pomnoži s b = 16 i doda mu se broj iz prvog retka iznad njega. Ispišimo cijeli postupak korak po korak.

	A(= 10)	1	0	E(= 14)	9	U prvom retku napisane su znamenke broja, a u drugom, vrijednost baze b = 16.
16						
	A(= 10)	1	0	E(= 14)	9	Prepišimo vrijednost prve znamenke.
16	10					
	A(= 10)	1	0	E(= 14)	9	Pomnožimo vrijednost baze b = 16 s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: $16 \cdot 10 + 1 = 161$.
16	10	161				
	A(= 10)	1	0	E(= 14)	9	Pomnožimo vrijednost baze b = 16 s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: $16 \cdot 161 + 0 = 2576$.
16	10	161	2576			
	A(= 10)	1	0	E(= 14)	9	Pomnožimo vrijednost baze b = 16 s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: $16 \cdot 2576 + 14 = 41230$.
16	10	161	2576	41230		
	A(= 10)	1	0	E(= 14)	9	Pomnožimo vrijednost baze b = 16 s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: $16 \cdot 41230 + 9 =$ **659689**.
16	10	161	2576	41230	**659689**	

www.halapa.com

Dobili smo konačnu tablicu, N = 659689. Ovaj se način računanja naziva **HORNEROV** algoritam.

Vježba 022

Prikaži u dekadskoj bazi broj $DEDA_{(16)}$.

Rezultat: 57050.

Zadatak 023 (4A, hotelijerska škola)

Zapiši broj 253 u heksadekadskom sustavu.

Rješenje 023

1.inačica

Heksadekadski sustav, sustav s bazom 16, za zapisivanje brojeva koristi znamenke
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
ali i slova A, B, C, D, E, F pri čemu je
$A_{(16)} = 10$, $B_{(16)} = 11$, $C_{(16)} = 12$, $D_{(16)} = 13$, $E_{(16)} = 14$ i $F_{(16)} = 15$.

Broj 253 dijelimo bazom b = 16 i dobijemo količnik 15 i **ostatak 13 (= D)**.

Broj 15 dijelimo bazom b = 16 i dobijemo količnik 0 i **ostatak 15 (= F)**.

Postupak prekidamo jer smo dobili količnik 0. Dakle, postupak se prekida kad količnik postane nula.

Cijeli postupak možemo prikazati tablično:

253 : 16 = 15 **13(= D)**
15 : 16 = 0 **15(= F)**

Ostatke pri dijeljenju zapisujemo odozdo prema gore (u obratnom poretku). Dobili smo traženi rezultat: $253 = FD_{(16)}$.

2.inačica

Cijeli postupak zapisujemo u obliku tablice kojoj su u prvom retku zapisani količnik pri dijeljenju s bazom b = 16, a u drugom ostatci.

253	15	0	kvocijent
13(= D)	**15(= F)**		ostatak

Ostatak pri dijeljenju s bazom b = 16 zapisujemo direktno ispod broja, a količnik desno od njega. Znamenke broja (rezultata) čitamo zdesna na lijevo (u obratnom poretku): $253 = FD_{(16)}$.

Vježba 023

Zapiši broj 255 u heksadekadskom sustavu.

Rezultat: $FF_{(16)}$.

Zadatak 024 (Ena, gimnazija)

Koliko ima različitih peteroznamenkastih brojeva u sustavu baze 5?

Rješenje 024

U sustavu s bazom 5 postoji pet različitih znamenaka. Za njihov zapis koristimo prvih pet znamenaka dekadskog sustava. 0, 1, 2, 3, 4.

Najmanji peteroznamenkasti broj u sustavu baze 5 je $10000_{(5)}$. Koji je to broj u dekadskom sustavu? Računamo ovako:

$$10000_{(5)} = \overset{4}{1}\overset{3}{0}\overset{2}{0}\overset{1}{0}\overset{0}{0}(5) = 1\cdot 5^4 + 0\cdot 5^3 + 0\cdot 5^2 + 0\cdot 5^1 + 0\cdot 5^0 = 5^4 = 625.$$

Najveći peteroznamenkasti broj u sustavu baze 5 je $44444_{(5)}$. Koji je to broj u dekadskom sustavu? Računamo ovako:

$$44444_{(5)} = \overset{4}{4}\overset{3}{4}\overset{2}{4}\overset{1}{4}\overset{0}{4}(5) = 4\cdot 5^4 + 4\cdot 5^3 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5^1 + 4\cdot 5^0 =$$

$$= 4\cdot 625 + 4\cdot 125 + 4\cdot 25 + 4\cdot 5 + 4\cdot 1 = 2500 + 500 + 100 + 20 + 4 = 3124.$$

Koliko ima dekadskih brojeva od 625 do 3124? Uporabit ćemo formulu za opći član aritmetičkog niza (slijeda):

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d.$$

Promatrajmo niz prirodnih brojeva:

625, 626, 627, 628, ... , 3124.

Tada je:

$a_1 = 625, \quad d = 1, \quad a_n = 3124$

Odredimo broj n:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \;\Rightarrow\; 3124 = 625 + (n-1)\cdot 1 \;\Rightarrow\; 3124 - 625 = n - 1 \;\Rightarrow\; n = 3124 - 625 + 1 = 2500.$$

Vježba 024

Koliko ima različitih troznamenkastih brojeva u sustavu baze 5?

Rezultat: 100.

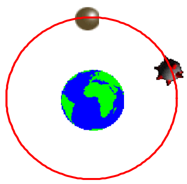
www.halapa.com

Zadatak 025 (Lana, Natalija, hotelijerska škola)

Dva satelita kruže oko Zemlje. Prvi obiđe Zemlju za 4 h, a drugi za 6 h. Ako su krenuli istodobno za koje će se vrijeme oba opet naći u početnoj točki?

Rješenje 025

Potrebno je naći najmanji zajednički višekratnik brojeva 4 i 6.



$$\begin{array}{ccc|c} 4 & , & 6 & 2 \\ 2 & , & 3 & 2 \\ 1 & , & 3 & 3 \\ 1 & , & 1 & \end{array}$$

$$v(4, 6) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Oba satelita će se ponovno naći u početnoj točki za 12 h.

Vježba 025

Dva satelita kruže oko Zemlje. Prvi obiđe Zemlju za 6 h, a drugi za 8 h. Ako su krenuli istodobno za koje će se vrijeme oba opet naći u početnoj točki?

Rezultat: 24 h.

Zadatak 026 (Natalija, Lana, hotelijerska škola)

Nađite dva prirodna broja kojima je zbroj 20, a najveća zajednička mjera 5.

Rješenje 026

Najveća zajednička mjera (najveći zajednički djelitelj) prirodnih brojeva a, b, ... je najveći broj koji dijeli sve te brojeve. Oznaka je M(a, b, ...).

Označimo tražene brojeve slovima x i y. Tada je:

$$x + y = 20 \quad , \quad M(x, y) = 5.$$

Budući da je zbroj brojeva jednak 20, svaki od njih mora biti manji od 20:

$$x + y = 20 \quad \Rightarrow \quad x, y < 20.$$

www.halapa.com

1 + 19 = 20	5 + 15 = 20	9 + 11 = 20	13 + 7 = 20	17 + 3 = 20
2 + 18 = 20	6 + 14 = 20	10 + 10 = 20	14 + 6 = 20	18 + 2 = 20
3 + 17 = 20	7 + 13 = 20	11 + 9 = 20	15 + 5 = 20	19 + 1 = 20
4 + 16 = 20	8 + 12 = 20	12 + 8 = 20	16 + 4 = 20	

Zaključak: dva prirodna broja koji su manji od 20, a imaju najveću zajedničku mjeru 5 jesu brojevi 5 i 15.

Vježba 026

Nađite dva prirodna broja kojima je zbroj 18, a najveća zajednička mjera 3.

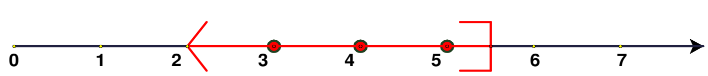
Rezultat: 3 i 15.

Zadatak 027 (1A, hotelijerska škola)

Koliko je prirodnih brojeva u intervalu $\left\langle 2, \frac{11}{2} \right]$?

Rješenje 027

Interval $\left\langle 2, \frac{11}{2} \right]$ je skup svih realnih brojeva koji su veći od 2, a manji ili jednaki od $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$. U tom skupu brojeva prirodni brojevi su 3, 4 i 5. Dakle, u intervalu $\left\langle 2, \frac{11}{2} \right]$ postoje tri prirodna broja.



Vježba 027

Koliko je prirodnih brojeva u intervalu $\langle 1,\ 8 \rangle$?

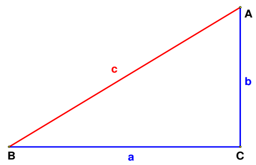
Rezultat: 7 brojeva.

Zadatak 028 (Frendice, ekonomska škola)

Konstruiraj iracionalni broj $\sqrt{17}$.

Rješenje 028

Ponovimo Pitagorin poučak:



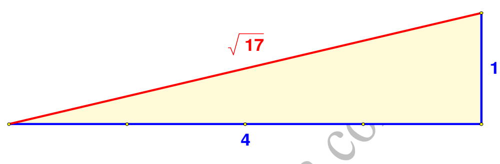
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Pokušajmo broj 17 napisati kao zbroj kvadrata dva prirodna broja:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{4^2 + 1^2}.$$

Dobiveni brojevi 4 i 1 su duljine kateta pravokutnog trokuta.



Vježba 028

Konstruiraj iracionalni broj $\sqrt{5}$.

Rezultat: $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{2^2 + 1^2}.$

www.halapa.com

Zadatak 029 (1A, hotelijerska škola)

Izračunaj: 25% od 3 + 4.2 : 0.1.

Rješenje 029

Postotak je razlomak s nazivnikom 100:

$$25\% = \frac{25}{100}.$$

Računamo:

$$25\%\ \text{od}\ 3 + 4.2 : 0.1 = \left[4.2 : 0.1 = 42 : 1 = 42 = \frac{42}{1}\right] = \frac{25}{100} \cdot 3 + \frac{42}{1} = \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{42}{1} = \frac{3}{4} + \frac{42}{1} = \frac{3+168}{4} = \frac{171}{4} = 42\frac{3}{4}.$$

Vježba 029

Izračunaj: 25% od 4 + 2.5 : 0.1.

Rezultat: 26.

Zadatak 030 (Sanela, ekonomska škola)

Dokažite matematičkom indukcijom $3 \mid 5^n + 2^{n+1}$, za sve prirodne brojeve n.

Rješenje 030

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika $n + 1$.

U zadatku treba dokazati da je broj 3 djelitelj zadanog izraza $5^n + 2^{n+1}$. Označimo zadani izraz (zbog lakoće pisanja) s $f(n) = 5^n + 2^{n+1}$.

Zapamti!
Broj a je djeljiv brojem b, ako i samo ako postoji broj c tako da vrijedi a = c · b. Ili, ovako, broj a je djeljiv brojem b, ako sadrži u sebi faktor b.

baza indukcije, n = 1

$$f(1) = 5^1 + 2^{1+1} = 5 + 2^2 = 5 + 4 = 9 = \mathbf{3} \cdot 3.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije
n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da je zadani izraz djeljiv brojem 9. Tada pišemo:

$$f(n) = 5^n + 2^{n+1} = 3 \cdot K. \text{ (to se zove induktivna pretpostavka)}$$

Broj K je neki prirodni broj, ali bitno je da imamo faktor 3.

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$f(n+1) = 5^{n+1} + 2^{n+1+1} = 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n+1} =$$

$$= 3 \cdot 5^n + 2 \cdot \underbrace{\left[5^n + 2^{n+1}\right]}_{f(n) \,-\, \text{induktivna pretpostavka}} = 3 \cdot 5^n + 2 \cdot f(n) = 3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3 \cdot K = 3 \cdot \left[5^n + 2 \cdot K\right].$$

Dobili smo na kraju faktor 3 i time je tvrdnja dokazana.

Vježba 030

Dokažite matematičkom indukcijom $5 \mid 5^n + 10$, za sve prirodne brojeve.

Rezultat: Tvrdnja je točna.

www.halapa.com

Zadatak 031 (Sanela, ekonomska škola)

Dokažite matematičkom indukcijom $57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$, za sve prirodne brojeve n.

Rješenje 031

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

U zadatku treba dokazati da je broj 57 djelitelj zadanog izraza $7^{n+2} + 8^{2n+1}$. Označimo zadani izraz (zbog lakoće pisanja) s $f(n) = 7^{n+2} + 8^{2n+1}$.

Zapamti!
Broj a je djeljiv brojem b, ako i samo ako postoji broj c tako da vrijedi a = c · b. Ili, ovako, broj a je djeljiv brojem b, ako sadrži u sebi faktor b.

baza indukcije, n = 1

$$f(1) = 7^{1+2} + 8^{2 \cdot 1 + 1} = 7^3 + 8^3 = 343 + 512 = 855 = 57 \cdot 15.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije
n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da je zadani izraz djeljiv brojem 57. Tada pišemo:

$$f(n) = 7^{n+2} + 8^{2n+1} = 57 \cdot K. \text{ (to se zove induktivna pretpostavka)}$$

Broj K je neki prirodni broj, ali bitno je da imamo faktor 57.

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$f(n+1) = 7^{n+1+2} + 2^{2\cdot(n+1)+1} = 7^{n+2+1} + 2^{2n+1+2} = 7\cdot 7^{n+2} + 8^2\cdot 8^{2n+1} = 7\cdot 7^{n+2} + 64\cdot 8^{2n+1} =$$

$$= 7\cdot 7^{n+2} + 7\cdot 8^{2n+1} + 57\cdot 8^{2n+1} = 7\cdot\underbrace{\left[7^{n+2}+8^{2n+1}\right]}_{f(n)\text{ – induktivna pretpostavka}} + 57\cdot 8^{2n+1} = 7\cdot f(n) + 57\cdot 8^{2n+1} = 7\cdot 57\cdot K + 57\cdot 8^{2n+1} =$$

$$= 57\cdot\left[7\cdot K + 8^{2n+1}\right].$$

Dobili smo na kraju faktor 57 i time je tvrdnja dokazana.

Vježba 031

Dokažite matematičkom indukcijom $7 \mid 7^n + 14$, za sve prirodne brojeve.

Rezultat: Tvrdnja je točna.

Zadatak 032 (Sanela, ekonomska škola)

Dokažite matematičkom indukcijom formulu:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1).$$

Rješenje 032

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije, n = 1

$$1^2 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1),$$

$$1 = \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3,$$

$$1 = 1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1) \text{ – induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2\right)}_{\text{induktivna pretpostavka}} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1) + 6\cdot(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\cdot\left[n\cdot(2n+1) + 6\cdot(n+1)\right]}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot\left[2n^2 + n + 6n + 6\right]}{6} = \frac{(n+1)\cdot\left[2n^2 + 4n + 3n + 6\right]}{6} = \frac{(n+1)\cdot\left[2n\cdot(n+2) + 3\cdot(n+2)\right]}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}\cdot(n+1)\cdot\left[(n+1)+1\right]\cdot\left[2\cdot(n+1)+1\right].$$

www.halapa.com

Vježba 032

Dokažite matematičkom indukcijom formulu: $1+2+3+4+\ \dots\ +n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$

Rezultat: Tvrdnja je točna.

Zadatak 033 (Sanela, ekonomska škola)

Dokažite matematičkom indukcijom formulu:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ \dots\ +\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Rješenje 033

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije, n = 1

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1},$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ \dots\ +\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}\quad -\ \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ \dots\ +\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ \dots\ +\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)}_{\text{induktivna pretpostavka}}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=$$

$$=\frac{n\cdot(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+1}{(n+1)+1}.$$

Vježba 033

Dokažite matematičkom indukcijom formulu: $1+3+5+7+\ \dots\ +(2n-1)=n^2.$

Rezultat: Tvrdnja je točna.

Zadatak 034 (Sanela, ekonomska škola)

Dokažite metodom matematičke indukcije formulu za zbroj unutarnjih kutova mnogokuta

$$K(n) = (n-2)\cdot 180^{\circ}.$$

Rješenje 034

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije.

U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet).

www.halapa.com

U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije, n = 3

Najjednostavniji mnogokut (poligon, n – terokut) je trokut koji ima tri stranice.

$$K(3) = (3 - 2) \cdot 180^{\circ} = 180^{\circ}.$$

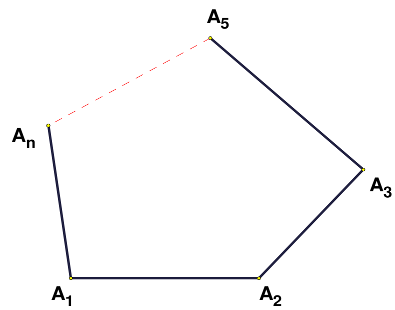
Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je formula točna za mnogokut koji ima n stranica (n – terokut $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_n$).

$$K(n) = (n - 2) \cdot 180^{\circ}. \text{ – induktivna pretpostavka}$$

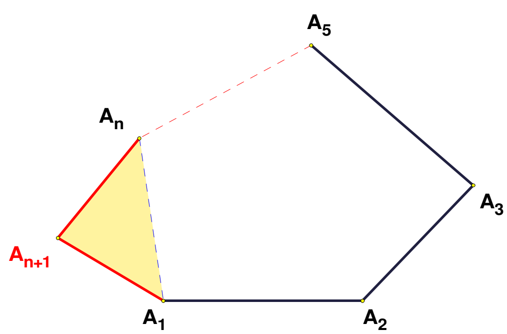


n + 1

Dokažimo da formula vrijedi i za mnogokut koji ima n + 1 stranicu ((n + 1) – terokut $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_nA_{n+1}$). Izvan stranice A_1A_n odaberemo po volji točku A_{n+1} i spojimo je s vrhovima A_1 i A_n. Umjesto stranice A_1A_n imamo dvije stranice: A_nA_{n+1} i $A_{n+1}A_1$. Dakle, dobili smo (n + 1) – terokut $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_nA_{n+1}$. Uočimo trokut $A_1A_nA_{n+1}$. Zbroj njegovih unutarnjih kutova je 180º.
Tada je zbroj kutova (n + 1) – terokuta jednak:

$$K(n+1) = \underbrace{K(n)}_{\text{induktivna pretpostavka}} + 180^{0} = (n-2) \cdot 180^{0} + 180^{0} = (n-2+1) \cdot 180^{0} = (n-1) \cdot 180^{0}.$$

www.halapa.com



Vježba 034

Dokažite metodom matematičke indukcije formulu za zbroj unutarnjih kutova (n + 2) – terokuta

$$K(n + 2) = n \cdot 180^{\circ}.$$

Rezultat: Tvrdnja je točna.

Zadatak 035 (1A, hotelijerska škola)

Izračunajte 25% od 4.8 : 0.1.

Rješenje 035

1.inačica

Postotak je razlomak s nazivnikom 100. Zato je:

$$\frac{25}{100}\cdot 4.8:0.1=\left[\text{kratimo razlomak s } 25\right]=\frac{1}{4}\cdot 4.8:0.1=\frac{1}{\underbrace{4}_{1}}\cdot\frac{\overbrace{48}^{12}}{10}:\frac{1}{10}=\frac{12}{10}\cdot\frac{10}{1}=12.$$

2.inačica

$$\frac{25}{100}\cdot 4.8:0.1=\left[\text{kratimo razlomak s } 25\right]=\frac{1}{4}\cdot 4.8:0.1=\left[\text{podijelimo decimalne brojeve}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 4.\underline{8}:0.\underline{1}=\frac{1}{4}\cdot 48:1=\frac{1}{4}\cdot 48=12.$$

Vježba 035

Izračunajte 50% od 4.8 : 0.1.

Rezultat: 24.

Zadatak 036 (1A, hotelijerska škola)

Izračunajte 25% od 10%.

Rješenje 036

Postotak je razlomak s nazivnikom 100. Računamo:

$$\frac{25}{100}\cdot\frac{10}{100}=\left[\text{kratimo s } 10\right]=\frac{25}{100}\cdot\frac{\overbrace{10}^{1}}{\underbrace{100}_{10}}=\frac{25}{1000}=0.025.$$

Vježba 036

Izračunajte 20% od 10%.

Rezultat: 0.02.

www.halapa.com

Zadatak 037 (1A, hotelijerska škola)

Za koje prirodne brojeve n je razlomak $\frac{12}{n+1}$ prirodan broj?

Rješenje 037

Zapamti!

Broj a je djeljiv brojem b, ako i samo ako postoji broj c tako da vrijedi a = c · b. Ili, ovako, broj a je djeljiv brojem b, ako sadrži u sebi faktor b.

Broj n + 1 je djelitelj broja 12. Djelitelji broja 12 su: 1, 2, 3, 4, 6 i 12. Znači da je:

$$\left.\begin{array}{l} n+1=1\\ n+1=2\\ n+1=3\\ n+1=4\\ n+1=6\\ n+1=12 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} n=1-1\\ n=2-1\\ n=3-1\\ n=4-1\\ n=6-1\\ n=12-1 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} n=0\\ n=1\\ n=2\\ n=3\\ n=5\\ n=11 \end{array}\right\}.$$

Prirodni brojevi su: 1, 2, 3, 5, 11.

Vježba 037

Za koje prirodne brojeve n je razlomak $\frac{15}{n+1}$ prirodan broj?

Rezultat: Prirodni brojevi su: 2, 4, 14.

Zadatak 038 (Ivana, hotelijerska škola)

Operacija * definirana je na skupu svih racionalnih brojeva formulom

$$x*y=x+\left(y+\frac{1}{2}\right).$$

Ta operacija je:

A. nekomutativna i neasocijativna B. komutativna, ali ne asocijativna
C. asocijativna, ali ne komutativna D. komutativna i asocijativna E. nedefinirana za neke $x, y \in Q$

Rješenje 038

Provjerimo komutativnost:

$$x * y \overset{?}{=} y * x.$$

Računamo:

$$x * y = x + \left(y + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{za zbrajanje racionalnih brojeva} \\ \text{vrijede zakoni komutacije i asocijacije}\end{array}\right] \Rightarrow x * y = x + \left(y + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (x + y) + \frac{1}{2} = (y + x) + \frac{1}{2} = y + \left(x + \frac{1}{2}\right) = y * x.$$

Operacija * je komutativna.

Provjerimo asocijativnost:

$$(x * y) * z \overset{?}{=} x * (y * z).$$

Računamo lijevu stranu:

$$(x * y) * z = \left(x + \left(y + \frac{1}{2}\right)\right) * z = \left(x + y + \frac{1}{2}\right) * z = \left(x + y + \frac{1}{2}\right) + \left(z + \frac{1}{2}\right) = x + y + \frac{1}{2} + z + \frac{1}{2} = x + y + z + 1. \quad (1)$$

Računamo desnu stranu:

$$x * (y * z) = x * \left(y + \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) = x * \left(y + z + \frac{1}{2}\right) = x + \left(y + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = x + y + z + 1. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi operacija * je asocijativna. Odgovor je pod D.

www.halapa.com

Vježba 038

Operacija * definirana je na skupu svih racionalnih brojeva formulom

$$x * y = x + (y + 1).$$

Ta operacija je:

A. nekomutativna i neasocijativna B. komutativna, ali ne asocijativna
C. asocijativna, ali ne komutativna D. komutativna i asocijativna E. nedefinirana za neke $x, y \in Q$

Rezultat: Odgovor D.

Zadatak 039 (Daria, ekonomska škola)

Dokažite da je $\sqrt{5}$ iracionalan broj.

Rješenje 039

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{5} \in Q$. Tada možemo pisati $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$ i pretpostaviti da je razlomak $\frac{m}{n}$ skraćen do kraja (ako nije skratimo ga), tj. da prirodni brojevi m i n nemaju zajedničkih faktora osim broja 1, M(m, n) = 1. Kvadriranjem i sređivanjem slijedi:

$$\sqrt{5} = \frac{m}{n} \; /^2 \Rightarrow m^2 = 5 \cdot n^2.$$

Na desnoj strani nalazi se faktor 5 pa i broj na lijevoj strani mora biti djeljiv s 5. Zato vrijedi:

$$m = 5 \cdot k, \text{ za svako } k \in N.$$

Uvrstimo li to gore i skratimo, dobije se:

$$(5 \cdot k)^2 = 5 \cdot n^2 \Rightarrow 25 \cdot k^2 = 5 \cdot n^2 \; /:5 \Rightarrow n^2 = 5 \cdot k^2$$

pa ponovno slijedi $n = 5 \cdot l$, za svako $l \in N$. Stoga m i n imaju zajednički faktor 5,

$$\begin{bmatrix} m = 5 \cdot k \ , \ k \in N \\ n = 5 \cdot l \ , \ l \in N \end{bmatrix},$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom da je razlomak $\frac{m}{n}$ do kraja skraćen. Zaključak: $\sqrt{5} \notin Q,$ dakle, to je iracionalan broj.

Vježba 039

Dokažite da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj.

Rezultat: Dokaz je analogan (sličan).

Zadatak 040 (Daria, ekonomska škola)

Dokažite ovu tvrdnju: kvadrat neparnog prirodnog broja pri dijeljenju s 8 daje ostatak 1.

Rješenje 040

Neka je n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, 3, ... neparan prirodan broj. Slijedi:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4 \cdot k \cdot (k+1) + 1.$$

Budući da je umnožak k · (k + 1) djeljiv brojem 2 (to su dva uzastopna prirodna broja), tada je umnožak 4 · k · (k + 1) djeljiv brojem 8 pa iz ove formule neposredno slijedi tvrdnja.

Vježba 040

Dokažite ovu tvrdnju: zbroj kvadrata dva uzastopna prirodna broja pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1.

Rezultat: $n^2 + (n+1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1 = 2 \cdot n \cdot (n+1) + 1.$

www.halapa.com