Zadatak 061 (Ivana, gimnazija)

Dana su tri prosta broja a, b, c u poretku a > b > c. Ako je a + b + c = 78 i a – b – c = 40, koliki je umnožak a · b · c?

Rješenje 061

Prost broj (prim broj) je prirodan broj veći od jedan, koji je djeljiv jedino brojem 1 i samim sobom.

Iz sustava jednadžbi dobije se broj a:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=78 \\ a-b-c=40 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow 2a=118 \ /:2 \Rightarrow a=59 \ (\text{prost broj}).$$

Sada je:

$$b+c=78-a \Rightarrow b+c=78-59=19,$$

od kuda se dobije b = 17 (prost broj) i c = 2 (prost broj).

Umnožak brojeva iznosi:

$$a \cdot b \cdot c = 59 \cdot 17 \cdot 2 = 2006.$$

Vježba 061

Dana su tri prosta broja a, b, c u poretku a > b > c. Ako je a + b + c = 78 i a – b – c = 40, koliko iznosi a – b · c?

Rezultat: 25.

Zadatak 062 (Ivana, gimnazija)

Koliko nula ima umnožak prvih 2006 prostih brojeva?

Rješenje 062

Prost broj (prim broj) je prirodan broj veći od jedan, koji je djeljiv jedino brojem 1 i samim sobom.

Od prostih brojeva jedino je:

- broj 2 paran broj
- broj 5 djeljiv s pet.

Budući da je 10 = 2 · 5, umnožak prvih 2006 prostih brojeva ima jednu nulu na kraju.

Vježba 062

Koliko nula ima umnožak prvih 200 prostih brojeva?

Rezultat: Jednu nulu.

Zadatak 063 (Ivana, gimnazija)

Koliko znamenaka ima broj $4^{63} \cdot 25^{59}$?

Rješenje 063

$$4^{63} \cdot 25^{59} = 4^4 \cdot 4^{59} \cdot 25^{59} = 4^4 \cdot (4 \cdot 25)^{59} = 4^4 \cdot 100^{59} = 4^4 \cdot \left(10^2\right)^{59} = 4^4 \cdot 10^{118} = 256 \cdot 10^{118} =$$

$$= 2.56 \cdot 10^2 \cdot 10^{118} = 2.56 \cdot 10^{120}.$$

Zadani broj ima 121 znamenku.

Vježba 063

Koliko znamenaka ima broj $4^{60} \cdot 25^{59}$?

Rezultat: 119.

Zadatak 064 (Josipa, gimnazija)

Ako je $a^5 = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{3}}{2^{-2} \cdot 4^{-2} \cdot 8^{-1}}$, koliko je $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-a}$?

Rješenje 064

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

1.inačica

Računamo vrijednost potencije a^5:

$$a^5=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{3}}{2^{-2}\cdot 4^{-2}\cdot 8^{-1}}=\frac{2\cdot 4^2\cdot 8^{-3}}{2^{-2}\cdot 4^{-2}\cdot 8^{-1}}=2\cdot 4^2\cdot 8^{-3}\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 8^1=2^3\cdot 4^4\cdot 8^{-2}=$$

$$=2^3\cdot\left(2^2\right)^4\cdot\left(2^3\right)^{-2}=2^3\cdot 2^8\cdot 2^{-6}=2^5\ \Rightarrow\ a=2.$$

Sada je

$$\left(-\frac{1}{6}\right)^{-a}=\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}=(-6)^2=36.$$

2.inačica

Računamo vrijednost potencije a^5:

$$a^5=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{3}}{2^{-2}\cdot 4^{-2}\cdot 8^{-1}}=\frac{2\cdot 4^2\cdot 8^{-3}}{2^{-2}\cdot 4^{-2}\cdot 8^{-1}}=\frac{2\cdot\left(2^2\right)^2\cdot\left(2^3\right)^{-3}}{2^{-2}\cdot\left(2^2\right)^{-2}\cdot\left(2^3\right)^{-1}}=\frac{2\cdot 2^4\cdot 2^{-9}}{2^{-2}\cdot 2^{-4}\cdot 2^{-3}}=$$

$$=\frac{2^{-4}}{2^{-9}}=2^{-4}\cdot 2^9=2^5\ \Rightarrow\ a=2.$$

Sada je

$$\left(-\frac{1}{6}\right)^{-a}=\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}=(-6)^2=36.$$

3.inačica

Računamo vrijednost potencije a^5:

$$a^5=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{3}}{2^{-2}\cdot 4^{-2}\cdot 8^{-1}}=\frac{2\cdot 4^2\cdot 8^{-3}}{2^{-2}\cdot 4^{-2}\cdot 8^{-1}}=\frac{2\cdot\left(2^2\right)^2\cdot\left(2^3\right)^{-3}}{(2\cdot 4)^{-2}\cdot 8^{-1}}=\frac{2\cdot 2^4\cdot 2^{-9}}{8^{-2}\cdot 8^{-1}}=\frac{2^{-4}}{8^{-3}}=$$

$$=\frac{2^{-4}}{\left(2^3\right)^{-3}}=\frac{2^{-4}}{2^{-9}}=2^{-4}\cdot 2^9=2^5\ \Rightarrow\ a=2.$$

Sada je

$$\left(-\frac{1}{6}\right)^{-a}=\left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}=(-6)^2=36.$$

Vježba 064

Ako je $a^5=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{3}}{2^{-2}\cdot 4^{-2}\cdot 8^{-1}}$, koliko je $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-a}$?

Rezultat: 4.

Zadatak 065 (Josipa, gimnazija)

Kolika je vrijednost izraza: je $\frac{3^5\cdot 2^{-2}\cdot 9^{-1}+10\cdot 0.2^{-1}\cdot 5^{-2}}{(0.2)^0+\left(\frac{3}{5}\right)^0+3^{-1}}$?

Rješenje 065

Ponovimo!

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}},\quad a^{0}=1,\quad \left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m},\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}$$

$$\frac{3^{5}\cdot 2^{-2}\cdot 9^{-1}+10\cdot 0.2^{-1}\cdot 5^{-2}}{(0.2)^{0}+\left(\frac{3}{5}\right)^{0}+3^{-1}}=\frac{3^{5}\cdot 2^{-2}\cdot\left(3^{2}\right)^{-1}+2\cdot 5\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^{-1}\cdot 5^{-2}}{1+1+3^{-1}}=\frac{3^{5}\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-2}+2\cdot 5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\cdot 5^{-2}}{2+3^{-1}}=$$

$$=\frac{3^{3}\cdot 2^{-2}+2\cdot 5\cdot 5^{1}\cdot 5^{-2}}{2+3^{-1}}=\frac{3^{3}\cdot 2^{-2}+2\cdot 5^{2}\cdot 5^{-2}}{2+3^{-1}}=\frac{3^{3}\cdot 2^{-2}+2\cdot 5^{0}}{2+3^{-1}}=\frac{3^{3}\cdot\frac{1}{2^{2}}+2\cdot 1}{2+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{27}{4}+2}{2+\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{\frac{35}{4}}{\frac{7}{3}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}.$$

Vježba 065

Kolika je vrijednost izraza: je $\dfrac{9^{2}\cdot 3^{-3}+3^{0}}{5-7^{0}}$?

Rezultat: 1.

Zadatak 066 (Medicinka, medicinska škola)

Kolika je vrijednost izraza: je $\sqrt[6]{a^{5}\cdot b^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{a\cdot b}}:\left(a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

Rješenje 066

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}},\quad \left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m},\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m},\quad a^{n}:a^{m}=a^{n-m},\quad (a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}$$

$$\sqrt[6]{a^{5}\cdot b^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{a\cdot b}}:\left(a^{-\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}}=\sqrt[6]{a^{5}\cdot b^{\frac{2}{3}}\cdot(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}}:\left(a^{\frac{8}{9}}\cdot b^{\frac{4}{6}}\right)=\sqrt[6]{a^{5}\cdot b^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}:\left(a^{\frac{8}{9}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}5+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}\\ \frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}\end{bmatrix}=\sqrt[6]{a^{\frac{11}{2}}\cdot b^{\frac{7}{6}}}:\left(a^{\frac{8}{9}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\right)=\left(a^{\frac{11}{2}}\cdot b^{\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{6}}:\left(a^{\frac{8}{9}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\right)=a^{\frac{11}{12}}\cdot b^{\frac{7}{36}}:\left(a^{\frac{8}{9}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{11}{12}-\frac{8}{9}=\frac{1}{36}\\ \frac{7}{36}-\frac{2}{3}=-\frac{17}{36}\end{bmatrix}=a^{\frac{1}{36}}\cdot b^{-\frac{17}{36}}.$$

Vježba 066

Kolika je vrijednost izraza: je $\sqrt[6]{a^{5}}:a^{\frac{1}{2}}$.

Rezultat: $a^{\frac{1}{3}}$.

Zadatak 067 (Ivana, hotelijerska škola)

Ako je $x=\left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a^2}}\right)^6\cdot\sqrt{a}$, koliko iznosi $\log_a x$?

Rješenje 067

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^x}:\sqrt[m]{a^y}=\sqrt[n\cdot m]{a^{x\cdot m}:a^{y\cdot n}}\quad,\quad\sqrt[n]{a^x}\cdot\sqrt[m]{a^y}=\sqrt[n\cdot m]{a^{x\cdot m}\cdot a^{y\cdot n}}\quad,\quad a^n:a^m=a^{n-m}$$

$$\sqrt[n\cdot m]{a^m}=\sqrt[n]{a}\quad,\quad\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\quad,\quad\log_a a^n=n\cdot\log_a a=n\cdot 1=1$$

$$x=\left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a^2}}\right)^6\cdot\sqrt{a}=\left(\sqrt[5]{\sqrt[12]{a^{3\cdot 3}:a^{2\cdot 4}}}\right)^6\cdot\sqrt{a}=\left(\sqrt[5]{\sqrt[12]{a^9:a^8}}\right)^6\cdot\sqrt{a}=\left(\sqrt[5]{\sqrt[12]{a}}\right)^6\cdot\sqrt{a}=$$

$$=\left(\sqrt[60]{a}\right)^6\cdot\sqrt{a}=\sqrt[60]{a^6}\cdot\sqrt{a}=\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt{a}=\sqrt[10]{a^1\cdot a^5}=\sqrt[10]{a^6}=\sqrt[5]{a^3}=a^{\frac{3}{5}}.$$

Logaritam iznosi:

$$\log_a x=\log_a a^{\frac{3}{5}}=\frac{3}{5}\cdot\log_a a=\frac{3}{5}\cdot 1=\frac{3}{5}=0.6.$$

Vježba 067

Ako je $x=\left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a^2}}\right)^6\cdot\sqrt{a}$, koliko iznosi $\log_a x^5$?

Rezultat: 3.

Zadatak 068 (Mala, hotelijerska škola)

Ako je $a:b=9:4,\ b:c=9:4,\ c:d=9:4$, koliko je $\sqrt{a}:\sqrt{d}$?

Rješenje 068

$$\left.\begin{array}{l}a:b=9:4\\ b:c=9:4\\ c:d=9:4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{9}{4}\\ \frac{b}{c}=\frac{9}{4}\\ \frac{c}{d}=\frac{9}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{pomnožimo}\\ \text{jednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}=\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4}\Rightarrow\frac{a}{d}=\left(\frac{9}{4}\right)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a}{d}=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^3\Rightarrow\frac{a}{d}=\left(\frac{3}{2}\right)^6\ /\sqrt{\ }\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{d}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^6}\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{d}}=\left(\frac{3}{2}\right)^3\Rightarrow\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{d}}=\frac{27}{8}\Rightarrow\sqrt{a}:\sqrt{d}=27:8.$$

Vježba 068

Ako je $a:b=1:2,\ b:c=1:2,\ c:d=1:2$, koliko je $a:d$?

Rezultat: $a:d=1:8.$

Zadatak 069 (Ivana, gimnazija)

Izračunajte: $\frac{1}{50}+\frac{1}{150}+\frac{1}{300}+\frac{1}{500}+\frac{1}{750}+\frac{1}{1050}+\ ...\ +\frac{1}{252500}.$

Rješenje 069

$$\frac{1}{50}+\frac{1}{150}+\frac{1}{300}+\frac{1}{500}+\frac{1}{750}+\frac{1}{1050}+\ ...\ +\frac{1}{252500}=\left[\text{izlučimo }\frac{1}{25}\right]=$$

$$=\frac{1}{25}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ ...\ +\frac{1}{10100}\right]=\frac{1}{25}\cdot\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ ...\ +\frac{1}{100\cdot 101}\right]=$$

$$=\left[\text{uočimo da vrijedi: } \frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{25}\cdot\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ \dots\ +\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right]=\frac{1}{25}\cdot\left[1-\frac{1}{101}\right]=\frac{1}{25}\cdot\frac{100}{101}=\frac{4}{101}.$$

Vježba 069

Izračunajte: $\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}+\frac{1}{90}+\frac{1}{126}+\ \dots\ +\frac{1}{30300}.$

Rezultat: $\frac{100}{303}.$

Zadatak 070 (Ivica, hotelijerska škola)

Ako je $a^{\frac{3}{4}}=b^{\frac{1}{2}}$ nađi $a^{\frac{4}{3}}.$

Rješenje 070

Ponovimo!

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}$$

$$a^{\frac{3}{4}}=b^{\frac{1}{2}}\ \Rightarrow\ a^{\frac{3}{4}}=b^{\frac{1}{2}}\ /^{\frac{16}{9}}\ \Rightarrow\ \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{16}{9}}=\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{16}{9}}\ \Rightarrow\ a^{\frac{4}{3}}=b^{\frac{8}{9}}.$$

Vježba 070

Ako je $a^{\frac{3}{4}}=b^{\frac{9}{8}}$ nađi $a^{\frac{4}{3}}.$

Rezultat: $b^{2}.$

Zadatak 071 (Mala, komercijalna škola)

Izračunaj: $\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^{2}}.$

Rješenje 071

1.inačica

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^{2}}=\frac{1}{2^{2}-2\cdot2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^{2}}=\frac{1}{4-4\cdot\sqrt{3}+3}=\frac{1}{7-4\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{7-4\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{7+\sqrt{3}}{7+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{7+\sqrt{3}}{7^{2}-\left(4\cdot\sqrt{3}\right)^{2}}=\frac{7+\sqrt{3}}{49-48}=\frac{7+\sqrt{3}}{1}=7+\sqrt{3}.$$

2.inačica

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^{2}}=\left[\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^{2}=\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2^{2}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}}\right]^{2}=\left[\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}\right]^{2}=\left[\frac{2+\sqrt{3}}{1}\right]^{2}=\left[2+\sqrt{3}\right]^{2}=$$

$$=\left[2+\sqrt{3}\right]^{2}=2^{2}+2\cdot2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^{2}=4+4\cdot\sqrt{3}+3=7+4\cdot\sqrt{3}.$$

Vježba 071

Izračunaj: $\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}$.

Rezultat: $3+2\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 072 (Učenica, komercijalna škola)

Geometrijska sredina dvaju pozitivnih realnih brojeva je 2, dok je zbroj njihovih kvadrata 8. Kolika je aritmetička sredina tih brojeva?

Rješenje 072

Iz geometrijske sredine dobije se:

$$\sqrt{x\cdot y}=2 \Rightarrow \sqrt{x\cdot y}=2 \;/^2 \Rightarrow x\cdot y=4.$$

Dalje slijedi:

$$x^2+y^2=8 \Rightarrow \underbrace{x^2+2\cdot x\cdot y+y^2}_{(x+y)^2}-2\cdot x\cdot y=8 \Rightarrow (x+y)^2-2\cdot x\cdot y=8 \Rightarrow (x+y)^2-2\cdot 4=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y)^2-8=8 \Rightarrow (x+y)^2=16 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow x+y=4. \left(\begin{array}{l}\text{uzima se pozitivna vrijednost}\\ \text{zbog uvjeta zadatka}\end{array}\right)$$

Aritmetička sredina iznosi:

$$x+y=4 \Rightarrow x+y=4 \;/:2 \Rightarrow \frac{x+y}{2}=2.$$

Vježba 072

Geometrijska sredina dvaju pozitivnih realnih brojeva je 2, dok je zbroj njihovih kvadrata 28. Kolika je aritmetička sredina tih brojeva?

Rezultat: 3.

Zadatak 073 (Ivana, gimnazija)

Koliko prirodnih brojeva između 100 i 300 ima u svom dekadskom zapisu znamenku 2?

Rješenje 073

Od broja	do broja	broj znamenki 2 iznosi
102	112	2
120	129	10
132	192	7
200	299	100
Ukupan broj je		119

Vježba 073

Koliko prirodnih brojeva između 100 i 199 ima u svom dekadskom zapisu znamenku 2?

Rezultat: 19.

Zadatak 074 (Kety, gimnazija)

Kolika je vrijednost izraza: $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$?

Rješenje 074

1.inačica

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-1}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-1\right]\cdot\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+1\right]}=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2+2\cdot\sqrt{6}+3-1}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{4+2\cdot\sqrt{6}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\cdot\left(2+\sqrt{6}\right)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}}\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{6}\right)}{2^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{12}+2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{18}}{4-6}=\frac{2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{4\cdot 3}+2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{9\cdot 2}}{4-6}=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}}{-2}=\frac{-\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.inačica

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-1}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+1}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-1\right]\cdot\left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+1\right]}=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2+2\cdot\sqrt{6}+3-1}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{4+2\cdot\sqrt{6}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2\cdot\left(2+\sqrt{6}\right)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2\cdot 3}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vježba 074

Kolika je vrijednost izraza: $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$?

Rezultat: $\sqrt{2}.$

Zadatak 075 (Kety, gimnazija)

Jaka Goldbachova hipoteza kaže da se svaki parni prirodni broj veći od 7 može prikazati u obliku zbroja dvaju prostih brojeva. Kolika je najveća moguća razlika takva dva prosta broja za prikaz broja 126?

* Christian Goldbach (1690. – 1764.), matematičar

Rješenje 075

Ponovimo!

Prost broj je prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv brojem 1 i samim sobom.

Najveći prost broj manji od 125 je broj 113 pa vrijedi:

$$\underbrace{113}_{\substack{\text{prost}\\ \text{broj}}}+\underbrace{13}_{\substack{\text{prost}\\ \text{broj}}}=126.$$

Razlika iznosi:

$$113-13=100.$$

Vježba 075

Jaka Goldbachova hipoteza kaže da se svaki parni prirodni broj veći od 7 može prikazati u obliku zbroja dvaju prostih brojeva. Kolika je najveća moguća razlika takva dva prosta broja za prikaz broja 50?

Rezultat: $47-3=44.$

Zadatak 076 (1A, 1C, hotelijerska škola)

Podesno grupirajući pribrojnike (za zbrajanje vrijede zakoni komutacije i asocijacije), izračunajte što kraćim putem:

$$129+352+471+253+548+21+747.$$

Rješenje 076

Ponovimo!

zakon komutacije za zbrajanje: $a+b=b+a,$

zakon asocijacije za zbrajanje: $(a+b)+c=a+(b+c).$

Što je lakše, jednostavnije zbrojiti: 300 + 200 ili 348 + 569?
Jasno, lakše je zbrojiti stotice: 300 + 200 = 500. Zato ćemo u zadatku grupirati po dva broja čiji su zbrojevi desetice, stotice ili tisućice:

$$\underline{129}+\underline{\underline{352}}+\underline{471}+\underline{\underline{\underline{253}}}+\underline{\underline{548}}+21+\underline{\underline{\underline{747}}}=(129+471)+(352+548)+(253+747)+21=$$

$$=600+900+1000+21=1500+1000+21=2500+21=2521.$$

Vježba 076

Podesno grupirajući pribrojnike (za zbrajanje vrijede zakoni komutacije i asocijacije), izračunajte što kraćim putem:

$$352 + 63 + 448 + 537 + 25.$$

Rezultat: 1425.

Zadatak 077 (1A, 1C, hotelijerska škola)

Podesno grupirajući faktore (za množenje vrijede zakoni komutacije i asocijacije), izračunajte što kraćim putem:

$$125 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 7.$$

Rješenje 077

Ponovimo!

zakon komutacije za množenje: $a \cdot b = b \cdot a$,

zakon asocijacije za množenje: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Što je lakše, jednostavnije pomnožiti: prirodan broj s dekadskom jedinicom (10, 100, 1000, …), na primjer, $478 \cdot 1000$ ili dva prirodna broja, na primjer, $368 \cdot 254$?

Jasno, lakše je pomnožiti prirodan broj s dekadskom jedinicom (10, 100, 1000, …), na primjer,

$$478 \cdot 1000 = 478000.$$

Zato ćemo u zadatku grupirati po dva broja čiji su produkti desetice, stotice ili tisućice:

$$\underline{125}\cdot 3\cdot \underline{8}\cdot \underline{\underline{25}}\cdot \underline{\underline{4}}\cdot 7=(125\cdot 8)\cdot(25\cdot 4)\cdot(3\cdot 7)=1000\cdot 100\cdot 21=2\,100\,000.$$

Vježba 077

Podesno grupirajući faktore (za množenje vrijede zakoni komutacije i asocijacije), izračunajte što kraćim putem:

$$25 \cdot 3 \cdot 125 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 8.$$

Rezultat: 3 000 000.

Zadatak 078 (Marija, gimnazija)

Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima zbroj znamenaka iznosi 6?

Rješenje 078

Tražimo troznamenkaste prirodne brojeve kojima je zbroj znamenaka jednak 6.
Prikažimo to tablicom!

Znamenke	Traženi brojevi	Broj traženih brojeva
0, 1, 5	105, 150, 501, 510	4
1, 1, 4	114, 141, 411	3
1, 2, 3	123, 132, 213, 231, 312, 321	6
2, 2, 2	222	1
0, 2, 4	204, 240, 402, 420	4
0, 3, 3	303, 330	2
0, 0, 6	600	1
Ukupan broj		21

Vježba 078

Koliko ima troznamenkastih prirodnih brojeva kojima zbroj znamenaka iznosi 3?

Rezultat: 6.

Zadatak 079 (Marija, gimnazija)

Koji je od navedenih brojeva iracionalan?

$$A.\ 4^{\frac{5}{2}} \qquad B.\ \left(\sqrt{2}\right)^4 \qquad C.\ 4^{-\frac{1}{2}} \qquad D.\ 8^{\frac{2}{3}} \qquad E.\ 8^{\frac{1}{2}}$$

Rješenje 079

Ponovimo!

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m} \quad , \quad \sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}.$$

$A.\quad 4^{\frac{5}{2}}=\left(2^{2}\right)^{\frac{5}{2}}=2^{5}=32$ racionalan broj

$B.\quad \left(\sqrt{2}\right)^{4}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{4}=2^{2}=4$ racionalan broj

$C.\quad 4^{-\frac{1}{2}}=\left(2^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$ racionalan broj

$D.\quad 8^{\frac{2}{3}}=\left(2^{3}\right)^{\frac{2}{3}}=2^{2}=4$ racionalan broj

$E.\quad 8^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\cdot\sqrt{2}$ iracionalan broj

Odgovor je pod E.

Vježba 079

Koji je od navedenih brojeva iracionalan?

$A.\ 4^{\frac{5}{2}} \qquad B.\ \left(\sqrt{2}\right)^{4} \qquad C.\ 8^{-\frac{1}{2}} \qquad D.\ 8^{\frac{2}{3}} \qquad E.\ 8^{\frac{1}{3}}$

Rezultat: Odgovor je pod C.

Zadatak 080 (Vedrana, studentica)

Je li $\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}}$ racionalan broj?

Rješenje 080

Ponovimo!

$$(a+b)^{3}=a^{3}+3\cdot a^{2}\cdot b+3\cdot a\cdot b^{2}+b^{3}.$$

Ako je racionalan broj

$$x=\frac{p}{q}\ \left(p\in Z,\ q\in N,\ M(p,q)=1,\ p \text{ i } q \text{ su relativno prosti brojevi}\right)$$

rješenje jednadžbe

$$a_{n}\cdot x^{n}+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ \ldots\ +a_{2}\cdot x^{2}+a_{1}\cdot x+a_{0}=0\ ,\ a_{n}\neq 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je p djelitelj slobodnog člana a_0, a q djelitelj vodećeg koeficijenta a_n.

Znači ako algebarska jednadžba ima racionalni korijen on je oblika $\frac{p}{q}$ gdje je p cjelobrojni djelitelj slobodnog člana a_0, a q cjelobrojni djelitelj vodećeg koeficijenta a_n. Ako niti jedan od tako dobivenih racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ ne zadovoljava jednadžbu, onda ona nema ni jedan racionalni korijen.

Zadani izraz označimo slovom x i dobivenu jednakost kubiramo:

$$x=\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow x=\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}}\ /^{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{3}=\left(\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}\right)^{3}+3\cdot\left(\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}\right)^{2}\cdot\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}}+3\cdot\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}}\right)^{2}+\left(\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}}\right)^{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{3}=18+3\cdot\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}}\cdot\left(\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{3}=18+3\cdot\sqrt[3]{\left(9+4\cdot\sqrt{5}\right)\cdot\left(9-4\cdot\sqrt{5}\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{3}=18+3\cdot\sqrt[3]{9^{2}-\left(4\cdot\sqrt{5}\right)^{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{3}=18+3\cdot\sqrt[3]{81-80}\cdot\left(\sqrt[3]{9+4\cdot\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\cdot\sqrt{5}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = 18 + 3 \cdot \sqrt[3]{1} \cdot \left(\sqrt[3]{9 + 4 \cdot \sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4 \cdot \sqrt{5}} \right) \Rightarrow x^3 = 18 + 3 \cdot 1 \cdot \left(\sqrt[3]{9 + 4 \cdot \sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4 \cdot \sqrt{5}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = 18 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{9 + 4 \cdot \sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4 \cdot \sqrt{5}} \right) \Rightarrow \left[x = \sqrt[3]{9 + 4 \cdot \sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4 \cdot \sqrt{5}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = 18 + 3 \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{9 + 4 \cdot \sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4 \cdot \sqrt{5}} \right)}_{x} \Rightarrow x^3 = 18 + 3 \cdot x \Rightarrow x^3 - 3 \cdot x - 18 = 0 \Rightarrow 1 \cdot x^3 - 3 \cdot x - 18 = 0.$$

Vodeći koeficijent dobivene jednadžbe je $a_3 = 1$ pa su njegovi djelitelji cijeli brojevi: – 1, 1.
Dakle, q = – 1, 1.

Slobodni član je $a_0 = -18$ pa su njegovi djelitelji cijeli brojevi: – 18, – 9, – 6, – 3, – 2, – 1, 1, 2, 3, 6, 9, 18.
Dakle, p = – 18, – 9, – 6, – 3, – 2, – 1, 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Ako jednadžba ima racionalna rješenja ona su u obliku $x = \frac{p}{q}$.

Zbog preglednosti prikažimo tablično.

q	**p**	$x = \frac{p}{q}$.	$x^3 - 3 \cdot x - 18 = 0$
– 1	**– 18**	$\frac{-18}{-1} = 18$	$18^3 - 3 \cdot 18 - 18 = 5760 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
	– 9	$\frac{-9}{-1} = 9$	$9^3 - 3 \cdot 9 - 18 = 699 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
	– 6	$\frac{-6}{-1} = 6$	$6^3 - 3 \cdot 6 - 18 = 180 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
	– 3	$\frac{-3}{-1} = 3$	$3^3 - 3 \cdot 3 - 18 = 0 \Rightarrow x \in Q$
	– 2	$\frac{-2}{-1} = 2$	$2^3 - 3 \cdot 2 - 18 = -16 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
	– 1	$\frac{-1}{-1} = 1$	$1^3 - 3 \cdot 1 - 18 = -20 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
	1	$\frac{1}{-1} = -1$	$(-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 18 = -16 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
	2	$\frac{2}{-1} = -2$	$(-2)^3 - 3 \cdot (-2) - 18 = -20 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
	3	$\frac{3}{-1} = -3$	$(-3)^3 - 3 \cdot (-3) - 18 = -36 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
	6	$\frac{6}{-1} = -6$	$(-6)^3 - 3 \cdot (-6) - 18 = -216 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
	9	$\frac{9}{-1} = -9$	$(-9)^3 - 3 \cdot (-9) - 18 = -720 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
	18	$\frac{18}{-1} = -18$	$(-18)^3 - 3 \cdot (-18) - 18 = -5796 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$

q	p	$x=\frac{p}{q}.$	$x^3-3\cdot x-18=0$
1	**– 18**	$\frac{-18}{1}=-18$	$(-18)^3-3\cdot(-18)-18=-5796\neq 0\Rightarrow x\notin Q$
	– 9	$\frac{-9}{1}=-9$	$(-9)^3-3\cdot(-9)-18=-720\neq 0\Rightarrow x\notin Q$
	– 6	$\frac{-6}{1}=-6$	$(-6)^3-3\cdot(-6)-18=-216\neq 0\Rightarrow x\notin Q$
	– 3	$\frac{-3}{1}=-3$	$(-3)^3-3\cdot(-3)-18=-36\neq 0\Rightarrow x\notin Q$
	– 2	$\frac{-2}{1}=-2$	$(-2)^3-3\cdot(-2)-18=-20\neq 0\Rightarrow x\notin Q$
	– 1	$\frac{-1}{1}=-1$	$(-1)^3-3\cdot(-1)-18=-16\neq 0\Rightarrow x\notin Q$
	1	$\frac{1}{1}=1$	$1^3-3\cdot 1-18=-20\neq 0\Rightarrow x\notin Q$
	2	$\frac{2}{1}=2$	$2^3-3\cdot 2-18=-16\neq 0\Rightarrow x\notin Q$
	3	$\frac{3}{1}=3$	$3^3-3\cdot 3-18=0\Rightarrow x\in Q$
	6	$\frac{6}{1}=6$	$6^3-3\cdot 6-18=180\neq 0\Rightarrow x\notin Q$
	9	$\frac{9}{1}=9$	$9^3-3\cdot 9-18=699\neq 0\Rightarrow x\notin Q$
	18	$\frac{18}{1}=18$	$18^3-3\cdot 18-18=5760\neq 0\Rightarrow x\notin Q$

Vježba 080

Je li $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ racionalan broj?

Rezultat: Da.