Zadatak 061 (Mario, gimnazija)

Izračunaj integral $\int\left(5\cdot x^{3}-\sqrt{x}+\frac{1}{x^{3}}\right)dx.$

Rješenje 061

Ponovimo!

$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$, $\int C\cdot f(x)dx=C\cdot\int f(x)dx$ gdje je C konstanta $(C\neq 0)$.

$$\int x^{n}\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$$

$$\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad a+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^{2}}=a \ , \ a\geq 0.$$

$$\int\left(5\cdot x^{3}-\sqrt{x}+\frac{1}{x^{3}}\right)dx=\int 5\cdot x^{3}\,dx-\int\sqrt{x}\,dx+\int\frac{1}{x^{3}}\,dx=5\cdot\int x^{3}\,dx-\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int x^{-3}\,dx=$$

$$=5\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1}-\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=5\cdot\frac{x^{4}}{4}-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{-2}}{-2}+C=\frac{5}{4}\cdot x^{4}-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^{3}}-\frac{1}{2\cdot x^{2}}+C=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot x^{4}-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^{2}\cdot x}-\frac{1}{2\cdot x^{2}}+C=\frac{5}{4}\cdot x^{4}-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^{2}}\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\cdot x^{2}}+C=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot x^{4}-\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{2\cdot x^{2}}+C.$$

www.halapa.com

Vježba 061

Izračunaj integral $\int\left(5\cdot x^{3}+\sqrt{x}-\frac{1}{x^{3}}\right)dx.$

Rezultat: $\frac{5}{4}\cdot x^{4}+\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{2\cdot x^{2}}+C.$

Zadatak 062 (Mario, gimnazija)

Izračunajte integral: $\int x\cdot\ln x\cdot dx.$

Rješenje 062

Ponovimo!

$$\int x^{n}\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$$

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

$$dy=f'(x)\cdot dx.$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

$\int C\cdot f(x)dx=C\cdot\int f(x)dx$ gdje je C konstanta $(C\neq 0)$.

Parcijalna integracija

Ako su u = u(x) i v = v(x) neprekinuto derivabilne funkcije, tada je:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$$a^1 = a \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Integral rješavamo metodom parcijalne integracije:

$$\int x \cdot \ln x \cdot dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \ln x \\ dv = x \cdot dx \\ du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ v = \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Vježba 062

Izračunajte integral: $\int 4 \cdot x \cdot \ln x \cdot dx.$

Rezultat: $2 \cdot x^2 \cdot \ln x - x^2 + C.$

www.halapa.com