Zadatak 001 (Jelena, ekonomska škola)

Zajam je odobren poduzeću na 5 godina uz 4% godišnjih kamata i otplaćuje se nominalno jednakim anuitetima krajem godine u iznosu a = 30 000 kn. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Odredite iznos zajma.

Rješenje 001

Iznos zajma možemo izračunati formulom:

$$C = \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1},$$

gdje je a iznos nominalno jednakih anuiteta, p stalna dekurzivna kamatna stopa za jedinično vremensko razdoblje, $r = 1 + \frac{p}{100}$.

$$r = 1 + \frac{4}{100} = 1.04.$$

$$C = \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{30\,000}{1.04^5} \cdot \frac{1.04^5 - 1}{1.04 - 1} = \left[\text{rezultat dobijemo kalkulatorom}\right] = 133\,554.67\ kn.$$

Vježba 001

Zajam je odobren poduzeću na 5 godina uz 5% godišnjih kamata i otplaćuje se nominalno jednakim anuitetima krajem godine u iznosu a = 30 000 kn. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Odredite iznos zajma.

Rezultat: 129 884.30 kn.

Zadatak 002 (Zahvalna Marina, studentica)

Sastavite otplatnu tablicu zajma od 500 000.00 kuna koji se vraća krajem termina jednom u godini. Rok otplate je tri godine, kamatna stopa 6.5%, a obračun je složen i dekurzivan.

Rješenje 002

C_0 = 500 000.00 kn, n = 3, p = 6.5

Zajam se odobrava na temelju ugovora koji zaključuje kreditor (obično banka) i korisnik zajma (poduzeće ili fizička osoba). Kreditor isplaćuje ugovoreni iznos korisniku zajma odjednom ili u obrocima (ratama). Ako korisnik zajma koristi zajam u obrocima, kreditor svaki obrok ukamaćuje od trenutka doznake obroka do trenutka kada počinje redovito vraćanje zajma. Ta kamata se naziva interkalarna kamata i obračunava se po složenom kamatnom računu, a može se:

- isplatiti odjednom, kad počne otplata zajma ili
- pripisati iznosu odobrenog zajma kad počne otplata zajma.

Anuitet je iznos koji plaća korisnik zajma, a sastoji se od dva dijela:

- otplatne kvote (dio kojim se otplaćuje temeljni dug i interkalarna kamata ako nije plaćena) i
- složenih kamata (dio kojim se plaća naknada za korištenje ustupljenih financijskih sredstava).

Otplata zajma pomoću anuiteta počinje tek nakon što je zajam u cjelosti iskorišten. Otplata (amortizacija) zajma vodi se pregledno prema rokovima otplate i prikazuje tablicom koja se zove plan otplate ili otplatna tablica.

Kamate se najčešće računaju dekurzivno (na kraju obračunskog razdoblja).

Anuiteti se mogu plaćati početkom svakog razdoblja (prenumerando anuiteti) ili na kraju svakog razdoblja otplate zajma (postnumerando anuiteti).

Zajam uz jednake anuitete

Zajam uz jednake anuitete je najčešći model amortizacije zajma. Svojstva su:

1. obračun kamata je složen i dekurzivan
2. anuiteti su nominalno jednaki i dospijevaju u jednakim vremenskim jedinicama krajem razdoblja
3. duljina razdoblja ukamaćivanja jednaka je duljini vremenskog dospijeća između anuiteta i iznosi 1
4. kamatna stopa je stalna u cijelom razdoblju amortizacije zajma.

Veličine su:

C_0 – nominalni iznos odobrenog zajma

a – iznos nominalno jednakih anuiteta

n – broj razdoblja amortizacije zajma

I_i – iznos kamate na kraju i – tog razdoblja amortizacije, $i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$

R_i – iznos otplatne kvote na kraju i – tog razdoblja otplate

C_i – ostatak duga na kraju i – tog razdoblja amortizacije

p – stalna dekurzivna kamatna stopa za jedinično vremensko razdoblje.

Zajam u iznosu C_0 otplaćuje se nominalno jednakim postnumerando anuitetima, a kroz n razdoblja uz stalnu kamatnu stopu p. Iznos zajma jednak je zbroju sadašnjih vrijednosti svih anuiteta.

Otplatna tablica se izrađuje ovako:

U razdoblje "0" unosi se samo iznos zajma C_0 u stupac Ostatka duga, a u ostala polja stavlja se znak "–".

Anuitet računamo formulom:

$$a_i = a = C_0 \cdot \frac{r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1}, \quad r = 1 + \frac{p}{100}, \quad \text{za svaki } i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$$

Za $i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ računaju se:

- kamate $I_i = \dfrac{C_{i-1} \cdot p}{100}$
- otplatna kvota $R_i = a - I_i$
- ostatak duga $C_i = C_{i-1} - R_i$.

Plan otplate ili otplatna tablica je tabelaran pregled gdje se vodi isplata zajma pregledno prema rokovima otplate.

Kraj i – tog razdoblja	Anuitet $a_i = a$	Kamate I_i	Otplatna kvota R_i	Ostatak duga C_i
0	–	–	–	C_0
1				
2				
. . .				
n				

Nakon izrade kontrolira se ispravnost otplatne tablice u dodatnom retku, tzv. kontrolnom retku. Zbroj otplatnih kvota jednak je nominalnom iznosu zajma, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} R_i = C_0.$$

Zbroj anuiteta jednak je zbroju kamata i otplatnih kvota. Kako je $a = I_i + R_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ to je

$$\sum_{i=1}^{n} a = \sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n} R_i \Rightarrow n \cdot a = \sum_{i=1}^{n} I_i + C_0.$$

U tijeku izrade otplatne tablice provode se ove kontrole:

- kontrola otplatnih kvota , $i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ $\quad R_i = R_{i-1} \cdot r$ ili $R_i = R_1 \cdot r^{i-1}$
- kontrola ostatka duga , $i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ $\quad C_i = a \cdot \dfrac{r^{n-i} - 1}{r^{n-i} \cdot (r-1)}$
- kontrola predzadnjeg ostatka duga $\quad C_{n-1} = R_n$.

① Najprije za razdoblje "0" unosimo ostatak duga koji je jednak iznosu zajma C_0. U ostatak retka stavljamo "–"

Kraj i – tog razdoblja	Anuitet $a_i = a$	Kamate I_i	Otplatna kvota R_i	Ostatak duga C_i
0	–	–	–	500 000.00 kn
1				
2				
3				
Σ				

Računamo iznos nominalno jednakih anuiteta:

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = 500\,000.00\ kn \\ n = 3\ ,\ \ p = 6.5 \\ r = 1 + \dfrac{p}{100} = 1 + \dfrac{6.5}{100} = 1.065 \end{array}\right\} \Rightarrow\ a = C_0 \cdot \frac{r^3 \cdot (r-1)}{r^3 - 1} = 500\,000.00\ kn \cdot \frac{1.065^3 \cdot (1.065-1)}{r^3 - 1} = 188\,787.85\ kn.$$

Kraj i – tog razdoblja	Anuitet $a_i = a$	Kamate I_i	Otplatna kvota R_i	Ostatak duga C_i
0	–	–	–	500 000.00 kn
1	188787.86 kn			
2	188787.86 kn			
3	188787.86 kn			
Σ				

② Za prvu godinu (i = 1)

- kamate za prvu godinu zajma moraju se platiti na cijeli iznos, tj.

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{500\,000.00\ kn \cdot 6.5}{100} = 32\,500.00\ kn$$

- otplatna kvota

$$R_1 = a - I_1 = 188\,787.85\ kn - 32\,500.00\ kn = 156\,287.85\ kn$$

- ostatak duga

$$C_1 = C_0 - R_1 = 500\,000.00\ kn - 156\,287.85\ kn = 343\,712.15\ kn.$$

Kraj i – tog razdoblja	Anuitet $a_i = a$	Kamate I_i	Otplatna kvota R_i	Ostatak duga C_i
0	–	–	–	500 000.00 kn
1	188787.86 kn	32500.00 kn	156287.85 kn	343712.15 kn
2	188787.86 kn			
3	188787.86 kn			
Σ				

③ Za drugu godinu (i = 2)

- kamate

$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{343712.15\ kn \cdot 6.5}{100} = 22\,341.29\ kn$$

- otplatna kvota

$$R_2 = a - I_2 = 188\,787.85\ kn - 22\,341.29\ kn = 166\,446.56\ kn$$

- ostatak duga

$$C_2 = C_1 - R_2 = 343\,712.15\ kn - 166\,446.56\ kn = 177\,265.59\ kn.$$

Kraj i – tog razdoblja	Anuitet $a_i = a$	Kamate I_i	Otplatna kvota R_i	Ostatak duga C_i
0	–	–	–	500 000.00 kn
1	188787.86 kn	32500.00 kn	156287.85 kn	343712.15 kn
2	188787.86 kn	22341.29 kn	166446.56 kn	177265.59 kn
3	188787.86 kn			
Σ				

④ Za treću godinu (i = 3)

- kamate

$$I_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{177\,265.59\ kn \cdot 6.5}{100} = 11522.26\ kn$$

- otplatna kvota

$$R_3 = a - I_3 = 188787.85\ kn - 11522.26\ kn = 177\,265.59\ kn$$

- ostatak duga

$$C_3 = C_2 - R_3 = 177\,265.59\ kn - 177\,265.59\ kn = 0\ kn.$$

Kraj i – tog razdoblja	Anuitet $a_i = a$	Kamate I_i	Otplatna kvota R_i	Ostatak duga C_i
0	–	–	–	500 000.00 kn
1	188787.86 kn	32500.00 kn	156287.85 kn	343712.15 kn
2	188787.86 kn	22341.29 kn	166446.56 kn	177265.59 kn
3	188787.86 kn	11522.26 kn	177265.59 kn	0.00 kn
Σ	566363.58 kn	66363.55 kn	500000.00 kn	

Vježba 002

Sastavite otplatnu tablicu zajma od 80 000.00 kuna koji se vraća krajem termina jednom u godini. Rok otplate je pet godina, kamatna stopa 10%, a obračun je složen i dekurzivan.

Rezultat:

Kraj i – tog razdoblja	Anuitet $a_i = a$	Kamate I_i	Otplatna kvota R_i	Ostatak duga C_i
0	–	–	–	80 000.00 kn
1	21103.80 kn	8000.00 kn	13103.80 kn	66896.20 kn
2	21103.80 kn	6689.62 kn	14414.18 kn	52482.02 kn
3	21103.80 kn	5248.20 kn	15855.60 kn	36626.42 kn
4	21103.80 kn	3662.64 kn	17441.16 kn	19185.26 kn
5	21103.80 kn	1918.53 kn	19185.27 kn	0.00 kn
Σ	105519.00 kn	25518.99 kn	80000.00 kn	

Zadatak 003 (Popay, ekonomska škola)

Zajam od 500000 kn odobren je poduzeću na 3 godine uz 9% godišnjih dekurzivnih kamata i uz plaćanje nominalno jednakih anuiteta krajem godine. Odredite iznos anuiteta.

Rješenje 003

Ponovimo!

Zajam u iznosu C otplaćuje se nominalno jednakim postnumerando anuitetima, a kroz n razdoblja uz stalnu kamatnu stopu p. Iznos zajma jednak je zbroju sadašnjih vrijednosti svih anuiteta i računa se formulom:

$$C = \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1},$$

gdje je C nominalni iznos odobrenog zajma, a iznos nominalno jednakih anuiteta, n broj razdoblja amortizacije zajma, r dekurzivni kamatni faktor.

$$r = 1 + \frac{p}{100}.$$

$$\left.\begin{array}{l} C0500\,000\ kn \\ n = 3\ g \\ p = 9 \\ a = ? \end{array}\right\}.$$

Najprije izračunamo dekurzivni kamatni faktor r.

$$r = 1 + \frac{p}{100} \Rightarrow r = 1 + \frac{9}{100} \Rightarrow r = 1 + 0.09 \Rightarrow r = 1.09.$$

Sada računamo anuitet a.

$$C = \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \Rightarrow \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = C \Rightarrow \frac{a}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} = C \ / \cdot \frac{r^n \cdot (r - 1)}{r^n - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; a = C \cdot \frac{r^n \cdot (r-1)}{r^n - 1} \;\Rightarrow\; a = 500\,000\ kn \cdot \frac{1.09^3 \cdot (1.09-1)}{1.09^3 - 1} \;\Rightarrow\; a = 197\,527.38\ kn.$$

Vježba 003

Zajam od 500000 kn odobren je poduzeću na 2 godine uz 9% godišnjih dekurzivnih kamata i uz plaćanje nominalno jednakih anuiteta krajem godine. Odredite iznos anuiteta.

Rezultat: 284 234.45 kn.

Zadatak 004 (Popay, ekonomska škola)

Neka osoba kupila je od trgovačke tvrtke sobni namještaj vrijedan 12000 kn. Kredit je odobren na 9 mjeseci uz učešće u gotovu od 20% i uz 6% godišnje anticipativno obračunavanje kamata. Odredi ukupne kamate i mjesečnu ratu.

Rješenje 004

Ponovimo!

Veličine koje se javljaju kod potrošačkog kredita:

C – iznos odobrenog potrošačkog kredita	
p% - učešće u gotovini , P - udio	$P = \frac{C \cdot p}{100}$
C_1 – iznos stvarnog kredita	$C_1 = C - P$
q – anticipativna kamatna stopa (obračunavanje kamata je anticipativno, tj. kamate se obračunavaju na početku svakog mjeseca od ostatka dugovanja)	
m – rok otplate potrošačkog kredita u mjesecima	
k – anticipativni kamatni koeficijent	$k = \frac{q \cdot (m+1)}{24}$
K – ukupne kamate	$K = \frac{C_1 \cdot k}{100}$
C_2 – ukupno dugovanje	$C_2 = C_1 + K$
R – iznos konstantne mjesečne rate	$R = \frac{C_2}{m}$

Ako je iznos rate decimalni broj, radimo ovako:

1. za iznos svih mjesečnih rata osim (obično) prve uzima se cjelobrojni dio decimalnog broja
2. za prvu ratu uzima se cjelobrojni dio decimalnog broja plus decimalni dio decimalnog broja pomnožen s brojem mjeseci

Shema:

$$\left.\begin{matrix} C \\ p \\ q \\ m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{ P = \frac{C \cdot p}{100} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} C_1 = C - P \\ k = \frac{q \cdot (m+1)}{24} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ K = \frac{C_1 \cdot k}{100} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} C_2 = C_1 + K \\ R = \frac{C_2}{m} \end{matrix} \right\}$$

Rješenje zadatka glasi:

C = 12000 kn, q = 6, p = 20, m = 9 mj, K = ?, R = ?

C – iznos odobrenog potrošačkog kredita	C = 12000 kn
P - udio	$P = \frac{C \cdot p}{100} = \frac{12000 \cdot 20}{100} = 2400\ kn$
C_1 – iznos stvarnog kredita	$C_1 = C - P = 12000\ kn - 2400\ kn = 9600\ kn$

q – anticipativna kamatna stopa	6
m – rok otplate u mjesecima	9
k – anticipativni kamatni koeficijent	$k = \frac{q \cdot (m+1)}{24} = \frac{6 \cdot (9+1)}{24} = \frac{6 \cdot 10}{24} = 2.5$
K – ukupne kamate	$K = \frac{C_1 \cdot k}{100} = \frac{9600 \cdot 2.5}{100} = 240\ kn$
C_2 – ukupno dugovanje	$C_2 = C_1 + K = 9600\ kn + 240\ kn = 9840\ kn$
R – iznos konstantne mjesečne rate	$R = \frac{C_2}{m} = \frac{9840\ kn}{9} = 1093.33\ kn \approx 1093.00\ kn$
R_1 – prva rata	R_1 = 1093.00 kn + 0.33 kn · 9 = 1095.97 kn

Vježba 004

Neka osoba kupila je od trgovačke tvrtke sobni namještaj vrijedan 15000 kn. Kredit je odobren na 2 godine uz učešće u gotovu od 20% i uz 12% godišnje anticipativno obračunavanje kamata. Odredi ukupne kamate i mjesečnu ratu.

Rezultat: K = 1500 kn, R_1 = 574 kn, R = 562 kn.