

Zadatak 421 (Miroslav, gimnazija)

Prosjeak starosti 11 igrača u nekoj nogometnoj momčadi je 22 godine. Za vrijeme igre jedan igrač, zbog povrede, načas napusti teren pa je prosjeak godina igrača koji ostanu u igri 21 godina. Koliko godina ima igrač koji je napustio igru?

Rješenje 421

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N , a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a ?

$$b = a + n \quad , \quad b - n = a \quad , \quad b - a = n.$$

1. inačica

Neka je n zbroj godina starosti svih 11 igrača. Tada je

$$\frac{n}{11} = 22 \Rightarrow \frac{n}{11} = 22 \cdot 11 \Rightarrow n = 242.$$

Neka je x broj godina igrača koji je napustio igru. Vrijedi jednačba:

$$\begin{aligned} \frac{242-x}{10} = 21 &\Rightarrow \frac{242-x}{10} = 21 \cdot 10 \Rightarrow 242-x = 210 \Rightarrow -x = 210-242 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -x = -32 \Rightarrow -x = -32 \cdot (-1) \Rightarrow x = 32. \end{aligned}$$

2. inačica

Prosjeak starosti u momčadi, sa svim igračima, je 22 godine. Budući da se prosjeak godina starosti, igrača ostalih u igri, smanji za 1 godinu ($22 - 21$), znači da se ukupan zbroj godina smanjio za još 10 godina. Ukupan zbroj godina smanjio se za 32 godine.

$$22 + 10 = 32.$$

Igrač koji je napustio igru ima 32 godine.

3. inačica

Zbroj godina starosti svih 11 igrača iznosi

$$22 \cdot 11 = 242.$$

Neka je x broj godina igrača koji je napustio igru. Sada je prosjeak godina starosti 21 godina, dakle, za 1 godinu manje od prijašnjeg prosjeka koji je iznosio 22 godine. Vrijedi jednačba:

$$\begin{aligned} \frac{242}{11} = \frac{242-x}{10} + 1 &\Rightarrow \frac{242}{11} = \frac{242-x}{10} + 1 \cdot 110 \Rightarrow 2420 = 11 \cdot (242-x) + 110 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2420 = 2662 - 11 \cdot x + 110 \Rightarrow 11 \cdot x = 2662 + 110 - 2420 \Rightarrow 11 \cdot x = 352 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 11 \cdot x = 352 \cdot 11 \Rightarrow x = 32. \end{aligned}$$

4. inačica

Stanete uz rub igrališta i kada igrač napusti teren ljubazno ga upitate za njegove godine. (Šala mala!)

Vježba 421

Prosjeak starosti 11 igrača u nekoj nogometnoj momčadi je 23 godine. Za vrijeme igre jedan igrač, zbog povrede, načas napusti teren pa je prosjeak godina igrača koji ostanu u igri 21 godina. Koliko godina ima igrač koji je napustio igru?

Rezultat: 43.

Zadatak 422 (Fox, gimnazija)

Uz koje uvjete je razlomak $\frac{a+1}{b+1}$ jednak razlomku $\frac{a-1}{b-1}$?

Rješenje 422

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Rasprava

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednost nepoznanice x za koju je nazivnik jednak nuli.

Najprije raspravimo!

Budući da se s nulom ne može dijeliti, nazivnici $b+1$ i $b-1$ moraju biti različiti od nule. Zato je:

$$\left. \begin{array}{l} b+1 \neq 0 \Rightarrow b \neq -1 \\ b-1 \neq 0 \Rightarrow b \neq 1 \end{array} \right\}.$$

Dalje slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{b+1} = \frac{a-1}{b-1} &\Rightarrow \frac{a+1}{b+1} = \frac{a-1}{b-1} \cdot \frac{(b+1) \cdot (b-1)}{(b+1) \cdot (b-1)} \Rightarrow (a+1) \cdot (b-1) = (a-1) \cdot (b+1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \cdot b - a + b - 1 = a \cdot b + a - b - 1 \Rightarrow a \cdot b - a + b - 1 = a \cdot b + a - b - 1 \Rightarrow -a + b = a - b \Rightarrow \\ &\Rightarrow -a - a = -b - b \Rightarrow -2 \cdot a = -2 \cdot b \Rightarrow -2 \cdot a = -2 \cdot b \quad /: (-2) \Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Također mora biti $a \neq -1$ i $a \neq 1$.

Vježba 422

Uz koje uvjete je razlomak $\frac{a+2}{b+2}$ jednak razlomku $\frac{a-2}{b-2}$?

Rezultat: $a = b$, $a \neq -2$, $a \neq 2$.

Zadatak 423 (Sandra, gimnazija)

Odredi cijele brojeve x i y za koje vrijedi jednakost $\frac{5}{x} = \frac{y}{3}$.

Rješenje 423

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

$$\frac{5}{x} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{y}{3} \cdot \frac{3 \cdot x}{3 \cdot x} \Rightarrow 15 = x \cdot y \Rightarrow x \cdot y = 15.$$

Budući da x i y moraju biti cijeli brojevi, postoje ova rješenja:

- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -15 \end{array} \right\}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -3 \\ y = -5 \end{array} \right\}$

- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \begin{cases} x = -15 \\ y = -1 \end{cases}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 15 \end{cases}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vježba 423

Odredi cijele brojeve x i y za koje vrijedi jednakost $\frac{x}{2} = \frac{1}{y}$.

Rezultat: $\left. \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} x=-1 \\ y=-2 \end{matrix} \right\}$, $\left. \begin{matrix} x=-2 \\ y=-1 \end{matrix} \right\}$.

Zadatak 424 (Fox, gimnazija)

Što je veće: $\sqrt{1993 \cdot 1995}$ ili 1994?

Rješenje 424

Ponovimo!

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2, \quad \sqrt{a^2} = a, \quad a \geq 0, \quad \sqrt{a-1} < \sqrt{a}.$$

Preoblikujemo umnožak pod korijenom u razliku kvadrata.

$$\sqrt{1993 \cdot 1995} = \sqrt{(1994-1) \cdot (1994+1)} = \sqrt{1994^2 - 1} < \sqrt{1994^2} = 1994.$$

Vrijedi:

$$\sqrt{1993 \cdot 1995} < 1994.$$

Vježba 424

Što je veće: $\sqrt{2016 \cdot 2018}$ ili 2017?

Rezultat: $\sqrt{2016 \cdot 2018} < 2017$.

Zadatak 425 (Lana, gimnazija)

Dokažite da je $\frac{a+b}{a-b}$ iracionalan broj, ako je $a > 0$ i $b > 0$ i $a^2 + b^2 = 6 \cdot a \cdot b$.

Rješenje 425

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Iracionalni brojevi su brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka. Skup iracionalnih brojeva označavamo slovom I . Algebarski iracionalni brojevi su:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Neka je

$$x = \frac{a+b}{a-b}.$$

Dalje slijedi:

$$\begin{aligned} x = \frac{a+b}{a-b} &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednakost} \end{array} \right] \Rightarrow x = \frac{a+b}{a-b} / 2 \Rightarrow x^2 = \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvjet} \\ a^2 + b^2 = 6 \cdot a \cdot b \end{array} \right] \Rightarrow x^2 = \frac{6 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b}{6 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot b} \Rightarrow x^2 = \frac{8 \cdot a \cdot b}{4 \cdot a \cdot b} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{8 \cdot a \cdot b}{4 \cdot a \cdot b} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 2 / \sqrt{} \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2} \in I. \end{aligned}$$

Vježba 425

Dokažite da je $\frac{a+b}{a-b}$ iracionalan broj, ako je $a > 0$ i $b > 0$ i $a^2 + b^2 - 6 \cdot a \cdot b = 0$.

Rezultat: Dokaz analogan.

www.halapa.com