Zadatak 001 (Tomislav, tehnička škola)

Riješi diferencijalnu jednadžbu:

$$y' \cdot \operatorname{tg} x = y.$$

Rješenje 001

Jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama je oblika y ' = f(x) · g(y), gdje su f i g neprekidne funkcije.

Jednadžbu množimo s $\frac{dx}{g(y)}$ i dobijemo:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \ / \cdot \frac{dx}{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Odatle integriranjem dobivamo opći integral u obliku:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Zapamti:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Sada je:

$$y' \cdot \operatorname{tg} x = y.$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot tg\ x = y \Rightarrow \left[\text{podijelimo s } tg\ x\right] \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{tg\ x} \Rightarrow \left[\text{množimo s } \frac{\text{dx}}{\text{y}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{tg\ x} \Rightarrow \left[\text{integriramo obje strane}\right] \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{tg\ x} + C \Rightarrow \ln\left|y\right| = \int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\cos x}} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|y\right| = \int \frac{\cos dx}{\sin x} + C \Rightarrow \ln\left|y\right| = \left[\begin{array}{l} \text{uzimamo supstituciju} \\ \text{t=sin x} \\ \text{na obje strane računamo diferencijal} \\ \text{t'dt=(sin x)'dx} \\ \text{dt=cos x dx} \\ \text{taj izraz unesemo u integral} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|y\right| = \ln\left|t\right| + C \Rightarrow \ln\left|y\right| = \ln\left|\sin x\right| + C.$$

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

dy = f '(x) · dx.

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

Vježba 001

Riješi diferencijalnu jednadžbu:

$$y' \cdot x = y.$$

Rezultat: ln | y | = ln | x | + C.

Zadatak 002 (Tomislav, tehnička škola)

Riješite sljedeću nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda:

$$y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$$

Odredite ono rješenje koje zadovoljava uvjet y = 0 za x = 0.

Rješenje 002

Diferencijalna jednadžba zove se linearna ako su sve derivacije pa i sama zavisna varijabla y prvog stupnja.

Linearna diferencijalna jednadžba prvog stupnja općenito glasi

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

gdje su P(x) i Q(x) neke zadane funkcije od x.
Znači da diferencijalnu jednadžbu oblika

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

prvog stupnja s obzirom na y i y' nazivamo linearnom.
Opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe prvog stupnja je

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx \right],$$

gdje je C konstanta.
U našem zadatku

$$y' - y \cdot \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\cos x}$$

je

$$P(x) = -\mathrm{tg}\, x, \; Q)x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Posebno računamo integral:

$$\int P(x)dx = \int -tg\, xdx = -\int tg\, xdx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[\text{uvrstimo supstituciju } t = \cos x \right] =$$

$$= [\text{sada tražimo i diferencijal}] =$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

$$= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln \cos x.$$

Dakle, vrijedi:

$$\int P(x)dx = \ln \cos x.$$

Uvrstimo taj rezultat u opće rješenje:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx \right] = e^{-\ln \cos x} \cdot \left[C + \int \frac{1}{\cos x} \cdot e^{\ln \cos x} dx \right] =$$

$$= \left[\text{podsjetimo se pravila za logaritme i potencije } e^{\ln x} = x, \; -\ln x = \ln \frac{1}{x} \right].$$

Sada je

$$y = e^{\ln \frac{1}{\cos x}} \cdot \left[C + \int \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x dx \right] = \frac{1}{\cos x} \cdot \left[C + \int dx \right] = \frac{1}{\cos x} \cdot \left[C + x \right].$$

Opće rješenje je

$$y = \frac{1}{\cos x} \cdot \left[C + x \right].$$

Budući da je uvjet zadatka bio y = 0 za x = 0, uvrstimo te vrijednosti u opće rješenje da bismo našli konstantu C.

$$0 = \frac{1}{\cos 0} \cdot \left[C + 0 \right] \;\Rightarrow\; 0 = \frac{1}{1} \cdot C \;\Rightarrow\; C = 0.$$

Rješenje zadatka glasi:

$$y = \frac{x}{\cos x}.$$

Vježba 002

Riješite sljedeću nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda: $y' + y \cdot \mathrm{tg}\, x = \frac{1}{\cos x}$.

Rezultat: $y = \sin x + C \cdot \cos x$.

Zadatak 003 (Tatjana, gimnazija)

Riješi diferencijalnu jednadžbu:

$$x \cdot y' = y \cdot \cos \ln \frac{y}{x}.$$

Rješenje 003

Diferencijalnu jednadžbu

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

nazivamo homogenom ako su P(x, y) i Q(x, y) homogene funkcije istog stupnja. Tu jednadžbu možemo svesti na oblik

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

i pomoću supstitucije $y = u \cdot x$ [$y' = u' \cdot x + u$] gdje je u nova nepoznata funkcija, transformiramo u jednadžbu sa separiranim varijablama. Možemo također primijeniti i supstituciju $x = y \cdot u$.

$$x \cdot y' = y \cdot \cos \ln \frac{y}{x},$$

$$x \cdot y' = y \cdot \cos \ln \frac{y}{x} \;/ : x \;\Rightarrow\; y' = \frac{y}{x} \cdot \cos \ln \frac{y}{x}.$$

Stavimo $y = u \cdot x$ pa ćemo dobiti $y' = u' \cdot x + u$. Uvrštavanjem u jednadžbu bit će:

$$u' \cdot x + u = u \cdot \cos \ln u \;\Rightarrow\; u' \cdot x = u \cdot \cos \ln u - u,$$

$$u' = \frac{du}{dx},$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = u \cdot \cos \ln u - u \;\Rightarrow\; x \cdot du = \left(u \cdot \cos \ln u - u\right) \cdot dx \;\Rightarrow\; \frac{du}{u \cdot \cos \ln u - u} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \frac{du}{u \cdot \left(\cos \ln u - 1\right)} = \frac{dx}{x}.$$

Integriranjem dobivamo:

$$\int \frac{du}{u \cdot \left(\cos \ln u - 1\right)} = \int \frac{dx}{x} + C'.$$

Integral na lijevoj strani riješimo metodom supstitucije, a na desnoj strani imamo tablični integral:

$$\begin{bmatrix} t = \ln u \\ dt = \frac{du}{u} \end{bmatrix} \Rightarrow \int \frac{dt}{\cos t - 1} = \ln x + C' \;\Rightarrow\; -\int \frac{dt}{1 - \cos t} = \ln x + C'.$$

Dobili smo tablični integral

$$\left[\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \cdot ctg \frac{ax}{2}\right], \text{ a za C' stavimo } \ln C = C'.$$

Sada je

$$-\int \frac{dt}{1 - \cos t} = \ln x + C' \;\Rightarrow\; ctg \frac{t}{2} = \ln x + \ln C \;\Rightarrow\; \left[\text{uvrstimo supstitucije}\right] \;\Rightarrow\; ctg \frac{\ln u}{2} = \ln Cx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; ctg \frac{\ln \frac{y}{x}}{2} = \ln Cx \;\Rightarrow\; \frac{\ln \frac{y}{x}}{2} = tg \ln Cx \;\Rightarrow\; \ln \frac{y}{x} = 2 \cdot tg \ln Cx \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = e^{2 \cdot tg \ln Cx} \;\Rightarrow\; y = x \cdot e^{2 \cdot tg \ln Cx}.$$

Vježba 003

Riješi diferencijalnu jednadžbu: $y' = \frac{y}{x} - 1$.

Rezultat: $y = x \cdot \ln\left|\frac{C}{x}\right|$.

Zadatak 004 (Ivica, tehnička škola)

Riješi diferencijalnu jednadžbu $x \cdot y' = 5 + \sqrt{x} + x$ uz uvjet $y(1) = 4$.

Rješenje 004

Jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama je oblika y ' = f(x) · g(y), gdje su f i g neprekidne funkcije.

Jednadžbu množimo s $\frac{dx}{g(y)}$ i dobijemo:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \;/\cdot \frac{dx}{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Odatle integriranjem dobivamo opći integral u obliku:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Zapamti:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Sada računamo:

$$x \cdot y' = 5 + \sqrt{x} + x \Rightarrow x \cdot \frac{dy}{dx} = 5 + \sqrt{x} + x \;/\cdot dx \Rightarrow x \cdot dy = \left(5 + \sqrt{x} + x\right) \cdot dx \;/\cdot \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \frac{5 + \sqrt{x} + x}{x} \cdot dx \;/\int \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dy = \int \frac{5 + \sqrt{x} + x}{x} \cdot dx \Rightarrow y = \int \left(\frac{5}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{x}{x}\right) \cdot dx \Rightarrow y = \int \frac{5}{x}dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{x}{x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 5 \cdot \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int dx \Rightarrow 5 \cdot \ln x + 2 \cdot \sqrt{x} + x + C.$$

Uporabimo uvjet:

$$\left.\begin{aligned} & y(1) = 4 \\ & y = 5 \cdot \ln x + 2 \cdot \sqrt{x} + x + C \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4 = 5 \cdot \ln 1 + 2 \cdot \sqrt{1} + 1 + C \Rightarrow 4 = 5 \cdot 0 + 2 + 1 + C \Rightarrow 4 = 3 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 5 \cdot \ln x + 2 \cdot \sqrt{x} + x + 1.$$

Vježba 004

Riješi diferencijalnu jednadžbu $x \cdot y' = 5$ uz uvjet $y(1) = 5$.

Rezultat: y = 5 · ln x + 5.

Zadatak 005 (Roko, gimnazija)

Riješi diferencijalnu jednadžbu:

$$x \cdot y' - y = y^3.$$

Rješenje 005

Ponovimo!

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b) \quad , \quad \ln\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \ln a \quad , \quad \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b} \quad , \quad \ln f(x) = \ln g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama je oblika y ' = f(x) · g(y), gdje su f i g neprekidne funkcije.

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y).$$

Jednadžbu množimo s $\frac{dx}{g(y)}$ i dobijemo:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \ / \cdot \frac{dx}{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Odatle integriranjem dobivamo opći integral u obliku:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Zapamti:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Kratak opis integriranja racionalne funkcije (racionalnog razlomka):

① Ako je zadan nepravi racionalni razlomak, tj. ako je stupanj polinoma u brojniku veći ili jednak od stupnja polinoma u nazivniku, treba brojnik podijeliti s nazivnikom (dijeljenje polinoma!)

② Integriranje racionalne funkcije nakon odvajanja cijelog dijela svodimo na integriranje pravog racionalnog razlomka $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P(x) i Q(x) cijeli polinomi, pri čemu je stupanj polinoma P(x) niži od stupnja polinoma nazivnika Q(x).

③ Ako je Q(x) polinom u nazivniku oblika

$$Q(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c),$$

gdje su a, b i c različiti realni korijeni polinoma Q(x), onda je moguće rastaviti razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na parcijalne razlomke:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}.$$

④ Za izračunavanje neodređenih koeficijenata A, B i C uvijek množimo taj identitet s nazivnikom lijeve strane da se riješimo svih nazivnika:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \Rightarrow \frac{P(x)}{(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \ / \cdot (x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = A \cdot (x-b)\cdot(x-c) + B \cdot (x-a)\cdot(x-c) + C \cdot (x-a)\cdot(x-b).$$

⑤ Izmnožimo sve zagrade na desnoj strani pa skupimo zajedno članove istih potencija baze x, poredavši te skupine po padajućim potencijama baze x, a lijevu stranu identiteta uvijek prepisujemo.

⑥ Ako su dva polinoma identički jednaki, tada su jednaki koeficijenti istih potencija baze x.

⑦ Dobije se sustav linearnih jednadžbi iz kojeg odredimo vrijednosti koeficijenata A, B i C.

Kratak opis integriranja racionalne funkcije (racionalnog razlomka):

① Ako je zadan nepravi racionalni razlomak, tj. ako je stupanj polinoma u brojniku veći ili jednak od stupnja polinoma u nazivniku, treba brojnik podijeliti s nazivnikom (dijeljenje polinoma!)

② Integriranje racionalne funkcije nakon odvajanja cijelog dijela svodimo na integriranje pravog racionalnog razlomka $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P(x) i Q(x) cijeli polinomi, pri čemu je stupanj polinoma P(x) niži od stupnja polinoma nazivnika Q(x).

③ Ako je Q(x) polinom u nazivniku oblika

$$Q(x) = (x - a) \cdot (x - b)^2 \cdot (x - c)^3,$$

gdje su a, b i c različiti realni korijeni polinoma Q(x), pri čemu je b korijen višestrukosti 2, a c korijen višestrukosti 3, onda je moguće rastaviti razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na parcijalne razlomke:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}+\frac{D}{x-c}+\frac{E}{(x-c)^2}+\frac{F}{(x-c)^3}.$$

④ Za izračunavanje neodređenih koeficijenata A, B, C, D, E i F uvijek množimo taj identitet s nazivnikom lijeve strane da se riješimo svih nazivnika:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}+\frac{D}{x-c}+\frac{E}{(x-c)^2}+\frac{F}{(x-c)^3}\Rightarrow$$

$$\frac{P(x)}{(x-a)\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)^3}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}+\frac{D}{x-c}+\frac{E}{(x-c)^2}+\frac{F}{(x-c)^3}\ /\cdot(x-a)\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=A\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)^3+B\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)^3+C\cdot(x-a)\cdot(x-c)^3+$$
$$+D\cdot(x-a)\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)^2+E\cdot(x-a)\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)+F\cdot(x-a)\cdot(x-b)^2.$$

⑤ Nakon kvadriranja i kubiranja izmnožimo sve zagrade na desnoj strani pa skupimo zajedno članove istih potencija baze x, poredavši te skupine po padajućim potencijama baze x, a lijevu stranu identiteta uvijek prepisujemo.

⑥ Ako su dva polinoma identički jednaki, tada su jednaki koeficijenti istih potencija baze x.

⑦ Dobije se sustav linearnih jednadžbi iz kojeg odredimo tražene vrijednosti koeficijenata A, B, C, D, E i F.

Nakon detaljne teorije, puni znanja i elana ☺, bacimo se na rješavanje zadatka.

$$x\cdot y'-y=y^3\Rightarrow x\cdot y'=y^3+y\Rightarrow x\cdot\frac{dy}{dx}=y^3+y\ /\cdot\frac{dx}{x\cdot\left(y^3+y\right)}\Rightarrow\frac{dy}{y^3+y}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{integriramo}\\ \text{obje strane}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{y^3+y}=\frac{dx}{x}\ /\int\Rightarrow\int\frac{dy}{y^3+y}=\int\frac{dx}{x}+\ln C\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{integracijsku konstantu }\ln C\text{ pišemo na ovaj}\\ \text{način zbog jednostavnosti daljnjeg računanja}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{dy}{y^3+y}=\ln x+\ln C\Rightarrow\int\frac{dy}{y\cdot\left(y^2+1\right)}=\ln(C\cdot x).$$

Da bismo našli integral lijeve strane moramo razlomak $\frac{1}{y\cdot\left(y^2+1\right)}$ rastaviti na parcijalne razlomke metodom neodređenih koeficijenata.

$$\frac{1}{y\cdot\left(y^2+1\right)}=\frac{A}{y}+\frac{B\cdot y+C}{y^2+1}\ /\cdot y\cdot\left(y^2+1\right)\Rightarrow 1=A\cdot\left(y^2+1\right)+y\cdot(B\cdot y+C)\Rightarrow 1=A\cdot y^2+A+B\cdot y^2+C\cdot y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\cdot x^2+0\cdot x+1=(A+B)\cdot y^2+C\cdot y+A\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{jednakost polinoma}\\ ⑥\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{r}A+B=0\\ C=0\\ A=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}1+B=0\\ C=0\\ A=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}B=-1\\ C=0\\ A=1\end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$\frac{1}{y\cdot\left(y^2+1\right)}=\frac{1}{y}+\frac{-1\cdot y+0}{y^2+1}\Rightarrow\frac{1}{y\cdot\left(y^2+1\right)}=\frac{1}{y}-\frac{y}{y^2+1}.$$

Dalje integriramo:

$$\int\frac{dy}{y\cdot\left(y^2+1\right)}=\ln(C\cdot x)\Rightarrow\int\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{y^2+1}\right)dy=\ln(C\cdot x)\Rightarrow\int\frac{dy}{y}-\int\frac{y\cdot dy}{y^2+1}=\ln(C\cdot x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y - \int \frac{y \cdot dy}{y^2+1} = \ln(C \cdot x) \Rightarrow \ln y - \begin{bmatrix} \text{supstitucija} \\ t = y^2+1 \\ dt = 2 \cdot y \cdot dy \; / : 2 \\ \frac{1}{2} \cdot dt = y \cdot dy \end{bmatrix} \Rightarrow \ln y - \int \frac{\frac{1}{2} \cdot dt}{t} = \ln(C \cdot x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y - \int \frac{\frac{1}{2} \cdot dt}{t} = \ln(C \cdot x) \Rightarrow \ln y - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t} = \ln(C \cdot x) \Rightarrow \ln y - \frac{1}{2} \cdot \ln t = \ln(C \cdot x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(y^2+1\right) = \ln(C \cdot x) \Rightarrow \ln y - \ln\sqrt{y^2+1} = \ln(C \cdot x) \Rightarrow \ln \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = \ln(C \cdot x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = C \cdot x.$$

Vježba 005

Riješi diferencijalnu jednadžbu: $x \cdot y' - y = y^2$.

Rezultat: $\frac{y}{y+1} = C \cdot x.$

Zadatak 006 (Mario, student)

Odredi x takav da njegovo povećanje od 1% uzrokuje povećanje od y za 3%, $y = \sqrt{x^2+1}.$

Rješenje 006

Ponovimo!

Prema Albertu Marshallu, koeficijent elastičnosti veličine y u odnosu na veličinu x u točki (x, y) jednak je omjeru relativnih, infinitezimalnih, promjena tih veličina, to jest

$$E_{y,x} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} \Rightarrow E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

gdje je dy i dx diferencijal od y odnosno od x. Prema tome, koeficijent elastičnosti pokazuje za koliko se postotaka približno promijeni y kad x poraste za 1%.

$$y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x^2+1\right)' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot 2 \cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Zbog uvjeta zadatka slijedi:

$$E_{y,x} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = 3 \Rightarrow \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 3 \; / \cdot \left(x^2+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 3 \cdot \left(x^2+1\right) \Rightarrow x^2 = 3 \cdot x^2 + 3 \Rightarrow x^2 - 3 \cdot x^2 = 3 \Rightarrow -2 \cdot x^2 = 3 \; / : (-2) \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{2} \; / \sqrt{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{3}{2}} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i.$$

Budući da rješenja nisu realni brojevi, ne postoji takav x da njegovo povećanje od 1% uzrokuje povećanje od y za 3%.

Vježba 006

Odredi x takav da njegovo povećanje od 1% uzrokuje povećanje od y za 2%, $y=\sqrt{x^2+1}$.

Rezultat: $x^2=-2$ nema rješenja.

Zadatak 007 (Sanela, studentica)

Odredite funkcije y = f(x) za koje je $E_{y,x}=\sqrt{a\cdot x}$, $a\in R$ je parametar.

Rješenje 007

Ponovimo!

$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$, $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$, $\int c\cdot f(x)dx=c\cdot\int f(x)dx$, $\ln a=b \Leftrightarrow a=e^b$.

Diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama je oblika

$$y'=f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y).$$

Podijelimo li obje strane jednadžbe sa g(y) i pomnožimo sa dx, dobije se:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)\ /\cdot\frac{dx}{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{g(y)}=f(x)dx.$$

Odatle integriranjem dobivamo opći integral zadane diferencijalne jednadžbe u obliku:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx\ /\int \Rightarrow \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C.$$

Prema Albertu Marshallu, koeficijent elastičnosti veličine y u odnosu na veličinu x u točki (x, y) jednak je omjeru relativnih, infinitezimalnih, promjena tih veličina, to jest

$$E_{y,x}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} \Rightarrow E_{y,x}=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx},$$

gdje je dy i dx diferencijal od y odnosno od x.

Zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$E_{y,x}=\sqrt{a\cdot x} \Rightarrow \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\sqrt{a\cdot x}.$$

Odatle ćemo separacijom varijabli imati:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\sqrt{a\cdot x}\ /\cdot\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{\sqrt{a\cdot x}}{x}dx \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}}{x}dx \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{desnu stranu jednadžbe}\\ \text{kratimo sa } \sqrt{x}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}dx.$$

Integriranjem dobivamo:

$$\frac{dy}{y}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}dx\ /\int \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}dx+\ln C \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{po volji odaberiva konstanta } \ln C\\ \text{uzeta je u logaritamskom obliku}\end{array}\right] \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\sqrt{a}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+\ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y=\sqrt{a}\cdot 2\cdot\sqrt{x}+\ln C \Rightarrow \ln y-\ln C=2\cdot\sqrt{a\cdot x} \Rightarrow \ln\frac{y}{C}=2\cdot\sqrt{a\cdot x}.$$

Nakon potenciranja dobije se opće rješenje:

$$\ln\frac{y}{C}=2\cdot\sqrt{a\cdot x} \Rightarrow \frac{y}{C}=e^{2\cdot\sqrt{a\cdot x}}\ /\cdot C \Rightarrow y=C\cdot e^{2\cdot\sqrt{a\cdot x}}.$$

Vježba 007

Odredite funkcije y = f(x) za koje je $E_{y,x} = \sqrt{4 \cdot x}.$

Rezultat: $y = C \cdot e^{4 \cdot \sqrt{x}}.$

Zadatak 008 (Sanela, studentica)

Odredite funkcije y = f(x) za koje je $E_{y,x} = \frac{x^2}{\sqrt{x}}.$

Rješenje 008

Ponovimo!

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a = \left(\sqrt{a}\right)^2$, $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$, $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$, $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b.$

Diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama je oblika

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y).$$

Podijelimo li obje strane jednadžbe sa g(y) i pomnožimo sa dx, dobije se:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \; / \cdot \frac{dx}{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

Odatle integriranjem dobivamo opći integral zadane diferencijalne jednadžbe u obliku:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \; / \int \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C.$$

Prema Albertu Marshallu, koeficijent elastičnosti veličine y u odnosu na veličinu x u točki (x, y) jednak je omjeru relativnih, infinitezimalnih, promjena tih veličina, to jest

$$E_{y,x} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} \Rightarrow E_{y,x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx},$$

gdje je dy i dx diferencijal od y odnosno od x.

Zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$E_{y,x} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{x}}.$$

Odatle ćemo separacijom varijabli imati:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} \; / \cdot \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{desnu stranu jednadžbe} \\ \text{kratimo sa } \sqrt{x}\end{array}\right] \Rightarrow \frac{dy}{y} = \sqrt{x}\, dx.$$

Integriranjem dobivamo:

$$\frac{dy}{y} = \sqrt{x}\, dx \; / \int \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \sqrt{x}\, dx + \ln C \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{po volji odaberiva konstanta } \ln C \\ \text{uzeta je u logaritamskom obliku}\end{array}\right] \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln C \Rightarrow \ln y - \ln C = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \ln \frac{y}{C} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje}\end{array}\right] \Rightarrow \ln \frac{y}{C} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^2 \cdot x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{C} = \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x}.$$

Nakon potenciranja dobije se opće rješenje:

$$\ln\frac{y}{C}=\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}\Rightarrow\frac{y}{C}=e^{\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}}\ /\cdot C\Rightarrow y=C\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}}.$$

Vježba 008

Odredite funkcije y = f(x) za koje je $E_{y,x}=x\cdot\sqrt{x}$.

Rezultat: $y=C\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x}}$.

Zadatak 009 (Sanela, studentica)

Odredite funkciju ukupnih prihoda R(Q) ako je koeficijent elastičnosti u odnosu na proizvodnju $E_{R,Q}=\frac{1}{2}$, $R(5)=20$.

Rješenje 009

Ponovimo!

$$\ln a^{n}=n\cdot\ln a\quad,\quad\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}\quad,\quad\int c\cdot f(x)dx=c\cdot\int f(x)dx\quad,\quad\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama je oblika

$$y'=f(x)\cdot g(y)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y).$$

Podijelimo li obje strane jednadžbe sa g(y) i pomnožimo sa dx, dobije se:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)\ /\cdot\frac{dx}{g(y)}\Rightarrow\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx.$$

Odatle integriranjem dobivamo opći integral zadane diferencijalne jednadžbe u obliku:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx\ /\int\Rightarrow\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C.$$

Prema Albertu Marshallu, koeficijent elastičnosti veličine y u odnosu na veličinu x u točki (x, y) jednak je omjeru relativnih, infinitezimalnih, promjena tih veličina, to jest

$$E_{y,x}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}}\Rightarrow E_{y,x}=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx},$$

gdje je dy i dx diferencijal od y odnosno od x.

Zadanu jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$E_{R,Q}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{Q}{R}\cdot\frac{dR}{dQ}=\frac{1}{2}.$$

Odatle ćemo separacijom varijabli imati:

$$\frac{Q}{R}\cdot\frac{dR}{dQ}=\frac{1}{2}\ /\cdot\frac{dQ}{Q}\Rightarrow\frac{dR}{R}=\frac{1}{2}\cdot\frac{dQ}{Q}.$$

Integriranjem dobivamo:

$$\frac{dR}{R}=\frac{1}{2}\cdot\frac{dQ}{Q}\ /\int\Rightarrow\int\frac{dR}{R}=\int\frac{1}{2}\cdot\frac{dQ}{Q}+\ln C\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{po volji odaberiva konstanta }\ln C\\ \text{uzeta je u logaritamskom obliku}\end{array}\right]\Rightarrow\int\frac{dR}{R}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dQ}{Q}+\ln C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln R=\frac{1}{2}\cdot\ln Q+\ln C\Rightarrow\ln R-\ln C=\frac{1}{2}\cdot\ln Q\Rightarrow\ln\frac{R}{C}=\ln\sqrt{Q}\Rightarrow\frac{R}{C}=\sqrt{Q}\ /\cdot C\Rightarrow R(Q)=C\cdot\sqrt{Q}.$$

Pomoću zadanog početnog uvjeta odredimo konstantu C:

$$\left.\begin{array}{l}R(5)=20\\ R(Q)=C\cdot\sqrt{Q}\end{array}\right\}\Rightarrow C\cdot\sqrt{5}=20\ /:\sqrt{5}\Rightarrow C=\frac{20}{\sqrt{5}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]\Rightarrow C=\frac{20}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{20\cdot\sqrt{5}}{5}=4\cdot\sqrt{5}.$$

Prema tome, traženo partikularno rješenje (funkcija ukupnih prihoda) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} C = 4\cdot\sqrt{5} \\ R(Q) = C\cdot\sqrt{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow R(Q) = 4\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{Q} \Rightarrow R(Q) = 4\cdot\sqrt{5\cdot Q}.$$

Vježba 009

Odredite funkciju ukupnih prihoda R(Q) ako je koeficijent elastičnosti u odnosu na proizvodnju $E_{R,Q} = \frac{1}{2}$, $R(4) = 20.$

Rezultat: $R(Q) = 10\cdot\sqrt{Q}.$

Zadatak 010 (Tomislav, student)

Koristeći zamjenu u = x + y + 1 riješite diferencijalnu jednadžbu $\frac{1}{x+y+1}\cdot y' = x+y+1.$

Rješenje 010

Ponovimo!

Derivacija zbroja funkcija : $(f+g+h)' = f' + g' + h'.$

Diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama je oblika

$$y' = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y).$$

Podijelimo li obje strane jednadžbe sa g(y) i pomnožimo sa dx, dobije se:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \;/\cdot\frac{dx}{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Odatle integriranjem dobivamo opći integral zadane diferencijalne jednadžbe u obliku:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \;/\int \Rightarrow \int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Uočimo da je u funkcija od nezavisne varijable x pa vrijedi:

$$u = u(x) \Rightarrow u' = \frac{du}{dx}.$$

Računamo y':

$$u = x+y+1 \Rightarrow u' = (x+y+1)' \Rightarrow u' = x'+y'+1' \Rightarrow u' = 1+y'+0 \Rightarrow u' = 1+y' \Rightarrow y' = u'-1.$$

Uvrstimo u i y' u zadanu diferencijalnu jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} u = x+y+1 \;\;,\;\; y' = u'-1 \\ \frac{1}{x+y+1}\cdot y' = x+y+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{u}\cdot(u'-1) = u \Rightarrow \frac{u'-1}{u} = u \;/\cdot u \Rightarrow u'-1 = u^2 \Rightarrow u' = 1+u^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 1+u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1+u^2 \;/\cdot\frac{dx}{1+u^2} \Rightarrow \frac{du}{1+u^2} = dx \Rightarrow \left[\text{integriramo obje strane}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{1+u^2} = \int dx \Rightarrow arctg\,u = x+C \Rightarrow arctg\,u = x+C \;/tg \Rightarrow tg(arctg\,u) = tg(x+C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = tg(x+C) \Rightarrow x+y+1 = tg(x+C) \Rightarrow y = tg(x+C) - x - 1.$$

Vježba 010

Koristeći zamjenu u = x + y – 1 riješite diferencijalnu jednadžbu $\frac{1}{x+y-1}\cdot y' = x+y-1.$

Rezultat: y = tg (x + C) – x + 1.

Zadatak 011 (Tomislav, student)

Koristeći zamjenu $\frac{y}{x}$ riješite diferencijalnu jednadžbu $y'-\frac{y}{x}\cdot\left(1+3\cdot x^{3}\right)=3\cdot x^{3}.$

Rješenje 011

Ponovimo!

Neka su f i g derivabilne funkcije na istom intervalu I. Funkcija f · g je derivabilna i vrijedi:

(f · g) ' = f ' · g + f · g ' (derivacija umnoška).

Konstantni faktor možemo izlučiti pred znak integrala. Broj c je konstantni faktor.

$$\int c\cdot f(x)dx=c\cdot\int f(x)dx \ , \ c-\text{konstanta}.$$

$$\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b \quad , \quad \ln x=y \ \Leftrightarrow \ x=e^{y}.$$

Diferencijalna jednadžba prvog reda sa separiranim varijablama je oblika

$$y'=f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y).$$

Podijelimo li obje strane jednadžbe sa g(y) i pomnožimo sa dx, dobije se:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y) \ /\cdot\frac{dx}{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{g(y)}=f(x)dx.$$

Odatle integriranjem dobivamo opći integral zadane diferencijalne jednadžbe u obliku:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \ /\int \ \Rightarrow \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C.$$

Uočimo da je u funkcija od nezavisne varijable x pa vrijedi:

$$u=u(x) \Rightarrow u'=\frac{du}{dx}.$$

Iz predložene zamjene (supstitucije) nađemo y':

$$u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=u\cdot x \Rightarrow y'=(u\cdot x)' \Rightarrow y'=u'\cdot x+u\cdot x' \Rightarrow y'=u'\cdot x+u\cdot 1 \Rightarrow y'=u'\cdot x+u.$$

Uvrstimo u i y' u zadanu diferencijalnu jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} u=\frac{y}{x} \ , \ y'=u'\cdot x+u \\ y'-\frac{y}{x}\cdot\left(1+3\cdot x^{3}\right)=3\cdot x^{3}\end{array}\right\} \Rightarrow u'\cdot x+u-u\cdot\left(1+3\cdot x^{3}\right)=3\cdot x^{3} \Rightarrow u'\cdot x+u-u-3\cdot u\cdot x^{3}=3\cdot x^{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'\cdot x+u-u-3\cdot u\cdot x^{3}=3\cdot x^{3} \Rightarrow u'\cdot x-3\cdot u\cdot x^{3}=3\cdot x^{3} \Rightarrow u'\cdot x=3\cdot x^{3}+3\cdot u\cdot x^{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'\cdot x=3\cdot x^{3}\cdot(1+u) \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x=3\cdot x^{3}\cdot(1+u) \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x=3\cdot x^{3}\cdot(1+u) \ /\cdot\frac{dx}{x\cdot(1+u)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{1+u}=3\cdot x^{2}\cdot dx \Rightarrow \left[\text{integriramo obje strane}\right] \Rightarrow \int\frac{du}{1+u}=\int 3\cdot x^{2}\cdot dx \Rightarrow \int\frac{du}{1+u}=3\cdot\int x^{2}\cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{da bismo rješenje zapisali što} \\ \text{jednostavnije pišemo } \ln C \text{ umjesto } C\end{array}\right] \Rightarrow \ln(1+u)=3\cdot\frac{x^{3}}{3}+\ln C \Rightarrow \ln(1+u)=3\cdot\frac{x^{3}}{3}+\ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1+u)=x^{3}+\ln C \Rightarrow \ln(1+u)-\ln C=x^{3} \Rightarrow \ln\frac{1+u}{C}=x^{3} \Rightarrow \frac{1+u}{C}=e^{x^{3}} \Rightarrow 1+u=C\cdot e^{x^{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{y}{x}=C\cdot e^{x^{3}} \Rightarrow \frac{y}{x}=C\cdot e^{x^{3}}-1 \Rightarrow \frac{y}{x}=C\cdot e^{x^{3}}-1 \ /\cdot x \Rightarrow y=x\cdot\left(C\cdot e^{x^{3}}-1\right).$$

Vježba 011

Koristeći zamjenu $\frac{y}{x}$ riješite diferencijalnu jednadžbu $y' - \frac{y}{x} - 3 \cdot y \cdot x^2 = 3 \cdot x^3$.

Rezultat: $y = x \cdot \left(C \cdot e^{x^3} - 1 \right)$.