Zadatak 461 (Ivana, ekonomska škola)

Koji je od navedenih brojeva veći:

$$a)\ 125^2 \text{ ili } 25^4$$
$$b)\ 2^{42} \text{ ili } 3^{28}?$$

Rješenje 461

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \atop \rightarrow \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj $\log x$ zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

$$\log a^n = n\cdot\log a \quad , \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \log x_1 < \log x_2 \ \text{ funkcija je rastuća}$$

a)

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x = 125^2 \\ y = 25^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\text{logaritmiramo}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = \log 125^2 \\ \log y = \log 25^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 2\cdot\log 125 \\ \log y = 4\cdot\log 25 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 2\cdot\log 5^3 \\ \log y = 4\cdot\log 5^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 3\cdot 2\cdot\log 5 \\ \log y = 2\cdot 4\cdot\log 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 6\cdot\log 5 \\ \log y = 8\cdot\log 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \log y > \log x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y > x \Rightarrow 25^4 > 125^2.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x = 125^2 \\ y = 25^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\text{logaritmiramo}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = \log 125^2 \\ \log y = \log 25^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 2\cdot\log 125 \\ \log y = 4\cdot\log 25 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 4.19382\ldots \\ \log y = 5.59176\ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \log y > \log x \Rightarrow y > x \Rightarrow 25^4 > 125^2.$$

3.inačica

Potencije preoblikujemo na jednake baze i onda ih usporedimo.

$$\left.\begin{array}{l} 125^2 = \left(5^3\right)^2 = 5^6 \\ 25^4 = \left(5^2\right)^4 = 5^8 \end{array}\right\} \Rightarrow 5^8 > 5^6 \Rightarrow 25^4 > 125^2.$$

b)

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x = 2^{42} \\ y = 3^{28} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\text{logaritmiramo}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = \log 2^{42} \\ \log y = \log 3^{28} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 42\cdot\log 2 \\ \log y = 28\cdot\log 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{array}\right] \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \log x = 12.64326\ ... \\ \log y = 18.13061\ ... \end{array}\right\} \Rightarrow \log y > \log x \Rightarrow y > x \Rightarrow 3^{28} > 2^{42}.$$

2.inačica

Potencije preoblikujemo na jednake eksponente i onda ih usporedimo.

$$\left.\begin{array}{l} 2^{42} = \left(2^{6}\right)^{7} = 64^{7} \\ 3^{28} = \left(3^{4}\right)^{7} = 81^{7} \end{array}\right\} \Rightarrow 81^{7} > 64^{7} \Rightarrow 3^{28} > 2^{42}.$$

Vježba 461

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 462 (Anita, ekonomska škola)

Masa 1000 zrna pšenice za određenu sortu pšenice iznosi 42 g. Godišnja proizvodnja pšenice u Hrvatskoj iznosi 903000 tona. Koliko zrna pšenice godišnje proizvedemo?

Rješenje 462

Ponovimo!

$$a^{n} \cdot a^{m} = a^{n+m} \quad , \quad 1\ t = 10^{3}\ kg \quad , \quad 1\ kg = 10^{3}\ g.$$

Decimalni broj dijelimo dekadskom jedinicom (10, 100, 1000, 10000, …) tako da mu decimalnu točku pomaknemo ulijevo za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula.
Svaki realan broj x možemo zapisati u znanstvenom zapisu

$$x = a \cdot 10^{n},$$

gdje je a realan broj iz intervala $\left[\, 0, 10 \right\rangle$, n je prirodan broj.

Najprije izračunamo godišnju proizvodnju pšenice u gramima.

$$903000\ t = 9.03 \cdot 10^{5}\ t = 9.03 \cdot 10^{5} \cdot 10^{3}\ kg = 9.03 \cdot 10^{8}\ kg = 9.03 \cdot 10^{8} \cdot 10^{3}\ g = 9.03 \cdot 10^{11}\ g.$$

Budući da masa 1000 zrna pšenice iznosi 42 g, masa jednog zrna je:

$$42\ g : 1000 = 0.042\ g.$$

Godišnja proizvodnja pšenice izražena u broju zrna iznosi:

$$9.03 \cdot 10^{11}\ g : 0.042\ g = \left[\begin{array}{c} \text{džepno} \\ \text{računalo} \end{array}\right] = 2.15 \cdot 10^{13}.$$

Vježba 462

Masa 1000 zrna pšenice za određenu sortu pšenice iznosi 4.2 dag. Godišnja proizvodnja pšenice u Hrvatskoj iznosi 903000 tona. Koliko zrna pšenice godišnje proizvedemo?

Rezultat: $2.15 \cdot 10^{15}$.

Zadatak 463 (Anita, ekonomska škola)

Dnevna potreba za bjelančevinama odrasle osobe iznosi 0.8 g / kg tjelesne mase. U jednom gramu sladoleda nalazi se 0.05 grama bjelančevina. Eva ima 60 kg i odlučila je jesti samo sladoledne kornete mase 60 g. Koliko korneta dnevno Eva treba pojesti ako želi unijeti preporučenu količinu bjelančevina?

Rješenje 463

Ponovimo!

Sve jasno! ☺

www.halapa.com

Budući da dnevna potreba za bjelančevinama iznosi 0.8 g / kg tjelesne mase, Eva koja ima 60 kg mora unijeti

$$0.8\ \frac{g}{kg}\cdot 60\ kg = 48\ g$$

bjelančevina.
U jednom gramu sladoleda nalazi se 0.05 g bjelančevina. Zato Eva svaki dan mora pojesti

$$48\ g : 0.05 = 960\ g$$

sladoleda.
Jedan kornet ima masu 60 g pa se Evin dnevni obrok sladoleda sastoji od 16 korneta.

$$960\ g : 60\ g = 16.$$

Vježba 463

Dnevna potreba za bjelančevinama odrasle osobe iznosi 0.8 g / kg tjelesne mase. U jednom gramu sladoleda nalazi se 0.05 grama bjelančevina. Eva ima 60 kg i odlučila je jesti samo sladoledne kornete mase 6 dag. Koliko korneta dnevno Eva treba pojesti ako želi unijeti preporučenu količinu bjelančevina?

Rezultat: $2.15\cdot 10^{15}$.

Zadatak 464 (Leo, gimnazija)

Racionaliziraj nazivnik $\dfrac{1}{\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}}$.

Rješenje 464

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a^2\cdot b} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2.$$

$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n \quad , \quad a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

$$\frac{n}{1} = n \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n\cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x| = -x$.
Racionalizacija nazivnika je postupak uklanjanja korijena iz nazivnika razlomka.

1.inačica

$$\frac{1}{\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}}{3-2\cdot\sqrt{2}} = \left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}}{3-2\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{3+2\cdot\sqrt{2}}{3+2\cdot\sqrt{2}} = \frac{\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}}{\left(3-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(3-2\cdot\sqrt{2}\right)}}{3^2-\left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2} =$$

www.halapa.com

$$=\frac{\sqrt{\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-2\cdot\sqrt{2}\right)}}{3^2-2^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(3^2-\left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2\right)}}{9-4\cdot 2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(3^2-2^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\right)}}{9-8}=\frac{\sqrt{\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot(9-4\cdot 2)}}{1}=\sqrt{\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot(9-8)}=$$

$$=\sqrt{\left(3+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot 1}=\sqrt{3+2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\cdot\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}+1}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\left|\sqrt{2}+1\right|=\left|\underbrace{\sqrt{2}+1}_{>0}\right|=\sqrt{2}+1.$$

2.inačica

Najprije preoblikujemo izraz pod korijenom.

$$\frac{1}{\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2-2\cdot\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}=\frac{1}{\left|\sqrt{2}-1\right|}=$$

$$=\frac{1}{\left|\underbrace{\sqrt{2}-1}_{>0}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}+1.$$

www.halapa.com

Vježba 464

Racionaliziraj nazivnik $\frac{1}{\sqrt{3+2\cdot\sqrt{2}}}$.

Rezultat: $\sqrt{2}-1.$

Zadatak 465 (Sanja, gimnazija)

U razredu s 28 učenika prosječna ocjena ispita iz biologije je 2.5. Kolika je prosječna ocjena učenika koji su dobili pozitivnu ocjenu ako je četvero učenika dobilo 1?

Rješenje 465

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\left\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\right\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Neka je x zbroj svih ocjena ispita iz biologije. Tada vrijedi:

$$\frac{x}{28}=2.5 \Rightarrow \frac{x}{28}=2.5 \;/\cdot 28 \Rightarrow x=70.$$

Dakle, zbroj svih ocjena je 70.

Od ukupnog broja učenika oduzmemo 4 jer je četvero učenika dobilo 1.

$$28 - 4 = 24.$$

Od zbroja svih ocjena oduzmemo jedinice.

$$70 - 4 \cdot 1 = 70 - 4 = 66.$$

Prosječna ocjena pozitivno ocijenjenih učenika iznosi:

$$\frac{66}{24} = 2.75.$$

Vježba 465

U razredu s 28 učenika prosječna ocjena ispita iz biologije je 2.5. Kolika je prosječna ocjena učenika koji su dobili pozitivnu ocjenu ako je troje učenika dobilo 1?

Rezultat: 2.68.

Zadatak 466 (Manuela, strukovna škola)

Otac je rekao: "Imam troje djece. Sin mi je u osnovnoj, a kćerke u srednjoj školi. Broj godina sina je višekratnik broja 5, broj godina jedne kćerke djeljiv je sa 8, a druge sa 9." Koliko godina imaju njegova djeca?

Rješenje 466

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n, \ldots$

Pretpostavimo da nitko nije ponavljao razred.

Broj godina sina, u osnovnoj školi, je višekratnik broja 5. Sin ima 10 godina.

$$10 = 5 \cdot 2.$$

Broj godina prve kćerke, u srednjoj školi, je višekratnik broja 8. Ona ima 16 godina.

$$16 = 8 \cdot 2.$$

Broj godina druge kćerke, u srednjoj školi, je višekratnik broja 9. Ona ima 18 godina.

$$18 = 9 \cdot 2.$$

Vježba 466

Otac je rekao: "Imam troje djece. Sin mi je u osnovnoj, a kćerke u srednjoj školi. Broj godina sina je višekratnik broja 6, broj godina jedne kćerke djeljiv je sa 8, a druge sa 9." Koliko godina imaju njegova djeca

Rezultat: 12, 16, 18.

Zadatak 467 (Manuela, strukovna škola)

Podijelimo li neki broj redom s brojevima 15, 18 i 20 svaki se put dobije ostatak 3. Odredite najmanji broj s tim svojstvom.

Rješenje 467

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.** Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

www.halapa.com

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika. Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ ...$

Zajednički višekratnici dvaju ili više brojeva su brojevi koji su djeljivi s svim zadanim brojevima Najmanji zajednički višekratnik dvaju ili više brojeva je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svim zadanim brojevima.

Za prirodni broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni prirodni brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b, \ q \ \text{ je količnik}, \ r \ \text{ je ostatak}.$$

Odredimo najmanji zajednički višekratnik brojeva 15, 18 i 20.

Da bismo našli njihov najmanji zajednički višekratnik moramo ih rastaviti na proste faktore.

15	18	20	2
15	9	10	2
15	9	5	3
5	3	5	3
5	1	5	5
1	1	1	

$$v(15,\ 18,\ 20) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \ \Rightarrow \ v(15,\ 18,\ 20) = 180.$$

Traženi broj je:

$$v(15,\ 18,\ 20) + 3 = 180 + 3 = 183.$$

Vježba 467

Podijelimo li neki broj redom s brojevima 15, 18 i 20 svaki se put dobije ostatak 1. Odredite najmanji broj s tim svojstvom.

Rezultat: 181.

Zadatak 468 (Manuela, strukovna škola)

U jednoj su kutiji bijele i crne kuglice. Njihov ukupan broj je između 150 i 200. Ako bismo kuglice brojili po 8 ili po 14, u kutiji ne bi ostala niti jedna kuglica. Koliko je u kutiji bijelih, a koliko crnih kuglica, ako znamo da je crnih kuglica dva puta više nego bijelih?

Rješenje 468

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ ...\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.** Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika. Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ ...$

Zajednički višekratnici dvaju ili više brojeva su brojevi koji su djeljivi s svim zadanim brojevima Najmanji zajednički višekratnik dvaju ili više brojeva je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svim zadanim brojevima.

Kako zapisati da je broj b n puta veći od broja a?

$$b = n \cdot a \quad , \quad \frac{b}{n} = a \quad , \quad \frac{b}{a} = n.$$

www.halapa.com

Ako bismo kuglice brojili po 8 ili po 14, u kutiji ne bi ostala niti jedna kuglica. Zato je ukupan broj kuglica u kutiji jednak zajedničkom višekratniku broja 8 i 14 koji je veći od 150, a manji od 200.
Odredimo najmanji zajednički višekratnik brojeva 8 i 14.
Da bismo našli njihov najmanji zajednički višekratnik moramo ih rastaviti na proste faktore.

$$\begin{array}{cc|c} 8 & 14 & 2 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$$v(8,\ 14) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \ \Rightarrow \ v(8,\ 14) = 56.$$

Uvjet zadovoljava broj

$$56 \cdot 3 = 168$$

jer je

$$150 < 168 < 200.$$

Neka je x broj bijelih kuglica. Crnih kuglica je dva puta više po iznosu, 2 · x. Napišemo jednadžbu:

$$x + 2 \cdot x = 168 \ \Rightarrow \ 3 \cdot x = 168 \ \Rightarrow \ 3 \cdot x = 168 \ /:3 \ \Rightarrow \ x = 56.$$

Bijelih kuglica je 56.
Crnih kuglica je 2 · 56 = 112.

Vježba 468

U jednoj su kutiji bijele i crne kuglice. Njihov ukupan broj je između 150 i 200. Ako bismo kuglice brojili po 8 ili po 14, u kutiji ne bi ostala niti jedna kuglica. Koliko je u kutiji bijelih, a koliko crnih kuglica, ako znamo da je crnih kuglica tri puta više nego bijelih?

Rezultat: 42, 126.

Zadatak 469 (Vinko, strukovna škola)

Odredi najveći prirodni broj s kojim treba podijeliti brojeve 535 i 223 tako da ostatak u oba dijeljenja bude 7.

Rješenje 469

Ponovimo!

www.halapa.com

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prosti brojevi su: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …
Ima ih beskonačno mnogo.
Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem.
Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore. Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.
Zajednički djelitelj prirodnih brojeva a, b, … je svaki broj koji dijeli te brojeve.
Najveća zajednička mjera (najveći zajednički djelitelj) prirodnih brojeva a, b, ... je najveći broj koji dijeli sve te brojeve. Oznaka je M(a, b, ...).
Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Za prirodni broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni prirodni brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b,\ q \ \text{ je količnik},\ r \ \text{ je ostatak}.$$

Pri dijeljenju brojeva 535 i 223 s nekim prirodnim brojem dobivamo ostatak 7. To znači da su brojevi 535 – 7 = 528 i 223 – 7 = 216 djeljivi istim brojem. Taj broj je njihova najveća zajednička mjera. Dobije se kao umnožak svih zajedničkih prostih faktora zadanih brojeva.
Odredimo najveću zajedničku mjeru brojeva 528 i 216.
Da bismo našli njihovu najveću zajedničku mjeru moramo ih rastaviti na proste faktore (dijelimo ih sa zajedničkim prostim brojevima)

$$\begin{array}{cc|c} 528 & 216 & 2 \\ 264 & 108 & 2 \\ 132 & 54 & 2 \\ 66 & 27 & 3 \\ 22 & 9 & \end{array}$$

Traženi broj je

$$M(528,\ 216) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \ \Rightarrow \ M(528,\ 216) = 24.$$

Vrijedi:

$$535 = 22 \cdot 24 + 7 \quad , \quad 223 = 9 \cdot 24 + 7.$$

Vježba 469

Odredi najveći prirodni broj s kojim treba podijeliti brojeve 285 i 237 tako da ostatak u oba dijeljenja bude 9.

Rezultat: $285 = 23 \cdot 12 + 9 \ , \ 237 = 19 \cdot 12 + 9.$

Zadatak 470 (Miroslav, gimnazija)

Odredi zbroj $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)$.

Rješenje 470

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Zbroj konačno mnogo elemenata nekog niza a_1, a_2, a_3, a_4, … možemo, korištenjem znaka sumacije (zbrajanja), zapisati u obliku

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

gdje je k indeks sumacije i mijenja se u granicama od 1 do n povećavajući se u svakom pribrojniku za 1.
Svojstva:

- Sumacija je distributivna za algebarske polinome

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

- Sumacija umnoška konstante i varijable:

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k, \ c \text{ je konstanta}.$$

- Sumacija pribrojnika koji je konstanta

$$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c, \ c \text{ je konstanta}.$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}.$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

www.halapa.com

1.inačica

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+1)=\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)=\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}+\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)+3\cdot n\cdot(n+1)}{6}=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1+3)}{6}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+4)}{6}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot 2\cdot(n+2)}{6}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot 2\cdot(n+2)}{6}=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

2.inačica

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+\ldots+n\cdot(n+1)=$$

$$=1^2+1+2^2+2+3^2+3+\ldots+n^2+n=\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)+(1+2+3+\ldots+n)=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}+\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)+3\cdot n\cdot(n+1)}{6}=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1+3)}{6}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+4)}{6}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot 2\cdot(n+2)}{6}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot 2\cdot(n+2)}{6}=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

www.halapa.com

Vježba 470

Odredi zbroj $1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+\ldots+n\cdot(n+3)$.

Rezultat: Naputak: $\sum_{k=1}^{n} k\cdot(k+3)=\ldots=\sum_{k=1}^{n} k^2+3\cdot\sum_{k=1}^{n} k=\ldots=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+5)}{3}$.

Zadatak 471 (Maturant, gimnazija)

Skrati razlomak $\frac{7\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{50}}{5-\sqrt{10}}$.

Rješenje 471

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a\ ,\ a\geq 0 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

$$a^1=a \quad , \quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

$$\frac{7\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{50}}{5-\sqrt{10}}=\frac{7\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{5\cdot 10}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5\cdot 2}}=\frac{7\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\left(7-2\cdot\sqrt{10}\right)}{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}\cdot\left(7-2\cdot\sqrt{10}\right)}{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{7-2\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{5-2\cdot\sqrt{5\cdot 2}+2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

2.inačica

$$\frac{7\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{50}}{5-\sqrt{10}}=\frac{7\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{5\cdot 10}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5\cdot 2}}=\frac{7\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\left(7-2\cdot\sqrt{10}\right)}{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}\cdot\left(7-2\cdot\sqrt{10}\right)}{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{7-2\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{7-2\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\left(7-2\cdot\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{7\cdot\sqrt{5}+7\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{7\cdot\sqrt{5}+7\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{50}-2\cdot\sqrt{20}}{5-2}=$$

$$=\frac{7\cdot\sqrt{5}+7\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{25\cdot 2}-2\cdot\sqrt{4\cdot 5}}{3}=\frac{7\cdot\sqrt{5}+7\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{3}=$$

$$=\frac{7\cdot\sqrt{5}+7\cdot\sqrt{2}-2\cdot 5\cdot\sqrt{2}-2\cdot 2\cdot\sqrt{5}}{3}=\frac{7\cdot\sqrt{5}+7\cdot\sqrt{2}-10\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{5}}{3}=$$

$$=\frac{3\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}}{3}=\frac{3\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3}=\frac{3\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{3}=\sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

Vježba 471

Skrati razlomak $\frac{2\cdot\sqrt{50}-7\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{10}-5}$.

Rezultat: $\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

Zadatak 472 (Amir, elektrotehnička škola)

Dokazati da je za svaki n iz skupa N izraz $7^{n+2}+8^{2\cdot n+1}$ djeljiv sa 57.

Rješenje 472

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se

www.halapa.com

provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

U zadatku treba dokazati da je broj 57 djelitelj zadanog izraza $7^{n+2}+8^{2\cdot n+1}$. Označimo zadani izraz (zbog lakoće pisanja) s $f(n)=7^{n+2}+8^{2\cdot n+1}$.

Zapamti!

Broj a je djeljiv brojem b, ako i samo ako postoji broj c tako da vrijedi a = c · b. Ili, ovako, broj a je djeljiv brojem b, ako sadrži u sebi faktor b.

baza indukcije

n = 1

$$f(1)=7^{1+2}+8^{2\cdot 1+1}=7^3+8^3=855=57\cdot 15.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da je zadani izraz djeljiv brojem 57. Tada pišemo:

$$f(n)=7^{n+2}+8^{2\cdot n+1}=57\cdot k.\ \text{(to se zove induktivna pretpostavka)}$$

Broj k je neki prirodni broj, ali bitno je da imamo faktor 57.

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$f(n+1)=7^{(n+1)+2}+8^{2\cdot(n+1)+1} \Rightarrow f(n+1)=7^{n+1+2}+8^{2\cdot n+2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1)=7^{n+2}\cdot 7^1+8^{2\cdot n+1}\cdot 8^2 \Rightarrow f(n+1)=7^{n+2}\cdot 7+8^{2\cdot n+1}\cdot 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1)=7\cdot 7^{n+2}+64\cdot 8^{2\cdot n+1} \Rightarrow f(n+1)=7\cdot 7^{n+2}+7\cdot 8^{2\cdot n+1}+57\cdot 8^{2\cdot n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1)=7\cdot\left(7^{n+2}+8^{2\cdot n+1}\right)+57\cdot 8^{2\cdot n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1)=7\cdot\left(7^{n+2}+8^{2\cdot n+1}\right)+57\cdot 8^{2\cdot n+1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{rabimo induktivnu}\\ \text{pretpostavku}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1)=7\cdot f(n)+57\cdot 8^{2\cdot n+1} \Rightarrow f(n+1)=7\cdot 57\cdot k+57\cdot 8^{2\cdot n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1)=57\cdot\left(7\cdot k+8^{2\cdot n+1}\right).$$

Dobili smo na kraju faktor 57 i time je tvrdnja dokazana.

Vježba 472

Dokazati da je za svaki n iz skupa N izraz $6^{2\cdot n}+10\cdot 3^n$ djeljiv sa 11.

Rezultat: Sličan dokaz.

Zadatak 473 (Karlo, gimnazija)

Dokazati da je $2^n>2\cdot n+1$, za svaki prirodni broj n ≥ 3.

Rješenje 473

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

www.halapa.com

baza indukcije
n = 3

$$2^3 > 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 8 > 6 + 1 \Rightarrow 8 > 7.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.
korak indukcije
n
Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n. Tada pišemo:

$$2^n > 2 \cdot n + 1. \quad \text{(to se zove induktivna pretpostavka)}$$

n + 1
Sada provjeravamo nejednakost za sljedbenika n + 1:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^n = \left[\begin{array}{c} \text{induktivna pretpostavka} \\ 2^n > 2 \cdot n + 1 \end{array} \right] = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot (2 \cdot n + 1) = 4 \cdot n + 2 =$$

$$= 2 \cdot n + 2 \cdot n + 2 > 2 \cdot n + 3 = 2 \cdot n + 2 + 1 = 2 \cdot (n + 1) + 1.$$

Vježba 473

Dokazati da je $2^n > n$, za svaki prirodni broj n.

Rezultat: Sličan dokaz.

Zadatak 474 (Karlo, gimnazija)

Matematičkom indukcijom dokazati nejednakost $n! \geq 2^{n-1}$, $n \in N$, gdje je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. (Funkciju $n \mapsto n!$ čitamo en – faktorijela)

Rješenje 474

Ponovimo!

$$a^{\circ} = 1 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Broj n ! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

1 ! = 1,
2 ! = 1 · 2,
3 ! = 1 · 2 · 3,
4 ! = 1 · 2 · 3 · 4,
5 ! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5,
6 ! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 itd.

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n! = (n - 1)! \cdot n.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije
n = 1

$$1! \geq 2^{1-1} \Rightarrow 1 \geq 2^{\circ} \Rightarrow 1 \geq 1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.
korak indukcije
n
Pretpostavimo da je nejednakost istinita za neki prirodni broj n. Tada pišemo:

$$n! \geq 2^{n-1}. \quad \text{(to se zove induktivna pretpostavka)}$$

www.halapa.com

n + 1

Sada provjeravamo nejednakost za sljedbenika n + 1:

$$(n+1)\,! = (n+1)\cdot n\,! = \left[\begin{array}{c} \text{induktivna pretpostavka} \\ n\,! \ge 2^{n-1} \end{array}\right] = (n+1)\cdot n\,! \ge (n+1)\cdot 2^{n-1} \ge \left[\, n+1 \ge 2 \,\right] \ge$$

$$\ge 2\cdot 2^{n-1} = 2^{1}\cdot 2^{n-1} = 2^{n}.$$

Vježba 474

Dokazati da je $2^{n} > n^{2}$, za svaki prirodni broj n ≥ 5.

Rezultat: Točno je.

Zadatak 475 (Slavica, srednja škola)

Koliko različitih djelitelja ima broj 144?

Rješenje 475

Ponovimo!

$$a^{\circ} = 1 \quad , \quad a^{1} = a \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m} = a^{n+m}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b\cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \dots$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Broj 144 rastavimo na proste faktore na dva načina:

$$\begin{aligned} 144 &= 2\cdot 72 = \\ &= 2\cdot 2\cdot 36 = \\ &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 18 = \\ &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 9 = \\ &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 \end{aligned} \qquad \begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Možemo ga zapisati kao umnožak prostih brojeva:

$$144 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 2^{4}\cdot 3^{2}.$$

Bilo koji djelitelj broja 144 može se predočiti kao umnožak prostih faktora 2 i 3. Dakle, mora se sastojati od nekoliko dvica i nekoliko trica. Broj 2 u djelitelju može se pojaviti 0 ili 1, ili 2, ili 3, ili 4 puta. Za broj 2 ima 5 mogućnosti. Možemo i ovako reći. Broj 2^4 ima djelitelje 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, dakle, broj svih njegovih djelitelja jednak je 4 + 1. Svaki od djelitelja ujedno je i djelitelj od 144.

Broj 3 u djelitelju može se pojaviti 0 ili 1, ili 2 puta. Za broj 3 ima 3 mogućnosti. Možemo i ovako reći. Broj 3^2 ima djelitelje 3^0, 3^1, 3^2, dakle, broj svih njegovih djelitelja jednak je 2 + 1. Svaki od djelitelja ujedno je i djelitelj od 144.

Sve djelitelje od 144 dobit ćemo tako da svaki od djelitelja broja 2^4 pomnožimo sa svakim djeliteljem broja 3^2. Ukupno djelitelja ima

$$(4+1)\cdot(2+1) = 5\cdot 3 = 15.$$

U teoriji brojeva vrijedi

Teorem

Ako je n prirodni broj i $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ rastav broja n na proste faktore, onda je broj

www.halapa.com

djelitelja τ(n) od n jednak

$$\tau(n)=(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot(\alpha_3+1)\cdot\ ...\ \cdot(\alpha_r+1).$$

Vježba 475

Koliko različitih djelitelja ima broj 216?

Rezultat: 16.

Zadatak 476 (Branko, srednja škola)

Dokažite nejednakost $3^n > 2\cdot n$, gdje je $n \in N$.

Rješenje 476

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \binom{n}{1}=n \quad , \quad \binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}.$$

Binomni poučak

Za svaki $a, b \in R$, $n \in N$ vrijedi

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\ ...\ +\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+b^n.$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ ...\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot k}.$$

www.halapa.com

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

1.inačica

Uporabimo binomnu formulu.

$$3^n=(1+2)^n=1^n+\binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot 2^1+\binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot 2^2+\ ...\ +2^n=$$

$$=1+n\cdot 2+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 4+\ ...\ +2^n=1+2\cdot n+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 4+\ ...\ +2^n=1+2\cdot n+2\cdot n\cdot(n-1)+\ ...\ +2^n\geq$$

$$=1+2\cdot n \ \Rightarrow\ 3^n\geq 2\cdot n+1\ \Rightarrow\ 3^n>2\cdot n.$$

Primijetimo da u binarnoj formuli za svaki prirodni broj n uvijek postoje prva dva člana.

2.inačica

Uočimo da za neki prirodni broj n je:

$$3^{n+1}-3^n>2.$$

Provjerimo!

$$3^{n+1}-3^{n}>2 \Rightarrow 3^{n}\cdot 3^{1}-3^{n}>2 \Rightarrow 3^{n}\cdot\left(3^{1}-1\right)>2 \Rightarrow 3^{n}\cdot 2>2.$$

Zato vrijedi niz nejednakosti:

$$\left.\begin{array}{l} 3^{2}-3>2 \\ 3^{3}-3^{2}>2 \\ 3^{4}-3^{3}>2 \\ 3^{5}-3^{4}>2 \\ \ldots \\ 3^{n}-3^{n-1}>2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{2}-3+3^{3}-3^{2}+3^{4}-3^{3}+3^{5}-3^{4}+\ldots+3^{n}-3^{n-1}>\underbrace{2+2+2+2+\ldots+2}_{n-1 \text{ pribrojnik}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{2}-3+3^{3}-3^{2}+3^{4}-3^{3}+3^{5}-3^{4}+\ldots+3^{n}-3^{n-1}>2\cdot(n-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3+3^{n}>2\cdot n-2 \Rightarrow 3^{n}>2\cdot n-2+3 \Rightarrow 3^{n}>2\cdot n+1 \Rightarrow 3^{n}>2\cdot n.$$

3.inačica

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 1

$$3^{1}>2\cdot 1 \Rightarrow 3>2.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da vrijedi

$$3^{n}>2\cdot n \;-\; \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo nejednakost za sljedbenika n + 1:

$$3^{n+1}=3^{n}\cdot 3^{1}=3\cdot 3^{n}>\left[3^{n}>2\cdot n\right]>3\cdot 2\cdot n=6\cdot n=2\cdot n+4\cdot n>\left[4\cdot n>2\right]>$$

$$>2\cdot n+2=2\cdot(n+1).$$

Vježba 476

Dokažite nejednakost $4^{n}>3\cdot n$, gdje je $n\in N$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 477 (Martina, srednja škola)

Racionaliziraj nazivnik $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{10}}$.

Rješenje 477

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^{2}-b^{2} \quad,\quad \left(\sqrt{a}\right)^{2}=a \quad,\quad \frac{n}{1}=n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

www.halapa.com

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{10}} = \frac{1}{2+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2\cdot 5}} = \frac{1}{2+\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)+\left(2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)+\sqrt{2}\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)} = \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2\right)\cdot\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2\right)} = \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{(5-4)\cdot(2-1)} = \frac{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{1\cdot 1} = \left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Vježba 477

Racionaliziraj nazivnik $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{10}}$.

Rezultat: $\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)$.

Zadatak 478 (Jadranka, srednja škola)

Pojednostavnite izraz: $\left(\sqrt[6]{9+4\cdot\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

A. 2 *B.* −2 *C.* −1 *D.* 1

Rješenje 478

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \geq 0 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 = (a+b)^2 \quad , \quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}.$$

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2 \quad , \quad \sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$\left(\sqrt[6]{9+4\cdot\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \left(\sqrt[6]{4+4\cdot\sqrt{5}+5}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} =$$

$$= \left(\sqrt[6]{2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \left(\sqrt[6]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} =$$

$$= \left(\sqrt[6]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} =$$

$$= 2\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 2\cdot\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)} = 2\cdot\sqrt[3]{2^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = 2\cdot\sqrt[3]{4-5} =$$

$$= 2\cdot\sqrt[3]{-5} = 2\cdot(-1) = -2.$$

Odgovor je pod B.

www.halapa.com

Vježba 478

Pojednostavnite izraz: $\left(\sqrt[6]{9-4\cdot\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}.$

$A.\ 2 \qquad B.\ -2 \qquad C.\ -1 \qquad D.\ 1$

Rezultat: B.

Zadatak 479 (Jadranka, srednja škola)

Izračunati $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ ako je $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1},\ b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}.$

$A.\ 1 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 2$

Rješenje 479

Ponovimo!

$$a^{1}=a \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}} \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^{2}=a \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^{2}-b^{2}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

www.halapa.com

$$(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\left[\begin{array}{l} a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}=\frac{1}{2+\sqrt{3}} \\ b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}=\frac{1}{2-\sqrt{3}} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2-\sqrt{3}}+1}=\frac{1}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{1}}+\frac{1}{\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{1}}=\frac{1}{\frac{1+2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\frac{1+2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{1}{\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}+\frac{\frac{1}{1}}{\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{6-2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}+6+2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}}{3^{2}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}}=$$

$$=\frac{6-2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3}-3+6+2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}-3}{9-3}=\frac{6-2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3}-3+6+2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}-3}{6}=$$

$$=\frac{6}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 479

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 480 (Marko, srednja škola)

Ako je $x^2+x+1=0$ izračunaj $x^{100}+x^{-100}+1$.

$A.\ 1 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 2$

Rješenje 480

Ponovimo!

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right) \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \frac{0}{n}=0 \ , \ n\neq 0.$$

Uvjerimo se da iz $x^2+x+1=0$ slijedi $x^3=1$.

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x^2+x+1=0 \ /\cdot(x-1) \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)=0 \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1.$$

Sada je:

$$x^{100}+x^{-100}+1=x^{99+1}+x^{-99-1}+1=x^{99}\cdot x^1+x^{-99}\cdot x^{-1}+1=$$

$$=\left(x^3\right)^{33}\cdot x^1+\left(x^3\right)^{-33}\cdot x^{-1}+1=\left[x^3=1\right]=1^{33}\cdot x+1^{-33}\cdot\frac{1}{x}+1=x+\frac{1}{x}+1=$$

$$=\frac{x}{1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{1}=\frac{x^2+1+x}{x}=\frac{x^2+x+1}{x}=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ x^2+x+1=0\end{array}\right]=\frac{0}{x}=0.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 480

Ako je $x^2+x+1=0$ izračunaj $x^{34}+x^{-34}+1$.

$A.\ 1 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 2$

Rezultat: C.

www.halapa.com