Zadatak 001 (Kristina, gimnazija)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+5}$.

Rješenje 001

Ako su nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ konvergentni, tada vrijede sljedeća pravila o graničnoj vrijednosti (limesu):

$\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, c je konstanta , $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c}{n}=0$, c je konstanta , $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, c je konstanta,

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$.

1.inačica

Podijelimo brojnik **2n – 3** s nazivnikom **n + 5**:

$$\begin{array}{l}(2n-3):(n+5)=2\\ \pm 2n\pm 10\\ -----\\ \quad -13\end{array}.$$

Sada se razlomak može napisati:

$$\frac{2n-3}{n+5}=2-\frac{13}{n+5}.$$

Računamo limes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{13}{n+5}\right)=\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{13}{n+5}=2-0=2.$$

2.inačica

Brži je način podijeliti brojnik i nazivnik najvećom potencijom od n koja se pojavljuje u razlomku. U našem slučaju to je potencija **n**.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}-\frac{3}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{5}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}=$$

$$=\frac{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}=\frac{2-0}{1+0}=2.$$

Vježba 001

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n+1}{2n-3}$.

Rezultat: 4.

Zadatak 002 (Maja, gimnazija)

Izračunaj graničnu vrijednost (limes) niza

$$a_n=\frac{n!}{(n+1)!}.$$

Rješenje 002

Važno je zapamtiti sljedeći limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n!\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Vježba 002

Izračunaj graničnu vrijednost (limes) niza

$$a_n = \frac{(n+1)!}{(n+2)!}.$$

Rezultat: 0.

Zadatak 003 (Maja, gimnazija)

Izračunaj graničnu vrijednost (limes) niza

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}.$$

Rješenje 003

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$$

Pri traženju limesa količnika dvaju cijelih polinoma varijable n kada n → ∞, preporučljivo je oba člana količnika prethodno podijeliti s n^p, gdje je p najveći eksponent potencija tih polinoma.

Također je važno zapamtiti sljedeći limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}} = \sqrt{\frac{1+0}{1+0}} = 1.$$

Vježba 003

Izračunaj graničnu vrijednost (limes) niza

$$a_n = \frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

Rezultat: 2.

Zadatak 004 (Nina, Jelena, komercijalna škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x}-(1-x)^2}{\sin^2 x}$..

Rješenje 004

Ponovimo L' Hospitalovo pravilo [čitaj: Lopitál].

Neka zadana funkcija ima oblik količnika $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ i neka je za x = a ona jednaka $f(a) = \frac{u(a)}{v(a)} = \frac{0}{0}$ ili

$f(a) = \frac{u(a)}{v(a)} = \frac{\infty}{\infty}$, tada je prava vrijednost funkcije f(x) za x = a, tj.

$$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u''(x)}{v''(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'''(x)}{v'''(x)}=\ldots \text{ itd,}$$

dok ne dođemo do određene vrijednosti konačne ili beskonačne. Derivira se posebno brojnik i posebno nazivnik, pri čemu se iza svakog deriviranja dobiveni izraz uredi i uvrsti zadani x = a. Zadatak je riješen, čim dobijemo u brojniku ili u nazivniku konačnu ili beskonačnu vrijednost.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-(1-x)^2}{\sin^2 x}=\left[\begin{array}{c} x=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{e^0-(1-0)^2}{\sin^2 0}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0} \\ \text{deriviramo posebno brojnik, posebno nazivnik}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}\cdot(-2)-2\cdot(1-x)\cdot(-1)}{2\cdot\sin x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot e^{-2x}+2\cdot(1-x)}{\sin 2x}=$$

$$=\left[\begin{array}{c} x=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{-2\cdot e^0+2\cdot 1}{\sin 0}=\dfrac{-2+2}{0}=\dfrac{0}{0} \\ \text{deriviramo posebno brojnik, posebno nazivnik}\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot e^{-2x}\cdot(-2)+2\cdot(-1)}{\cos 2x\cdot 2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot e^{-2x}-2}{2\cdot\cos 2x}=\left[\begin{array}{c} x=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{4\cdot e^0-2}{2\cdot\cos 0}=\dfrac{4\cdot 1-2}{2\cdot 1}=\dfrac{2}{2} \\ \text{zadatak je riješen}\end{array}\right]=\frac{4\cdot e^0-2}{2\cdot\cos 0}=\frac{4\cdot 1-2}{2\cdot 1}=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

Vježba 004

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^3}$..

Rezultat: $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}=\left[x=0 \;\Rightarrow\; \frac{1-\cos 0}{0^3}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-(-\sin x)}{3\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3\cdot x^2}=$$

$$=\left[x=0 \;\Rightarrow\; \frac{\sin 0}{3\cdot 0^2}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6\cdot x}=\left[x=0 \;\Rightarrow\; \frac{\cos 0}{6\cdot 0}=\frac{1}{0}\right]=\frac{\cos 0}{6\cdot 0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Zadatak 005 (Nina, Jelena, Tina, studentice)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 x}{1-\cos^3 x}$.

Rješenje 005

Ponovimo L' Hospitalovo pravilo [čitaj: Lopitál].

Neka zadana funkcija ima oblik količnika $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ i neka je za x = a ona jednaka $f(a)=\dfrac{u(a)}{v(a)}=\dfrac{0}{0}$ ili $f(a)=\dfrac{u(a)}{v(a)}=\dfrac{\infty}{\infty}$, tada je prava vrijednost funkcije f(x) za x = a, tj.

$$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u''(x)}{v''(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'''(x)}{v'''(x)}=\ldots \text{ itd,}$$

dok ne dođemo do određene vrijednosti konačne ili beskonačne. Derivira se posebno brojnik i posebno nazivnik, pri čemu se iza svakog deriviranja dobiveni izraz uredi i uvrsti zadani x = a. Zadatak je riješen, čim dobijemo u brojniku ili u nazivniku konačnu ili beskonačnu vrijednost.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 x}{1-\cos^3 x}=\left[\begin{array}{c} x=0\ \Rightarrow\ \dfrac{tg^2 0}{1-\cos^3 0}=\dfrac{0}{1-1}=\dfrac{0}{0} \\ \text{deriviramo posebno brojnik, posebno nazivnik}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot tg\,x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{-3\cdot\cos^2 x\cdot(-\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3\cdot\cos^2 x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\cdot\sin x}{\cos^3 x}}{\dfrac{3\cdot\cos^2 x\cdot\sin x}{1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin x}{3\cdot\cos^5 x\cdot\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3\cdot\cos^5 x}=\left[\begin{array}{c}\dfrac{2}{3\cdot\cos^5 x}\neq\dfrac{0}{0} \\ \text{zadatak je riješen}\end{array}\right]=\frac{2}{3\cdot\cos^5 0}=\frac{2}{3\cdot 1}=\frac{2}{3}.$$

Vježba 005

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{ctg^2 x}{1-\sin x}$.

Rezultat:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctg^2 x}{1-\sin x}=\left[\begin{array}{c} x=\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \dfrac{ctg^2\frac{\pi}{2}}{1-\sin\frac{\pi}{2}}=\dfrac{0}{1-1}=\dfrac{0}{0} \\ \text{deriviramo posebno brojnik, posebno nazivnik}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cdot ctg\,x\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{-2\cdot\cos x}{\sin^3 x}}{\dfrac{-\cos x}{1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot\cos x}{-\sin^3 x\cdot\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\sin^3 x}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\dfrac{2}{\sin^3 x}\neq\dfrac{0}{0} \\ \text{zadatak je riješen}\end{array}\right]=\frac{2}{\sin^3\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{1}=2.$$

Zadatak 006 (Ivana, hotelijerska škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Rješenje 006

Budući da izraz sadrži iracionalnosti, moramo ga dovesti u racionalni oblik uvođenjem supstitucije. Da bismo se riješili drugog i trećeg korijena, uvodimo novu varijablu:

$$t^6=x\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} x=64\ \Rightarrow\ t^6=64 \\ t=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2\end{array}\right]\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l} x\to 64 \\ t\to 2\end{array}\right].$$

Dalje računamo:

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t^6}-8}{\sqrt[3]{t^6}-4}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}.$$

Podsjetimo se!

Ako računamo $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ i vrijedi $P(a)=Q(a)=0,$ tada moramo razlomak $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ skratiti jedanputa ili više puta s binomom x – a.

U našem slučaju razlomak $\dfrac{t^3-8}{t^2-4}$ moramo skratiti s binomom t – 2:

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\begin{bmatrix} a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right) \\ a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\end{bmatrix}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)\cdot\left(t^2+2\cdot t+4\right)}{(t-2)\cdot(t+2)}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2+2\cdot t+4}{t+2}=$$

$$=\frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2}=\frac{4+4+4}{4}=\frac{12}{4}=3.$$

Vježba 006

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}.$

Rezultat: $\dfrac{4}{3}.$

Zadatak 007 (Ivana, hotelijerska škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$

Rješenje 007

Pri traženju limesa količnika dvaju polinoma po varijabli x kada $x\to\infty$, preporučljivo je i brojnik i nazivnik prethodno podijeliti sa x^n, gdje je x^n najviša potencija tih polinoma.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\begin{bmatrix}\text{brojnik i nazivnik} \\ \text{podijelimo sa } \sqrt{x}\end{bmatrix}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}=\left[x\to\infty\ \Rightarrow\ \frac{1}{x}\to 0\ \text{ i }\ \frac{1}{x^3}\to 0\right]=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}}=\frac{1}{1}=1.$$

Vježba 007

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cdot x^2+5x}{x^2+3\cdot x+4}.$

Rezultat: 2.

Zadatak 008 (Ivana, hotelijerska škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x \to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}.$

Rješenje 008

Limes iracionalnog izraza često se računa i tako da prebacimo iracionalnost iz brojnika u nazivnik (da se riješimo korijena u brojniku) ili obrnuto iz nazivnika u brojnik (da se riješimo korijena u nazivniku).

$$\lim_{x \to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \left[(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2\right] = \lim_{x \to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \cdot \frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{1-5+x} = \lim_{x \to 4} \frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{x-4} \cdot \frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}} = \lim_{x \to 4} \frac{(9-5-x)\cdot\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(x-4)\cdot\left(3+\sqrt{5+x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(4-x)\cdot\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(x-4)\cdot\left(3+\sqrt{5+x}\right)} = \lim_{x \to 4} \frac{-(x-4)\cdot\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(x-4)\cdot\left(3+\sqrt{5+x}\right)} = \lim_{x \to 4} \frac{-\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{3+\sqrt{5+x}} = \frac{-\left(1+\sqrt{5-4}\right)}{3+\sqrt{5+4}} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Vježba 008

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2-x}{1-\sqrt{x-1}}.$

Rezultat: 2.

Zadatak 009 (Ivana, hotelijerska škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$

Rješenje 009

Limes iracionalnog izraza često se računa i tako da prebacimo iracionalnost iz brojnika u nazivnik (da se riješimo korijena u brojniku) ili obrnuto iz nazivnika u brojnik (da se riješimo korijena u nazivniku).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \left[(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1+x-1+x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cdot x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cdot x}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Vježba 009

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2\cdot x}.$

Rezultat: $\frac{1}{2}.$

Zadatak 010 (Ivana, hotelijerska škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$.

Rješenje 010

Pri računanju limesa često se koristimo formulom $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, na primjer

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Sada računamo limes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\sin 2x}{x}}{\frac{x+\sin 3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}-\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\sin 3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin 2x}{x}}{1+\frac{\sin 3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{1+3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}=$$

$$=\frac{1-2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{1+3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{1-2\cdot 1}{1+3\cdot 1}=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}.$$

Vježba 010

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x+\sin 3x}$.

Rezultat: 0.

Zadatak 011 (Ivana, hotelijerska škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Rješenje 011

Pri računanju limesa često se koristimo formulom $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, na primjer

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\right)=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4.$$

Sada računamo limes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\left[(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\cdot\frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cdot\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{funkcija polovičnog kuta}\\ 1-\cos\alpha=2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cdot\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}\cdot\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=$$

$$=\frac{2}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}\cdot\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Vježba 011

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4-4\cdot\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 012 (Ivana, hotelijerska škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

Rješenje 012

Pri računanju limesa često se koristimo formulom $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, na primjer

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}\right)=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

Sada računamo limes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}=\left[(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-1+\sin x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{1+1}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Vježba 012

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{2x}$.

Rezultat: $\frac{1}{2}$.

Zadatak 013 (Bety, gimnazija)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim\limits_{x\to 2}\left(x-\frac{x^2-4}{x-2}\right)$.

Rješenje 013

1.inačica

$$\lim_{x\to 2}\left(x-\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=2-\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}=2-\lim_{x\to 2}(x+2)=2-4=-2.$$

2.inačica

$$\lim_{x\to 2}\left(x-\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x\cdot(x-2)-\left(x^2-4\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2\cdot x-x^2+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-2\cdot x+4}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2\cdot(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(-2)=-2.$$

Vježba 013

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim_{x\to 3}\left(x-\frac{x^2-9}{x-3}\right)$.

Rezultat: – 3.

Zadatak 014 (Bety, gimnazija)

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5\cdot x+6}{x-2}$.

Rješenje 014

1.inačica

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5\cdot x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2\cdot x-3\cdot x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x\cdot(x-2)-3\cdot(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}(x-3)=2-3=-1.$$

2.inačica

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5\cdot x+6}{x-2}=\left[\begin{array}{c}\text{supstitucija}\\ \lim_{x\to a}f(x)\Rightarrow x=u+a\ \Rightarrow\ x\to a\ \Rightarrow\ u\to 0\ \Rightarrow\ \lim_{u\to 0}f(u+a)\\ x=u+2\ \Rightarrow\ x\to 2\ \Rightarrow\ u\to 0\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(u+2)^2-5\cdot(u+2)+6}{u+2-2}=\lim_{u\to 0}\frac{u^2+4\cdot u+4-5\cdot u-10+6}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{u^2-u}{u}=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u\cdot(u-1)}{u}=\lim_{u\to 0}(u-1)=0-1=-1.$$

Vježba 014

Odredite graničnu vrijednost (limes) izraza: $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4}$.

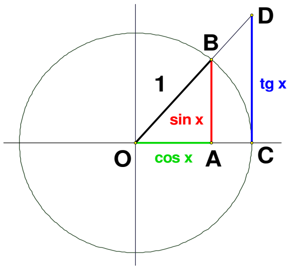
Rezultat: 7.

Zadatak 015 (Ivana, Goran, Jelena, Edita, ekonomski fakultet)

Dokažite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Rješenje 015

Sa slike vidi se da je površina trokuta OAB manja od površine kružnog isječka OCB, a površina kružnog isječka OCB manja je od površine trokuta OCD:



$$P_{OAB} < P_{OCB} < P_{OCD} \Rightarrow \frac{\cos x \cdot \sin x}{2} < \frac{1 \cdot x}{2} < \frac{1 \cdot tg\, x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \cdot \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg\, x}{2}.$$

Pomnožimo nejednakost izrazom $\frac{2}{\sin x}$:

$$\frac{\cos x \cdot \sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg\, x}{2} \; / \cdot \frac{2}{\sin x} \Rightarrow \frac{\cos x \cdot \sin x}{2} \cdot \frac{2}{\sin x} < \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{\sin x} < \frac{tg\, x}{2} \cdot \frac{2}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos x \cdot \sin x}{2} \cdot \frac{2}{\sin x} < \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{\sin x} < \frac{tg\, x}{2} \cdot \frac{2}{\sin x} \Rightarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < tg\, x \cdot \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Prijeđemo li na recipročne vrijednosti, dobije se (znak nejednakosti se mijenja):

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Zbog neprekidnosti funkcija $\frac{1}{\cos x}$ i $\cos x$ u točki x = 0 slijedi:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \cos = \cos 0 = 1.$$

Budući da prvi i treći član u nejednakosti $\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ teže istoj graničnoj vrijednosti 1, a količnik $\frac{\sin x}{x}$ se uvijek nalazi između ta dva člana, zato i on mora težiti prema istoj graničnoj vrijednosti 1.

Prema tome je:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Vježba 015

Dokažite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1.$

Rezultat: Točno je.

Zadatak 016 (Ivana, studentica)

Nađite limes: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2 \cdot x}{x+1}}.$

Rješenje 016

Ponovimo!

Pri određivanju limesa oblika

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = C,$$

gdje je f(x) pozitivna funkcija u nekoj okolini točke a (x ≠ a), treba imati u vidu ovo:

- ako egzistiraju konačni limesi

$$\lim_{x \to a} f(x) = A > 0 \text{ i } \lim_{x \to a} g(x) = B \text{ gdje je } 0 \le A \le +\infty, -\infty \le B \le +\infty, \text{ tada je } C = A^B.$$

Najprije uvedemo supstituciju i izračunamo limese funkcija f(x) i g(x):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2\cdot x}{x+1}}=C \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{supstitucija} \\ t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t} \\ x\to\infty \Rightarrow t\to 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lim_{t\to 0} t^2=A \\ \lim_{t\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1}=B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lim_{t\to 0} t^2=A \\ \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2}{t}}{\frac{1+t}{t}}=B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \lim_{t\to 0} t^2=A \\ \lim_{t\to 0}\frac{2}{1+t}=B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A=0 \\ B=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[C=A^B\right] \Rightarrow C=0^2 \Rightarrow C=0.$$

Vježba 016

Nađite limes: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3\cdot x}{x+1}}$.

Rezultat: 0.

Zadatak 017 (Ivana, studentica)

Dokažite da je: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$, $k\in N$.

Rješenje 017

Ponovimo!

$$a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\begin{bmatrix} \text{supstitucija} \\ n=k\cdot m \\ n\to\infty \Rightarrow m\to\infty \end{bmatrix}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{k}{k\cdot m}\right)^{k\cdot m}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{k\cdot m}=$$

$$=\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^k=e^k.$$

Vježba 017

Dokažite da je: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n=e^5$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 018 (Ivana, studentica)

Izračunajte limes: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt[n]{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2\cdot n}$.

Rješenje 018

Ponovimo!

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt[n]{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2\cdot n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\sqrt[n]{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\cdot n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt[n]{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\cdot n}}=\frac{1+\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}{\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]}=$$

$$=\frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1+1}{e\cdot e}=\frac{2}{e^{2}}.$$

Vježba 018

Izračunajte limes: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt[n]{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-3\cdot n}$.

Rezultat: $\frac{2}{e^{3}}$.

Zadatak 019 (Ivana, studentica)

Izračunajte limes: $\lim\limits_{x\to 1+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Rješenje 019

Ponovimo!

$$(u+v)'=u'+v' \quad , \quad (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \quad , \quad x'=1 \quad , \quad (\ln x)'=\frac{1}{x} \quad , \quad \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^{2}}$$

L' Hospitalovo pravilo [čitaj: Lopitál].

Neka zadana funkcija ima oblik količnika $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ i neka je za x = a ona jednaka $f(a)=\frac{u(a)}{v(a)}=\frac{0}{0}$ ili $f(a)=\frac{u(a)}{v(a)}=\frac{\infty}{\infty}$, tada je prava vrijednost funkcije f(x) za x = a, tj.

$$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u''(x)}{v''(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'''(x)}{v'''(x)}=\ldots \text{ itd,}$$

dok ne dođemo do određene vrijednosti konačne ili beskonačne. Derivira se posebno brojnik i posebno nazivnik, pri čemu se iza svakog deriviranja dobiveni izraz uredi i uvrsti zadani x = a. Zadatak je riješen, čim dobijemo u brojniku ili u nazivniku konačnu ili beskonačnu vrijednost.

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1+}\frac{x\cdot\ln x-(x-1)}{(x-1)\cdot\ln x}=\lim_{x\to 1+}\frac{x\cdot\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x\cdot\ln x-x+1)'}{((x-1)\cdot\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1+0}{1\cdot\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1+}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1+}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left[\begin{array}{l}\text{opet je neodređeni oblik } \frac{0}{0},\\ \text{ponovno L'Hospitalovo pravilo}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln x+1-\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+0+\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}=\frac{1}{2}.$$

Vježba 019

Izračunajte limes: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2}-1}{x-1}$.

Rezultat: 2.

Zadatak 020 (Mirjana, gimnazija)

Izračunajte limes: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\cdot n}\right)^{2\cdot n+1}$.

Rješenje 020

Ponovimo!

$$a^{n+m}=a^n\cdot a^m \quad , \quad \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n \quad , \quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\cdot n}\right)^{2\cdot n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\cdot n}\right)^{2\cdot n}\cdot\left(1+\frac{1}{3\cdot n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\cdot n}\right)^{2\cdot n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\cdot n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\cdot n}\right)^{3\cdot n\cdot\frac{2}{3}}\cdot\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\cdot n}\right)=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\cdot n}\right)^{3\cdot n}\right]^{\frac{2}{3}}\cdot(1+0)=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\cdot n}\right)^{3\cdot n}\right]^{\frac{2}{3}}\cdot 1=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3\cdot n}\right)^{3\cdot n}\right]^{\frac{2}{3}}=\left[\begin{array}{l}\text{supstitucija}\\ m=3\cdot n\\ n\to\infty\ \Rightarrow\ m\to\infty\end{array}\right]=\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}.$$

Vježba 020

Izračunajte limes: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2\cdot n}\right)^{n+1}.$

Rezultat: $\sqrt{e}.$