

Zadatak 081 (Ana, strukovna škola)

Koliko je $g'(6)$, ako je $g(x) = \sqrt{(2 \cdot x - 3)^3}$?

Rješenje 081

Ponovimo!

$$n\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad n = \frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Oznake za derivaciju su:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	Derivacija
c	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Ako je c konstanta, a $u = f(x)$, $v = g(x)$ su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))', \quad (f(x) \pm g(x))' = (f(x))' \pm (g(x))'.$$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ili $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{(2 \cdot x - 3)^3} \Rightarrow g(x) = (2 \cdot x - 3)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow g'(x) = \left((2 \cdot x - 3)^{\frac{3}{2}} \right)' \\ &\Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot x - 3)^{\frac{3}{2} - 1} \cdot (2 \cdot x - 3)' \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot x - 3)^{\frac{3}{2} - 1} \cdot (2 \cdot x' - 3') \\ &\Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot x - 3)^{\frac{3-2}{2}} \cdot (2 \cdot x' - 0) \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2} \cdot (2 \cdot x - 3)^{\frac{1}{2}} \cdot (2 \cdot 1 - 0) \\ &\Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot x - 3} \cdot 2 \Rightarrow g'(x) = 3 \cdot \sqrt{2 \cdot x - 3} \Rightarrow g'(x) = 3 \cdot \sqrt{2 \cdot x - 3}. \end{aligned}$$

Tada je:

$$\left. \begin{aligned} x &= 6 \\ g'(x) &= 3 \cdot \sqrt{2 \cdot x - 3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g'(6) = 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 6 - 3} \Rightarrow g'(6) = 3 \cdot \sqrt{12 - 3} \Rightarrow g'(6) = 3 \cdot \sqrt{9} \Rightarrow g'(6) = 3 \cdot 3 \Rightarrow g'(6) = 9.$$

Vježba 081

Koliko je $g'(2)$, ako je $g(x) = \sqrt{(2 \cdot x - 3)^3}$?

Rezultat: 3.

Zadatak 082 (Martina, Kornelija, bivše maturantice ©)

Odredi derivaciju funkcije $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Rješenje 082

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Oznake za derivaciju su:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	Derivacija
c	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Derivacija zbroja: $(f + g)' = f' + g'$.

Derivacija razlike: $(f - g)' = f' - g'$.

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ili $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow f'(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \right)' - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)'$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)' - \frac{x' \cdot \sqrt{x^2-1} - x \cdot \left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(x' + \left(\sqrt{x^2-1}\right)'\right) - \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}} \cdot (x^2-1)'}{x^2-1} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}} \cdot (x^2-1)'\right) - \frac{\sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}} \cdot 2 \cdot x}{x^2-1} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}} \cdot 2 \cdot x\right) - \frac{\sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}} \cdot 2 \cdot x}{x^2-1} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}} \cdot 2 \cdot x\right) - \frac{\sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}} \cdot 2 \cdot x}{x^2-1} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot x\right) - \frac{\sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot x}{x^2-1} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) - \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) - \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 - x^2}{x^2-1} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x^2 - 1 - x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x^2 - 1 - x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{-1}{x^2 - 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{-1}{\frac{x^2 - 1}{1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{-1}{(x^2 - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{(x^2 - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 1 + 1}{(x^2 - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{x^2 - 1 + 1}{(x^2 - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{(x^2 - 1)^1 \cdot (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{(x^2 - 1)^{1 + \frac{1}{2}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{x^2}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}. \end{aligned}$$

Vježba 082

Odredi derivaciju funkcije $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 + 1})$.

Rezultat: $\frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Zadatak 083 (Petra, gimnazija)

Odredi derivaciju funkcije $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}$.

Rješenje 083

Ponovimo!

Ako je f realna funkcija definirana u točki x i u okolini točke x te ako postoji granična vrijednost (limes)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

onda se broj

$$f'(x)$$

zove derivacija funkcije f u točki x . Veličina Δx zove se prirast argumenta i ona pokazuje razliku

(diferenciju) argumenta funkcije f , dok se $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ naziva prirast funkcije i vidi se da Δy pokazuje razliku (diferenciju) odgovarajućih funkcijskih vrijednosti. Izraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

naziva se kvocijentom razlika funkcije f u točki x pa se može pisati

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	Derivacija
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\cos x$	$-\sin x$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ili $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

Derivacija zbroja:

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad a^x = a^x, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \right)' \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(\cos x)' \cdot (1 + \cos^2 x) - \cos x \cdot (1 + \cos^2 x)'}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{-\sin x \cdot (1 + \cos^2 x) - \cos x \cdot (1' + (\cos^2 x)')}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{-\sin x \cdot (1 + \cos^2 x) - \cos x \cdot (0 + 2 \cdot \cos x \cdot (\cos x)')}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{-\sin x \cdot (1 + \cos^2 x) - \cos x \cdot (0 + 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x))}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{-\sin x \cdot (1 + \cos^2 x) - \cos x \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x)}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{-\sin x - \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x + \sin x \cdot \cos^2 x}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{-\sin x \cdot (1 - \cos^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sin^2 x}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin^3 x}{(1 + \cos^2 x)^2}. \end{aligned}$$

Vježba 083

Oredi derivaciju funkcije $f(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$.

Rezultat: $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$, $\frac{\sin 2x}{(1 + \cos^2 x)^2}$.

Zadatak 084 (Mario, gimnazija)

Oredi derivaciju funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.

Rješenje 084

Ponovimo!

Ako je f realna funkcija definirana u točki x i u okolini točke x te ako postoji granična vrijednost (limes)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

onda se broj

$$f'(x)$$

zove derivacija funkcije f u točki x . Veličina Δx zove se prirast argumenta i ona pokazuje razliku (diferenciju) argumenta funkcije f , dok se $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ naziva prirast funkcije i vidi se da Δy pokazuje razliku (diferenciju) odgovarajućih funkcijskih vrijednosti. Izraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

naziva se kvocijentom razlika funkcije f u točki x pa se može pisati

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	Derivacija
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Derivacija zbroja:

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Derivacija razlike:

$$(f - g)' = f' - g'.$$

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}\right)' \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 - 4)' \cdot (x^2 + 4) - (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4)'}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{\left((x^2)' - 4'\right) \cdot (x^2 + 4) - (x^2 - 4) \cdot \left((x^2)' + 4'\right)}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2 \cdot x - 0) \cdot (x^2 + 4) - (x^2 - 4) \cdot (2 \cdot x + 0)}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot x \cdot (x^2 + 4) - (x^2 - 4) \cdot 2 \cdot x}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot x^3 + 8 \cdot x - 2 \cdot x^3 + 8 \cdot x}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot x^3 + 8 \cdot x - 2 \cdot x^3 + 8 \cdot x}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{8 \cdot x + 8 \cdot x}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{16 \cdot x}{(x^2 + 4)^2}. \end{aligned}$$

Vježba 084

Odredi derivaciju funkcije $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Rezultat: $\frac{-4 \cdot x}{(x^2 - 1)^2}$.

Zadatak 085 (Marin, veleučilište)

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$.

Rješenje 085

Ponovimo!

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije $y = f(x)$

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y' = f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x) = 0$$

III. Riješi se dobivena jednačba

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \dots, x_i \text{ su rješenja jednačbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y'' = f''(x) = (f'(x))'$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y''' = f'''(x) = (f''(x))'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i) \neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$$

IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i) = 0$, slijede daljnja istraživanja.

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0.$$

Ako je c konstanta, a $u = f(x)$, $v = g(x)$ su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))' \quad , \quad (f(x) \pm g(x))' = (f(x))' \pm (g(x))'$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	Derivacija
c, konstanta	0
x	1
x ⁿ	n · x ⁿ⁻¹

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ili $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \frac{a}{b} = 0 \quad , \quad b \neq 0 \Rightarrow a = 0.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Računamo prvu derivaciju zadane funkcije:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} &\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2+8}{x-1} \right)' \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+8)' \cdot (x-1) - (x^2+8) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{\left(\left(x^2 \right)' + 8' \right) \cdot (x-1) - (x^2+8) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{(2 \cdot x + 0) \cdot (x-1) - (x^2+8) \cdot (1-0)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot x \cdot (x-1) - (x^2+8) \cdot 1}{(x-1)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - x^2 - 8}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x - 8}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Prvu derivaciju funkcije izjednačimo s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu (tražimo stacionarne točke).

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2 \cdot x - 8}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{razlomak je jednak nuli} \\ \text{ako je brojnik jednak nuli,} \\ \text{nazivnik mora biti različit od nule} \\ x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{array} \right] \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot x - 8 = 0 \\ a=1, b=-2, c=-8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=1, b=-2, c=-8 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{2+6}{2} \\ x_2 = \frac{2-6}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{2} \\ x_2 = -\frac{4}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{2} \\ x_2 = -\frac{4}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{array} \right\} - \text{stacionarne točke.}$$

Tražimo drugu derivaciju tako da deriviramo prvu derivaciju zadane funkcije.

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{x^2 - 2 \cdot x - 8}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 2 \cdot x - 8) \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2 \cdot x - 8)' \cdot ((x-1)^2)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{\left((x^2)' - (2 \cdot x)' - 8' \right) \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2 \cdot x - 8) \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2 \cdot x - 2 \cdot x' - 0) \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2 \cdot x - 8) \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2 \cdot x - 2 \cdot 1) \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2 \cdot x - 8) \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot (1-0)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2 \cdot x - 2) \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2 \cdot x - 8) \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{(2 \cdot x - 2) \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2 \cdot x - 8) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2 \cdot x - 8) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot \left[(x-1)^2 - (x^2 - 2 \cdot x - 8) \right]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2 \cdot (x-1) \cdot \left[x^2 - 2 \cdot x + 1 - x^2 + 2 \cdot x + 8 \right]}{(x-1)^4} = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot \left[x^2 - 2 \cdot x + 1 - x^2 + 2 \cdot x + 8 \right]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2 \cdot (x-1) \cdot 9}{(x-1)^4} = \frac{18 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{18 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \frac{18}{(x-1)^3}.$$

Sada određujemo vrstu ekstrema (maksimum ili minimum) koje zadana funkcija ima u stacionarnim točkama.

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f''(x) = \frac{18}{(x-1)^3} \\ x=4 \end{array} \right\} \Rightarrow f''(4) = \frac{18}{(4-1)^3} \Rightarrow f''(4) = \frac{18}{3^3} > 0.$$

Funkcija ima minimum u točki $x = 4$ koji iznosi:

$$f(x) = \frac{x^2 + 8}{x-1} \left. \vphantom{f(x)} \right\} \Rightarrow f(4) = \frac{4^2 + 8}{4-1} \Rightarrow f(4) = \frac{16+8}{3} \Rightarrow f(4) = \frac{24}{3} \Rightarrow f(4) = \frac{24}{3} \Rightarrow f(4) = 8 \Rightarrow$$

$$x=4 \Rightarrow m(4, 8).$$

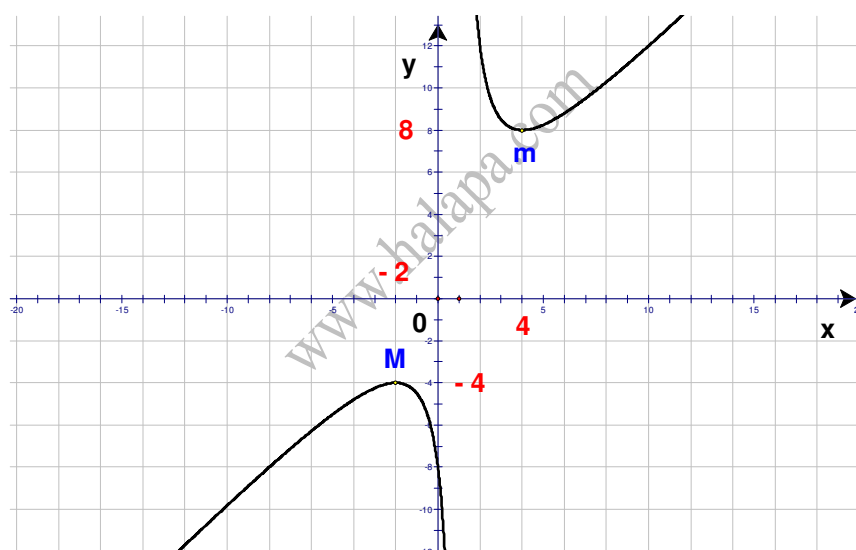
$$\bullet \quad f''(x) = \frac{18}{(x-1)^3} \left. \vphantom{f''(x)} \right\} \Rightarrow f''(-2) = \frac{18}{(-2-1)^3} \Rightarrow f''(-2) = \frac{18}{(-3)^3} \Rightarrow$$

$$x=-2 \Rightarrow f''(-2) = \frac{18}{-27} \Rightarrow f''(-2) = -\frac{18}{27} < 0.$$

Funkcija ima maksimum u točki $x = -2$ koji iznosi:

$$f(x) = \frac{x^2 + 8}{x-1} \left. \vphantom{f(x)} \right\} \Rightarrow f(-2) = \frac{(-2)^2 + 8}{-2-1} \Rightarrow f(-2) = \frac{4+8}{-3} \Rightarrow f(-2) = \frac{12}{-3} \Rightarrow f(-2) = \frac{12}{-3} \Rightarrow$$

$$x=-2 \Rightarrow f(-2) = -4 \Rightarrow M(-2, -4).$$



Vježba 085

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x + 2}{x-1}$.

Rezultat: $M(0, -2)$, $m(2, 2)$.

Zadatak 086 (Paula, maturantica)

Za koje vrijednosti koeficijenta a funkcija $f(x) = a \cdot x^3 + x^2 + 2 \cdot x + 2$ monotono raste na cijelom području definicije?

- A. $a < \frac{1}{6}$ B. $a > 0$ C. $a < -1$ D. $a > \frac{1}{6}$

Rješenje 086

Ponovimo!

$$a < b, c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	Derivacija
c, konstanta	0
x	1
x ⁿ	n · x ⁿ⁻¹

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da je funkcija f + g derivabilna pa slijedi:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))', \quad c \text{ je konstanta}, \quad (f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))'.$$

Ako je funkcija f diferencijabilna na intervalu $\langle a, b \rangle$ i $f'(x) > 0$ u svakoj točki intervala $\langle a, b \rangle$ tada funkcija raste na $\langle a, b \rangle$.

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je a > 0.

Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je a < 0.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja (korijena), tj. parabola siječe os x u dvije točke.
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje (korijen), tj. parabola dira os x u jednoj točki.
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja (korijene), tj. parabola ne siječe os x.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Određimo derivaciju funkcije.

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot x^3 + x^2 + 2 \cdot x + 2 \Rightarrow f'(x) = (a \cdot x^3 + x^2 + 2 \cdot x + 2)' \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x) &= (a \cdot x^3)' + (x^2)' + (2 \cdot x)' + 2' \Rightarrow f'(x) = a \cdot (x^3)' + 2 \cdot x + 2 \cdot x' + 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot 1 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2. \end{aligned}$$

Budući da funkcija mora monotono rasti na cijelom području definicije, slijedi:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2 > 0.$$

Uočimo da je f'(x) kvadratna funkcija koja mora biti pozitivna za svaki x. Vodeći je koeficijent

funkcije $f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2$ i a mora biti pozitivan (inače je parabola okrenuta prema dolje). Nadalje, njezine nultočke ne smiju biti realne pa mora biti $D < 0$.

$$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2 \\ a = 3 \cdot a, \quad b = 2, \quad c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow [b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot a \cdot 2 < 0 \Rightarrow 4 - 24 \cdot a < 0 \Rightarrow -24 \cdot a < -4 \Rightarrow -24 \cdot a < -4 \quad /: (-24) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a > \frac{4}{24} \Rightarrow a > \frac{1}{6}$$

Odgovor je pod D.

Vježba 086

Za koje vrijednosti koeficijenta a funkcija $f(x) = a \cdot x^3 + x^2 + 2 \cdot x + 2$ monotono pada na cijelom području definicije?

A. $a < \frac{1}{6}$ B. $a > 0$ C. $a < -1$ D. $a > \frac{1}{6}$

Rezultat: A.

Zadatak 087 (Paula, Ante, maturantica, tehnička škola)

Zatvorena limenka u obliku valjka izrađena je od materijala čija je cijena 70 kn / m². Kolika je cijena materijala potrebnoga za izradu jedne limenke čiji je obujam 0.35 L, ako je za njezinu izradu potrebno najmanje materijala? Napomena: Debljinu materijala i otpad treba zanemariti.

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$

Rješenje 087

Ponovimo!

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2, \quad 1 \text{ dm}^2 = \frac{1}{100} \text{ m}^2, \quad 1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3, \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine h imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Oplošje uspravnog valjka polumjera r i visine h računa se formulom

$$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	Derivacija
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da je funkcija $f + g$ derivabilna pa slijedi:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))', \quad c \text{ je konstanta}, \quad (f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))',$$

$$(f(x) - g(x))' = (f(x))' - (g(x))'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije $y = f(x)$

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y' = f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x) = 0$$

III. Riješi se dobivena jednažba

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \dots, x_i \text{ su rješenja jednažbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y'' = f''(x) = (f'(x))'$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y''' = f'''(x) = (f''(x))'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i) \neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

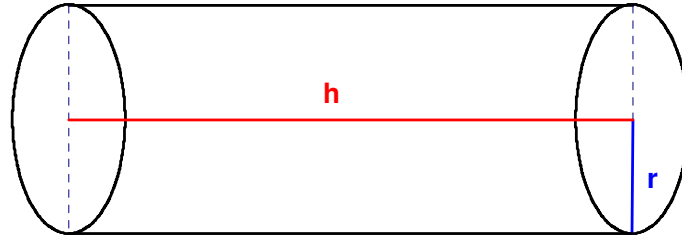
$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$$

IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i) = 0$, slijede daljnja istraživanja.





Moramo naći dimenzije konzerve zadanoga obujma koje će određivati najmanje oplošje. Trebamo izraziti oplošje kao funkciju polumjera r .

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} V &= r^2 \cdot \pi \cdot h \\ O &= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} r^2 \cdot \pi \cdot h &= V \\ O &= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} r^2 \cdot \pi \cdot h &= V \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi} \\ O &= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left. \begin{aligned} h &= \frac{V}{r^2 \cdot \pi} \\ O &= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \end{aligned} \right\} \Rightarrow O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{V}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow \\
 \Rightarrow O &= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{V}{r^2 \cdot \pi} \Rightarrow O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot V}{r}.
 \end{aligned}$$

Zahtjev za najmanjim oplošjem konzerve ekvivalentan je nalaženju minimuma funkcije

$$O(r) = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot V}{r}.$$

Nadimo prvu derivaciju funkcije!

$$\begin{aligned}
 O(r) &= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot V}{r} \Rightarrow O'(r) = \left(2 \cdot r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot V}{r} \right)' \Rightarrow O'(r) = \left(2 \cdot r^2 \cdot \pi \right)' + \left(\frac{2 \cdot V}{r} \right)' \Rightarrow \\
 \Rightarrow O'(r) &= 2 \cdot \pi \cdot \left(r^2 \right)' + 2 \cdot V \cdot \left(\frac{1}{r} \right)' \Rightarrow O'(r) = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot r + 2 \cdot V \cdot \left(-\frac{1}{r^2} \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow O'(r) &= 4 \cdot r \cdot \pi - \frac{2 \cdot V}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Tražimo stacionarnu točku. Iz uvjeta

$$O'(r) = 0$$

dobije se:

$$\begin{aligned}
 O'(r) = 0 &\Rightarrow 4 \cdot r \cdot \pi - \frac{2 \cdot V}{r^2} = 0 \Rightarrow 4 \cdot r \cdot \pi - \frac{2 \cdot V}{r^2} = 0 \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow 4 \cdot r^3 \cdot \pi - 2 \cdot V = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 4 \cdot r^3 \cdot \pi &= 2 \cdot V \Rightarrow 4 \cdot r^3 \cdot \pi = 2 \cdot V \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi} \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2 \cdot \pi} \Rightarrow r^3 = \frac{V}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt[3]{1} \Rightarrow \\
 \Rightarrow r &= \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}}.
 \end{aligned}$$

Stacionarna točka je

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}}.$$

Provjerimo je li riječ o minimumu tako da nademo drugu derivaciju.

$$\begin{aligned}
O''(r) &= (O'(r))' \Rightarrow O''(r) = \left(4 \cdot r \cdot \pi - \frac{2 \cdot V}{r^2} \right)' \Rightarrow O''(r) = (4 \cdot r \cdot \pi)' - \left(\frac{2 \cdot V}{r^2} \right)' \Rightarrow \\
&\Rightarrow O''(r) = 4 \cdot \pi \cdot r' - 2 \cdot V \cdot \left(\frac{1}{r^2} \right)' \Rightarrow O''(r) = 4 \cdot \pi \cdot 1 + 4 \cdot V \cdot \frac{1}{r^3} \Rightarrow \\
&\Rightarrow O''(r) = 4 \cdot \pi + \frac{4 \cdot V}{r^3} \Rightarrow O''(r) > 0.
\end{aligned}$$

Dakle, minimum se postiže za

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0.35 \text{ dm}^3}{2 \cdot \pi}} \Rightarrow r = 0.3819 \text{ dm}.$$

Oplošje konzerve iznosi:

$$\begin{aligned}
O &= 2 \cdot r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot V}{r} \Rightarrow O = 2 \cdot (0.3819 \text{ dm})^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot 0.35 \text{ dm}^3}{0.3819 \text{ dm}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow O = 2.7493 \text{ dm}^2 \Rightarrow O = 0.027493 \text{ m}^2.
\end{aligned}$$

Budući da je cijena materijala 70 kn / m², za izradu jedne limenke platit će se

$$0.027493 \text{ m}^2 \cdot 70 \frac{\text{kn}}{\text{m}^2} = 1.92 \text{ kn}.$$

Vježba 087

Zatvorena limenka u obliku valjka izrađena je od materijala čija je cijena 70 kn / m². Kolika je cijena materijala potrebnoga za izradu jedne limenke čiji je obujam 350 cm³, ako je za njezinu izradu potrebno najmanje materijala? Napomena: Debljinu materijala i otpad treba zanemariti.

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$

Rezultat: 1.92 kn.

Zadatak 088 (Bojana, gimnazija)

Odredite jednadžbu tangente krivulje $y = x^3 + 3 \cdot x^2 - 5$ okomite na pravac $2 \cdot x - 6 \cdot y + 1 = 0$.

Rješenje 088

Ponovimo!

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2, \quad a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	Derivacija
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
c konstanta	0

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da je funkcija $f + g$ derivabilna pa slijedi:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))', \quad c \text{ je konstanta}, \quad (f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))'.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y .

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Uvjet okomitosti:

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.

Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.

Jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ krivulje $y = f(x)$ glasi:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Implicitni oblik jednadžbe zadanog pravca preoblikujemo u eksplicitni oblik kako bismo odredili koeficijent smjera k_1 pravca.

$$2 \cdot x - 6 \cdot y + 1 = 0 \Rightarrow -6 \cdot y = -2 \cdot x - 1 \Rightarrow -6 \cdot y = -2 \cdot x - 1 \quad /: (-6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{6} \cdot x + \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{2}{6} \cdot x + \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{6} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{3}.$$

Budući da je tražena tangenta okomita na pravac, njezin koeficijent smjera k_2 iznosi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow \left[k_1 = \frac{1}{3} \right] \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot k_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot k_2 = -1 \quad /: \frac{1}{3} \Rightarrow k_2 = -3.$$

Određimo derivaciju funkcije

$$f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 5.$$

$$f'(x) = (x^3 + 3 \cdot x^2 - 5)' \Rightarrow f'(x) = (x^3)' + (3 \cdot x^2)' - 5' \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot (x^2)' - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot x \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x.$$

Budući da je $f'(x_0) = k_2$, izračunat ćemo koordinate točke $D(x_0, y_0)$ u kojoj tangenta dodiruje krivulju.

$$f'(x_0) = k_2 \Rightarrow \left[k_2 = -3 \right] \Rightarrow 3 \cdot x_0^2 + 6 \cdot x_0 = -3 \Rightarrow 3 \cdot x_0^2 + 6 \cdot x_0 + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x_0^2 + 6 \cdot x_0 + 3 = 0 \quad /: 3 \Rightarrow x_0^2 + 2 \cdot x_0 + 1 = 0 \Rightarrow (x_0 + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1.$$

Računamo y_0 .

$$y_0 = f(x_0) = x_0^3 + 3 \cdot x_0^2 - 5 \Rightarrow y_0 = f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = -1 + 3 \cdot 1 - 5 \Rightarrow y_0 = -1 + 3 - 5 \Rightarrow y_0 = -3.$$

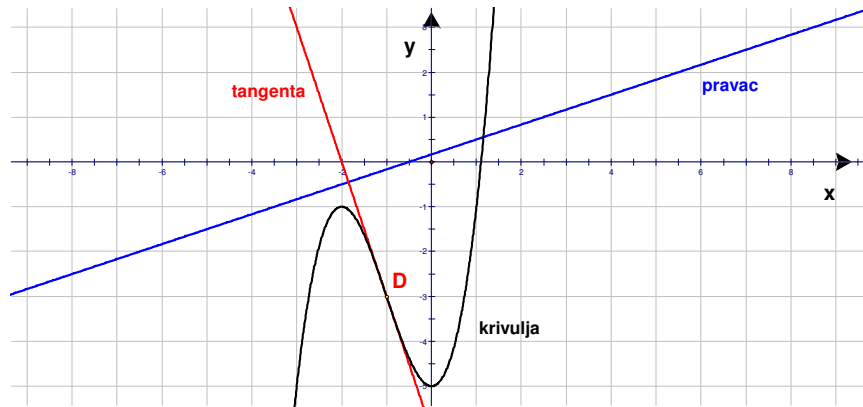
Koordinate točke D glase:

$$D(x_0, y_0) = D(-1, -3).$$

Jednadžba tangente je:

$$\left. \begin{array}{l} k_2 = -3 \\ D(x_0, y_0) = D(-1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[y - y_0 = k_2 \cdot (x - x_0) \right] \Rightarrow y - (-3) = -3 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 3 = -3 \cdot (x + 1) \Rightarrow y + 3 = -3 \cdot x - 3 \Rightarrow y = -3 \cdot x - 3 - 3 \Rightarrow y = -3 \cdot x - 6.$$



Vježba 088

Odredite jednadžbu tangente krivulje $y = x^3 + 3 \cdot x^2 - 5$ okomite na pravac $x - 3 \cdot y + 0.5 = 0$.

Rezultat: $y = -3 \cdot x - 6$.

www.halapa.com