Zadatak 361 (Branko, srednja škola)

Odredi najmanji prirodni broj n za koji je $\frac{n}{7} > \frac{1}{5}$.

Rješenje 361

Ponovimo!

$$a > b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c > b \cdot c \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Nepravi razlomak je razlomak kojemu je brojnik veći od nazivnika, na primjer, $\frac{5}{3}$. Može se zapisati i u obliku mješovitoga broja, $1\frac{2}{3}$.

$$\frac{n}{7} > \frac{1}{5} \ \Rightarrow \ \frac{n}{7} > \frac{1}{5} \ / \cdot 7 \ \Rightarrow \ n > \frac{7}{5} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 7 : 5 = 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ n > 1\frac{2}{5}.$$

Najmanji prirodni broj je n = 2.

Vježba 361

Odredi najmanji prirodni broj n za koji je $\frac{n}{8} > \frac{1}{5}$.

Rezultat: n = 2.

Zadatak 362 (Branko, srednja škola)

Odredi najveći prirodni broj n za koji je $\frac{3}{5} < \frac{13}{n}$.

Rješenje 362

Ponovimo!

$$a < b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c < b \cdot c \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Nepravi razlomak je razlomak kojemu je brojnik veći od nazivnika, na primjer, $\frac{5}{3}$. Može se zapisati i u obliku mješovitoga broja, $1\frac{2}{3}$.

$$\frac{3}{5} < \frac{13}{n} \ \Rightarrow \ \frac{3}{5} < \frac{13}{n} \ / \cdot \frac{5}{3} \cdot n \ \Rightarrow \ n < \frac{65}{3} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 65 : 3 = 21 \\ 2 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ n < 21\frac{2}{3}.$$

Najveći prirodni broj je n = 21.

Vježba 362

Odredi najveći prirodni broj n za koji je $\frac{3}{5} < \frac{7}{n}$.

Rezultat: n = 11.

Zadatak 363 (Tanja, srednja škola)

Dokaži jednakost $\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{2}.$

Rješenje 363

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

$$\sqrt{a^2}=a \ , \ a\geq 0 \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}.$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Preoblikujemo lijevu stranu jednakosti.

$$\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}=\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 3}\right)\cdot\sqrt{4-4\cdot\sqrt{3}+3}=$$

$$=\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)=\sqrt{2}\cdot(4-3)=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}.$$

2.inačica

Preoblikujemo lijevu stranu jednakosti.

$$\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}=\sqrt{2\cdot\left(2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{2\cdot\left(4+4\cdot\sqrt{3}+3\right)\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}=\sqrt{2\cdot\left(7+4\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{2\cdot\left(7^2-\left(4\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)}=\sqrt{2\cdot\left(49-4^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\right)}=\sqrt{2\cdot(49-16\cdot 3)}=$$

$$=\sqrt{2\cdot(49-48)}=\sqrt{2\cdot 1}=\sqrt{2}.$$

3.inačica

Uočimo da su oba izraza u zadanoj jednakosti pozitivna. Zato ćemo kvadrirati jednakost. Iz jednakosti kvadrata lijeve i desne strane slijedi da su i korijeni tih kvadrata jednaki, tj. da vrijedi jednakost.

$$\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{2} \Rightarrow \left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{2} \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=2 \Rightarrow \left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=2 \Rightarrow 2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=2 \,/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=1 \Rightarrow \left(2^2+2\cdot2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\right)\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(4+4\cdot\sqrt{3}+3\right)\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=1 \Rightarrow \left(7+4\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7^2-\left(4\cdot\sqrt{3}\right)^2=1 \Rightarrow 49-4^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=1 \Rightarrow 49-16\cdot3=1 \Rightarrow 49-48=1 \Rightarrow 1=1.$$

Vježba 363

Dokaži jednakost $\sqrt{2}\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}=2.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 364 (Matej, gimnazija)

Dokažite ako je zbroj dvaju troznamenkastih brojeva djeljiv s 37, onda je s 37 djeljiv i šesteroznamenkasti broj koji se dobije tako da se jednom od tih brojeva pripiše drugi.

Rješenje 364

Ponovimo!
Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\left\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\right\}.$$

Brojevi koji imaju tri znamenke zovu se troznamenkasti brojevi.
To su: 100, 101, 102, 103, 104, 105, … , 997, 998, 999.
Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Za zapis broja koristimo znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Brojevna vrijednost što je nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N=a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$, pri čemu je $a_i\in\left\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\right\}$, $i=0,1,2,\dots,n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+a_{n-2}\cdot10^{n-2}+\dots+a_2\cdot10^2+a_1\cdot10+a_0.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Za troznamenkasti prirodni broj vrijedi

$$\overline{abc}=100\cdot a+10\cdot b+c,$$

gdje je $a\in\left\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\right\}$, $b,\ c\in\left\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\right\}$.

Neka su $\overline{abc}$ i $\overline{def}$ dva troznamenkasta broja čiji je zbroj djeljiv s 37.

$$\overline{abc}+\overline{def}=37\cdot n,\ n\in N.$$

Tada vrijedi:

$$\overline{abcdef}=\overline{abc000}+\overline{def}=1000\cdot\overline{abc}+\overline{def}=999\cdot\overline{abc}+\overline{abc}+\overline{def}=999\cdot\overline{abc}+\left(\overline{abc}+\overline{def}\right)=$$

$$=\left[\overline{abc}+\overline{def}\overset{\text{uvjet}}{=}37\cdot n\right]=999\cdot\overline{abc}+37\cdot n=37\cdot 27\cdot\overline{abc}+37\cdot n=37\cdot 27\cdot\overline{abc}+37\cdot n=$$

$$=37\cdot\left(27\cdot\overline{abc}+n\right)=37\cdot\underbrace{\left(27\cdot\overline{abc}+n\right)}_{k}=37\cdot k,\ k\in N.$$

Vježba 364

Dokažite ako je zbroj dvaju dvoznamenkastih brojeva djeljiv s 11, onda je s 11 djeljiv i četveroznamenkasti broj koji se dobije tako da se jednom od tih brojeva pripiše drugi.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 365 (Dane, gimnazija)

Faktor ispred korijena unesi pod znak korijena: $2\cdot\sqrt{2}$.

Rješenje 365

Ponovimo!

$$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^{n}\cdot b}\quad,\quad a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^{2}\cdot b}.$$

$$2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2^{2}\cdot 2}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{8}.$$

Vježba 365

Faktor ispred korijena unesi pod znak korijena: $3\cdot\sqrt{3}$.

Rezultat: $\sqrt{27}$.

Zadatak 366 (Marin, srednja škola)

Ako umnošku triju uzastopnih cijelih brojeva dodamo srednji broj dobit ćemo kub srednjeg broja. Dokaži!

Rješenje 366

Ponovimo!

$$a^{1}=a\quad,\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}=(a+b)^{2}.$$

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^{2}-b^{2}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}\qquad\text{ili}\qquad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Prethodnik cijelog broja n, n ≠ 1, je cijeli broj n – 1.
Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+(n+1)=n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+(n+1)=$$

$$(n+1)\cdot\left(n\cdot(n+2)+1\right)=(n+1)\cdot\left(n^{2}+2\cdot n+1\right)=(n+1)\cdot(n+1)^{2}=$$

$$=(n+1)^{1}\cdot(n+1)^{2}=(n+1)^{3}.$$

2.inačica

$$(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n=n\cdot\big((n-1)\cdot(n+1)+1\big)=$$

$$=n\cdot\left(n^2-1+1\right)=n\cdot\left(n^2-1+1\right)=n\cdot n^2=n^1\cdot n^2=n^3.$$

Vježba 366

Ako od umnoška dvaju uzastopnih cijelih brojeva oduzmemo manji broj dobit ćemo kvadrat manjeg broja. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 367 (Marin, srednja škola)

Izračunaj: $$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}:\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}\right]^{-2}:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}\right]^{-3}.$$

Rješenje 367

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}\quad,\quad\frac{n}{1}=n\quad,\quad a^{\circ}=1\quad,\quad a:b=\frac{a}{b}\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}\quad,\quad a^{n}:a^{m}=a^{n-m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}:\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}\right]^{-2}:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}\right]^{-3}=$$

$$=\left[\frac{2^1+2^2+2^3}{2^1+2^2-2^3}:\frac{3^1+3^2}{3^1-3^2}\right]^{-2}:\left[2^3-1\right]^{-3}=\left[\frac{2+4+8}{2+4-8}:\frac{3+9}{3-9}\right]^{-2}:\left[8-1\right]^{-3}=$$

$$=\left[\frac{14}{-2}:\frac{12}{-6}\right]^{-2}:7^{-3}=\left[\frac{14}{2}\cdot\frac{6}{12}\right]^{-2}:\frac{1}{7^3}=\left[\frac{14}{2}\cdot\frac{6}{12}\right]^{-2}\cdot\frac{7^3}{1}=\left[\frac{7}{1}\cdot\frac{1}{2}\right]^{-2}\cdot\frac{7^3}{1}=$$

$$=\left[\frac{7}{2}\right]^{-2}\cdot\frac{7^3}{1}=\left(\frac{2}{7}\right)^{2}\cdot\frac{7^3}{1}=\frac{2^2}{7^2}\cdot\frac{7^3}{1}=\frac{2^2}{7^2}\cdot\frac{7^3}{1}=2^2\cdot 7=4\cdot 7=28.$$

Vježba 367

Izračunaj: $$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}:\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}\right]^{-2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}\right]^{3}.$$

Rezultat: 28.

Zadatak 368 (Mirko, elektrotehnička škola)

Postoji li pravokutan trokut čije su duljine stranica neparni prirodni brojevi?

Rješenje 368

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki prirodan broj}) + 1 \quad , \quad m = 2\cdot k + 1 \ , \ k \in N.$$

Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2\cdot k \ , \ k \in N.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Svaka trojka prirodnih brojeva a, b i c koja zadovoljava jednadžbu

$$a^2 + b^2 = c^2$$

naziva se Pitagorina trojka brojeva.
Neka su prirodni brojevi a, b i c neparni, tj. neka je:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2\cdot k + 1 \ , \ k \in N \\ b = 2\cdot m + 1 \ , \ m \in N \\ c = 2\cdot n + 1 \ , \ n \in N \end{array}\right\}.$$

Tada iz jednadžbe

$$a^2 + b^2 = c^2$$

slijedi

$$(2\cdot k+1)^2 + (2\cdot m+1)^2 = (2\cdot n+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\cdot k)^2 + 2\cdot 2\cdot k\cdot 1 + 1^2 + (2\cdot m)^2 + 2\cdot 2\cdot m\cdot 1 + 1^2 = (2\cdot n)^2 + 2\cdot 2\cdot n\cdot 1 + 1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot k^2 + 4\cdot k + 1 + 4\cdot m^2 + 4\cdot m + 1 = 4\cdot n^2 + 4\cdot n + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot k^2 + 4\cdot k + 1 + 4\cdot m^2 + 4\cdot m + 1 = 4\cdot n^2 + 4\cdot n + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot k^2 + 4\cdot k + 4\cdot m^2 + 4\cdot m + 1 = 4\cdot n^2 + 4\cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\left(2\cdot k^2 + 2\cdot k + 2\cdot m^2 + 2\cdot m\right) + 1 = 2\cdot\left(2\cdot n^2 + 2\cdot n\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ p = 2\cdot k^2 + 2\cdot k + 2\cdot m^2 + 2\cdot m \\ q = 2\cdot n^2 + 2\cdot n \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 2 \cdot p + 1 = 2 \cdot q \ \ , \ \ p, q \in N.$$

Jednakost nije moguća jer je na lijevoj strani neparan broj, a na desnoj paran. Ne postoji pravokutan trokut čije su duljine stranica neparni prirodni brojevi.

Vježba 368

Postoji li pravokutan trokut čije su duljine stranica parni prirodni brojevi?

Rezultat: Da. Ima ih beskonačno mnogo. Na primjer, ako je dana temeljna Pitagorina trojka (3, 4, 5) tada je određena čitava klasa Pitagorinih brojeva: (6, 8, 10), (12, 16, 20), (18, 24, 30) itd.

Zadatak 369 (Pero, srednja škola)

Izračunaj vrijednost izraza: $\sqrt{\dfrac{145.5^2 - 96.5^2}{193.5^2 - 31.5^2}}.$

Rješenje 369

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\sqrt{\frac{145.5^2 - 96.5^2}{193.5^2 - 31.5^2}} = \sqrt{\frac{(145.5 - 96.5) \cdot (145.5 + 96.5)}{(193.5 - 31.5) \cdot (193.5 + 31.5)}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 242}{162 \cdot 225}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 242}{162 \cdot 225}} =$$

$$= \sqrt{\frac{49 \cdot 121}{81 \cdot 225}} = \frac{\sqrt{49 \cdot 121}}{\sqrt{81 \cdot 225}} = \frac{\sqrt{49} \cdot \sqrt{121}}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{225}} = \frac{7 \cdot 11}{9 \cdot 15} = \frac{77}{135}.$$

Vježba 369

Izračunaj vrijednost izraza: $\sqrt{\dfrac{193.5^2 - 31.5^2}{145.5^2 - 96.5^2}}.$

Rezultat: $\dfrac{135}{77}.$

Zadatak 370 (Mirela, srednja škola)

Ako je $x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x = 1$, onda je $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$. Dokaži!

Rješenje 370

Ponovimo!

$$a \geq b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c \geq b \cdot c \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad a^2 \geq 0 \ , \ a \in R.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Preoblikujemo zadanu nejednakost.

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \ / \cdot 2 \ \Rightarrow \ 2 \cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \geq 2 \cdot 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot z^2\geq 2\cdot 1\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ xy+yz+zx=1\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot z^2\geq 2\cdot(x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot z^2\geq 2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot z+2\cdot z\cdot x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot z^2-2\cdot x\cdot y-2\cdot y\cdot z-2\cdot z\cdot x\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2-2\cdot x\cdot y-2\cdot y\cdot z-2\cdot z\cdot x\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(x^2-2\cdot x\cdot y+y^2\right)+\left(x^2-2\cdot x\cdot z+z^2\right)+\left(y^2-2\cdot y\cdot z+z^2\right)\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0.$$

Dobili smo istinitu nejednakost, što znači da je naša pretpostavka točna.

Vježba 370

Ako je $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x-1=0$, onda je $x^2+y^2+z^2-1\geq 0$. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 371 (4B, TUPŠ)

Koji je od sljedećih brojeva manji:

$a)\ 4^{11}$ ili 16^6 $\qquad b)\ 27^8$ ili 9^{12} $\qquad c)\ 5^{22}$ ili 3^{33}?

Rješenje 371

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Ako je a > 1, onda za racionalne brojeve n < m vrijedi

$$a^n<a^m.$$

a)

$$\left.\begin{array}{l}4^{11}=\left(2^2\right)^{11}=2^{2\cdot 11}=2^{22}\\ 16^6=\left(2^4\right)^6=2^{4\cdot 6}=2^{24}\end{array}\right\}\Rightarrow\ 2^{22}<2^{24}\ \Rightarrow\ 4^{11}<16^6$$

b)

$$\left.\begin{array}{l}27^8=\left(3^3\right)^8=3^{3\cdot 8}=3^{24}\\ 9^{12}=\left(3^2\right)^{12}=3^{2\cdot 12}=3^{24}\end{array}\right\}\Rightarrow\ 27^8=9^{12}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l}5^{22}=5^{2\cdot 11}=\left(5^2\right)^{11}=25^{11}\\ 3^{33}=3^{3\cdot 11}=\left(3^3\right)^{11}=27^{11}\end{array}\right\}\Rightarrow\ 25^{11}<27^{11}\ \Rightarrow\ 5^{22}<3^{33}.$$

Vježba 371

Koji je od sljedećih brojeva manji 4^8 ili 16^4?

Rezultat: $4^8=16^4.$

Zadatak 372 (4B, TUPŠ)

Izračunajte $\sqrt{5} : \sqrt[3]{5}.$

Rješenje 372

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \quad , \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Broj b je višekratnik prirodnog broja a ako postoji takav prirodan broj k da vrijedi

$$b = k \cdot a.$$

Najmanji zajednički višekratnik dvaju ili više brojeva je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svim zadanim brojevima.

1.inačica

Zadane korijene $\sqrt{\ }$ i $\sqrt[3]{\ }$ svedemo na jedan korijen. To će biti $\sqrt[6]{\ }$ jer je najmanji zajednički višekratnik od brojeva 2 i 3 broj 6.

$$\sqrt{5} : \sqrt[3]{5} = \sqrt{5^1} : \sqrt[3]{5^1} = \sqrt[2 \cdot 3]{5^{1 \cdot 3}} : \sqrt[3 \cdot 2]{5^{1 \cdot 2}} = \sqrt[6]{5^3} : \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{5^3 : 5^2} =$$

$$= \sqrt[6]{5^{3-2}} = \sqrt[6]{5^1} = \sqrt[6]{5}.$$

2.inačica

Preoblikujemo zadane korijene u potencije s racionalnim eksponentima.

$$\sqrt{5} : \sqrt[3]{5} = \sqrt{5^1} : \sqrt[3]{5^1} = 5^{\frac{1}{2}} : 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 5^{\frac{3-2}{6}} = 5^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{5^1} = \sqrt[6]{5}.$$

Vježba 372

Izračunajte $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}.$

Rezultat: $\sqrt[6]{2}.$

Zadatak 373 (Marija, gimnazija)

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2 \cdot n - 1)^3 = n^2 \cdot \left(2 \cdot n^2 - 1\right).$$

Rješenje 373

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.
Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) - 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k - 1 \ , \ k \in N.$$

Ili

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in N.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 1

$$1^3=1^2\cdot\left(2\cdot1^2-1\right) \Rightarrow 1=1\cdot(2\cdot1-1) \Rightarrow 1=1\cdot(2-1) \Rightarrow 1=1\cdot1 \Rightarrow 1=1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da vrijedi

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2\cdot n-1)^3=n^2\cdot\left(2\cdot n^2-1\right) - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2\cdot n-1)^3+(2\cdot n+1)^3=\underbrace{\left(1^3+3^3+5^3+\ldots+(2\cdot n-1)^3\right)}_{\text{induktivna pretpostavka}}+(2\cdot n+1)^3=$$

$$=n^2\cdot\left(2\cdot n^2-1\right)+(2\cdot n+1)^3=n^2\cdot\left(2\cdot n^2-1\right)+(2\cdot n)^3+3\cdot(2\cdot n)^2\cdot1+3\cdot(2\cdot n)\cdot1^2+1^3=$$

$$=2\cdot n^4-n^2+8\cdot n^3+3\cdot4\cdot n^2+6\cdot n\cdot1+1=$$

$$=2\cdot n^4-n^2+8\cdot n^3+12\cdot n^2+6\cdot n+1=2\cdot n^4+8\cdot n^3+11\cdot n^2+6\cdot n+1=$$

$$=2\cdot n^4+4\cdot n^3+n^2+4\cdot n^3+8\cdot n^2+2\cdot n+2\cdot n^2+4\cdot n+1=$$

$$=\left(2\cdot n^4+4\cdot n^3+n^2\right)+\left(4\cdot n^3+8\cdot n^2+2\cdot n\right)+\left(2\cdot n^2+4\cdot n+1\right)=$$

$$=n^2\cdot\left(2\cdot n^2+4\cdot n+1\right)+2\cdot n\cdot\left(2\cdot n^2+4\cdot n+1\right)+\left(2\cdot n^2+4\cdot n+1\right)=$$

$$=n^2\cdot\left(2\cdot n^2+4\cdot n+1\right)+2\cdot n\cdot\left(2\cdot n^2+4\cdot n+1\right)+\left(2\cdot n^2+4\cdot n+1\right)=$$

$$=\left(2\cdot n^2+4\cdot n+1\right)\cdot\left(n^2+2\cdot n+1\right)=\left(2\cdot n^2+4\cdot n+1\right)\cdot(n+1)^2=(n+1)^2\cdot\left(2\cdot n^2+4\cdot n+1\right)=$$

$$=(n+1)^2\cdot\left(2\cdot n^2+4\cdot n+2-1\right)=(n+1)^2\cdot\left(\left(2\cdot n^2+4\cdot n+2\right)-1\right)=$$

$$=(n+1)^2\cdot\left(2\cdot\left(n^2+2\cdot n+1\right)-1\right)=(n+1)^2\cdot\left(2\cdot(n+1)^2-1\right).$$

Vježba 373

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$1\cdot1+2\cdot4+3\cdot7+\ldots+n\cdot(3\cdot n-2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n-1)}{2}.$$

Rezultat: Naputak: $1\cdot1+2\cdot4+3\cdot7+\ldots+n\cdot(3\cdot n-2)+(n+1)\cdot(3\cdot(n+1)-2)=\ldots$

Zadatak 374 (Ivan, gimnazija)

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot n-2)\cdot(3\cdot n+1)}=\frac{n}{3\cdot n+1}.$$

Rješenje 374

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije
n = 1

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{3\cdot 1+1} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{3+1} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije
n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da vrijedi

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot n-2)\cdot(3\cdot n+1)}=\frac{n}{3\cdot n+1} \quad - \text{ induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot n-2)\cdot(3\cdot n+1)}+\frac{1}{(3\cdot(n+1)-2)\cdot(3\cdot(n+1)+1)}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot n-2)\cdot(3\cdot n+1)}}_{\text{induktivna pretpostavka}}+\frac{1}{(3\cdot(n+1)-2)\cdot(3\cdot(n+1)+1)}=$$

$$=\frac{n}{3\cdot n+1}+\frac{1}{(3\cdot(n+1)-2)\cdot(3\cdot(n+1)+1)}=\frac{n}{3\cdot n+1}+\frac{1}{(3\cdot n+3-2)\cdot(3\cdot n+3+1)}=$$

$$=\frac{n\cdot(3\cdot n+4)+1}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)}=\frac{3\cdot n^2+4\cdot n+1}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)}=\frac{3\cdot n^2+3\cdot n+n+1}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)}=$$

$$=\frac{\left(3\cdot n^2+3\cdot n\right)+(n+1)}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)}=\frac{3\cdot n\cdot(n+1)+(n+1)}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)}=\frac{3\cdot n\cdot(n+1)+(n+1)}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)}=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot(3\cdot n+1)}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)}=\frac{(n+1)\cdot(3\cdot n+1)}{(3\cdot n+1)\cdot(3\cdot n+4)}=\frac{n+1}{3\cdot n+4}=\frac{n+1}{3\cdot n+3+1}=\frac{n+1}{3\cdot(n+1)+1}.$$

Vježba 374

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4\cdot n-1)\cdot(4\cdot n+1)}=\frac{n}{4\cdot n+1}.$$

Rezultat: Tvrdnja istinita.

Zadatak 375 (Toro, gimnazija)

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Rješenje 375

Ponovimo!

$$a^{\circ}=1 \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \ , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije
n = 1

$$1^2=(-1)^{1-1}\cdot\frac{1\cdot(1+1)}{2} \Rightarrow 1=(-1)^{\circ}\cdot\frac{1\cdot 2}{2} \Rightarrow 1=1\cdot\frac{1\cdot 2}{2} \Rightarrow 1=1\cdot 1 \Rightarrow 1=1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije
n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da vrijedi

$$1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2+(-1)^n\cdot(n+1)^2=$$

$$=\underbrace{1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2}_{\text{induktivna pretpostavka}}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=$$

$$=(-1)^n\cdot(-1)^{-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=(-1)^n\cdot\frac{1}{-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(-1)^n\cdot(n+1)^2=$$

$$=(-1)^n\cdot(-1)\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(-1)^n\cdot\frac{(n+1)^2}{1}=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\left((-1)\cdot\frac{n}{2}+\frac{n+1}{1}\right)=$$

$$=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{2}+\frac{n+1}{1}\right)=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\frac{-n+2\cdot(n+1)}{2}=$$

$$=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\frac{-n+2\cdot n+2}{2}=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\frac{n+2}{2}=(-1)^n\cdot(n+1)\cdot\frac{(n+1)+1}{2}=$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}.$$

Vježba 375

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$2\cdot 1^2-2\cdot 2^2+2\cdot 3^2-...+(-1)^{n-1}\cdot 2\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot n\cdot(n+1).$$

Rezultat: Tvrdnja istinita.

Zadatak 376 (Toro, gimnazija)

Ako je $a_\circ=2,\ a_1=3$ i $a_{n+1}=3\cdot a_n-2\cdot a_{n-1}$ dokaži da je $a_n=2^n+1,\ n\in N.$

Rješenje 376

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (slijed)

$$f:N\to R\ ,\ n\mapsto f(n)=a_n.$$

Rekurzivna formula ili rekurzija je formula kojom se opći član niza izražava pomoću prethodnih članova. Uz rekurziju treba zadati i vrijednosti prvih nekoliko članova niza – onoliko koliko se prethodnih članova javlja u rekurziji.
Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ ...\}.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije
n = 1

$$a_{n+1}=3\cdot a_n-2\cdot a_{n-1}\ \Rightarrow\ [n=1]\ \Rightarrow\ a_2=3\cdot a_1-2\cdot a_\circ\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}a_\circ=2\\ a_1=3\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_2=3\cdot 3-2\cdot 2\ \Rightarrow\ a_2=9-4\ \Rightarrow\ a_2=5\ \Rightarrow\ a_2=4-1\ \Rightarrow\ a_2=2^2-1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije
n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za n – 1 i n, tj. da vrijedi

$$a_{n-1}=2^{n-1}+1 \quad , \quad a_n=2^n+1 - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$a_{n+1}=3\cdot a_n-2\cdot a_{n-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_n=2^n+1 \\ a_{n-1}=2^{n-1}+1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{n+1}=3\cdot\left(2^n+1\right)-2\cdot\left(2^{n-1}+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1}=3\cdot 2^n+3-2\cdot 2^{n-1}-2 \Rightarrow a_{n+1}=3\cdot 2^n+3-2^1\cdot 2^{n-1}-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1}=3\cdot 2^n+3-2^n-2 \Rightarrow a_{n+1}=2\cdot 2^n+1 \Rightarrow a_{n+1}=2^1\cdot 2^n+1 \Rightarrow a_{n+1}=2^{n+1}+1.$$

Vježba 376

Ako je $a_\circ=0,\ a_1=1$ i $a_{n+1}=3\cdot a_n-2\cdot a_{n-1}$ dokaži da je $a_n=2^n-1,\ n\in N.$

Rezultat: Tvrdnja istinita.

Zadatak 377 (Matej, gimnazija)

Ako je $a_1=-1,\ a_2=7$ i $a_{n+2}=8\cdot a_{n+1}-15\cdot a_n$ dokaži da je $a_n=5^n-2\cdot 3^n,\ n\in N.$

Rješenje 377

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (slijed)

$$f:N\to R\ ,\ n\mapsto f(n)=a_n.$$

Rekurzivna formula ili rekurzija je formula kojom se opći član niza izražava pomoću prethodnih članova. Uz rekurziju treba zadati i vrijednosti prvih nekoliko članova niza – onoliko koliko se prethodnih članova javlja u rekurziji.

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,2,3,4,5,\ldots,n-1,n,n+1,\ldots\}.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 1

$$a_{n+2}=8\cdot a_{n+1}-15\cdot a_n \Rightarrow [n=1] \Rightarrow a_3=8\cdot a_2-15\cdot a_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1=-1 \\ a_2=7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3=8\cdot 7-15\cdot(-1) \Rightarrow a_3=56+15 \Rightarrow a_3=71 \Rightarrow a_3=125-54 \Rightarrow a_3=5^3-2\cdot 27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3=5^3-2\cdot 3^3.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za n – 1 i n, tj. da vrijedi

$$a_{n-1} = 5^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \quad , \quad a_n = 5^n - 2 \cdot 3^n \text{ – induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$a_{n+1} = 8 \cdot a_n - 15 \cdot a_{n-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_n = 5^n - 2 \cdot 3^n \\ a_{n-1} = 5^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 8 \cdot \left(5^n - 2 \cdot 3^n\right) - 15 \cdot \left(5^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 8 \cdot 5^n - 16 \cdot 3^n - 15 \cdot 5^{n-1} + 30 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 8 \cdot 5^n - 16 \cdot 3^n - 3 \cdot 5 \cdot 5^{n-1} + 10 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 8 \cdot 5^n - 16 \cdot 3^n - 3 \cdot 5^1 \cdot 5^{n-1} + 10 \cdot 3^1 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 8 \cdot 5^n - 16 \cdot 3^n - 3 \cdot 5^{1+n-1} + 10 \cdot 3^{1+n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 8 \cdot 5^n - 16 \cdot 3^n - 3 \cdot 5^{1+n-1} + 10 \cdot 3^{1+n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 8 \cdot 5^n - 16 \cdot 3^n - 3 \cdot 5^n + 10 \cdot 3^n \Rightarrow a_{n+1} = 5 \cdot 5^n - 6 \cdot 3^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 5^1 \cdot 5^n - 2 \cdot 3 \cdot 3^n \Rightarrow a_{n+1} = 5^{n+1} - 2 \cdot 3^1 \cdot 3^n \Rightarrow a_{n+1} = 5^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}.$$

Vježba 377

Ako je $a_1 = -1,\ a_2 = 7$ i $a_{n+2} = 8 \cdot a_{n+1} - 15 \cdot a_n$ dokaži da je $a_n = 5^n - 6 \cdot 3^{n-1},\ n \in N.$

Rezultat: Tvrdnja istinita.

Zadatak 378 (Fox, gimnazija)

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}.$$

Rješenje 378

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije
n = 1

$$1\cdot 2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3}\ \Rightarrow\ 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}\ \Rightarrow\ 2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}\ \Rightarrow\ 2=\frac{1\cdot 2}{1}\ \Rightarrow\ 2=\frac{2}{1}\ \Rightarrow\ 2=2.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije
n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za n – 1 i n, tj. da vrijedi

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ ...\ +n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}\ -\ \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ ...\ +n\cdot(n+1)+(n+1)\cdot(n+2)=$$

$$=\underbrace{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ ...\ +n\cdot(n+1)}_{\text{induktivna pretpostavka}}+(n+1)\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}+(n+1)\cdot(n+2)=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}+\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{1}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+3\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+3\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{3}=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot((n+1)+1)\cdot((n+1)+2)}{3}.$$

Vježba 378

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$5+8+11+\ ...\ +(3\cdot n+2)=\frac{n\cdot(3\cdot n+7)}{2}.$$

Rezultat: Tvrdnja istinita.

Zadatak 379 (Fox, gimnazija)

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ ...\ +\frac{1}{2\cdot n-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ ...\ +\frac{1}{2\cdot n-1}.$$

Rješenje 379

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \left.\begin{array}{l}a=c\\ b=c\end{array}\right\}\Rightarrow\ a=b.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ ...\}.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

Zbog jednostavnosti označimo lijevu i desnu stranu jednakosti s a_n i b_n.

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \dots\ +\frac{1}{2\cdot n-1} \\ b_n &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ \dots\ +\frac{1}{2\cdot n-1} \end{aligned}\right\}.$$

baza indukcije

n = 1

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1} \\ b_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ b_1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 = b_1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za n, tj. da vrijedi

$$a_n = b_n \ - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada računamo

$$a_{n+1}-a_n \text{ i } b_{n+1}-b_n :$$

- $$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ \dots\ +\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n+1}-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ \dots\ +\frac{1}{2\cdot n-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ \dots\ +\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n+1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\ \dots\ -\frac{1}{2\cdot n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ \dots\ +\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n+1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\ \dots\ -\frac{1}{2\cdot n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1}-a_n = \frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n+1}-\frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1}-a_n = \frac{1}{2\cdot n+1}+\frac{1}{2\cdot n}-\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1}-a_n = \frac{1}{2\cdot n+1}+\frac{1-2}{2\cdot n} \Rightarrow a_{n+1}-a_n = \frac{1}{2\cdot n+1}-\frac{1}{2\cdot n}.$$

- $$b_{n+1}-b_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ \dots\ +\frac{1}{2\cdot n-1}-\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n+1}-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ \dots\ +\frac{1}{2\cdot n-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{n+1}-b_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ \dots\ +\frac{1}{2\cdot n-1}-\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n+1}-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ \dots\ -\frac{1}{2\cdot n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{n+1}-b_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ \dots\ +\frac{1}{2\cdot n-1}-\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n+1}-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ \dots\ -\frac{1}{2\cdot n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_{n+1}-b_n = \frac{1}{2\cdot n+1}-\frac{1}{2\cdot n}.$$

Dalje slijedi:

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= \frac{1}{2\cdot n+1}-\frac{1}{2\cdot n} \\ b_{n+1}-b_n &= \frac{1}{2\cdot n+1}-\frac{1}{2\cdot n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{n+1}-a_n = b_{n+1}-b_n \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{induktivna} \\ \text{pretpostavka} \\ a_n = b_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1}-a_n = b_{n+1}-b_n \Rightarrow a_{n+1} = b_{n+1}\ ,\ n\in N.$$

Vježba 379

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\ ...\ -\frac{1}{2\cdot n-1}=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ ...\ -\frac{1}{2\cdot n-1}.$$

Rezultat: Tvrdnja istinita.

Zadatak 380 (Fox, gimnazija)

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$\sin\alpha+\sin(2\cdot\alpha)+\sin(3\cdot\alpha)+\ ...\ +\sin(n\cdot\alpha)=\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq 2\cdot k\cdot\pi,\ k\in Z.$$

Rješenje 380

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \sin\alpha=2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin(x+y)-\sin(x-y)\right).$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ ...\}.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$...,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{...,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}\qquad \text{ili}\qquad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ ...\}.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije
n = 1

$$\sin\alpha=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{1+1}{2}\cdot\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{2}{2}\cdot\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(\frac{2}{2}\cdot\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\alpha.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za n, tj. da vrijedi

$$\sin\alpha + \sin(2\cdot\alpha) + \sin(3\cdot\alpha) + \ldots + \sin(n\cdot\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$\sin\alpha + \sin(2\cdot\alpha) + \sin(3\cdot\alpha) + \ldots + \sin(n\cdot\alpha) + \sin((n+1)\cdot\alpha) =$$

$$= \underbrace{\sin\alpha + \sin(2\cdot\alpha) + \sin(3\cdot\alpha) + \ldots + \sin(n\cdot\alpha)}_{\text{induktivna pretpostavka}} + \sin((n+1)\cdot\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin((n+1)\cdot\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin((n+1)\cdot\alpha)}{1} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right) + \sin((n+1)\cdot\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right) + 2\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right) + 2\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right) + 2\cdot\cos\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \left[\cos x\cdot\sin y = \frac{1}{2}\cdot\left(\sin(x+y) - \sin(x-y)\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right) + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\cdot(n+1+1)\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\cdot(n+1-1)\right)\right)\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}\cdot(n+2)\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\cdot(n+1-1)\right)\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)+\sin\left(\frac{n+2}{2}\cdot\alpha\right)-\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)+\sin\left(\frac{n+2}{2}\cdot\alpha\right)-\sin\left(\frac{n}{2}\cdot\alpha\right)\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{n+2}{2}\cdot\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\cdot\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{(n+1)+1}{2}\cdot\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Vježba 380

Dokaži matematičkom indukcijom da je za svaki prirodni broj n

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\sin(\alpha+2\cdot h)+\ldots+\sin(\alpha+(n-1)\cdot h)=\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\cdot h\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot h\right)}{\sin\frac{h}{2}},$$

$h\neq 2\cdot k\cdot\pi,\ k\in Z.$

Rezultat: Tvrdnja istinita.