Zadatak 001 (Tomislav, gimnazija)

Zadane su kvadratne matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Izračunajte $(A + B) \cdot C$.

Rješenje 001

Pravokutna tablica oblika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ kojoj su elementi najčešće realni ili kompleksni brojevi naziva se matrica tipa $m \cdot n$ jer ima m redaka i n stupaca. Ako je broj redaka jednak broju stupaca, $m = n$, matrica je kvadratna i kažemo da je n-tog reda. Element matrice označavamo s a_{ij}. Prvi indeks **i** predstavlja redni broj retka, a drugi indeks **j** redni broj stupca.

Jednakost matrica

Za dvije matrice A i B kažemo da su jednake onda i samo onda, ako su istog tipa i ako je:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Množenje skalara i matrice

Matrica A množi se skalarom λ tako da se svaki element matrice A pomnoži tim skalarom. Npr.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Zbrajanje matrica

Matrice možemo zbrajati onda i samo onda ako su istog tipa. Neka je tip $A = m \cdot n$, tip $B = m \cdot n$, tada je $A + B = C$. Za element matrice $C = (c_{ij})$ vrijedi

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij},$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 6 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Množenje matrica

Za dvije matrice A i B kažemo da su **ulančane** ako je broj stupaca prve matrice A jednak broju redaka druge matrice B.

Neka je tip $A = m \cdot n$, tip $B = n \cdot p$, tada je $A \cdot B = C$. Tip $C = m \cdot p$. Element matrice $C = (c_{ij})$ dobije se po formuli:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, m$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, p.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 4 \cdot 6 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 29 \\ 27 & 17 \end{bmatrix}.$$

Nađimo rješenje našeg zadatka:

$$(A + B) \cdot C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \text{[najprije zbrojimo matrice u zagradi]} =$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\cdot 4+2\cdot 0 & 6\cdot 1+2\cdot 2\\ 3\cdot 4+4\cdot 0 & 3\cdot 1+4\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 10\\ 12 & 11\end{bmatrix}.$$

Vježba 001

Zadane su kvadratne matrice $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$. Izračunajte $(A + B)\cdot C$.

Rezultat: $\begin{bmatrix}11 & 18\\ 15 & 10\end{bmatrix}.$

Zadatak 002 (Marija, Nina, Antonia, Armin, Ana, Jelena, Goran, ekonomski fakultet)

Nađi rang matrice

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 0 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 4 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 4 & 4\\ 1 & -3 & 6 & -4 & 4\end{bmatrix}.$$

Rješenje 002

Elementarne transformacije nad retcima matrice su:

- zamjena dvaju redaka

  Primjer

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}\text{zamjenjujemo}\\ \text{prvi i treći redak}\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

- množenje ili dijeljenje retka skalarom (brojem) različitim od nule

  Primjer

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}\text{drugi redak}\\ \text{dijelimo } s\ 2\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

- množenje jednog retka odabranim skalarom (brojem) i dodavanje nekom drugom retku

  Primjer

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix}\text{prvi redak pomnožimo } s\\ -2\ \text{ i dodajemo drugom}\end{pmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ -2\cdot 1+2 & -2\cdot 3+1 & -2\cdot 1+0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -5 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Primjenom elementarnih transformacija moguće je matricu svesti na **reducirani oblik** koji je jedinstven. Tu podrazumjevamo sljedeći oblik matrice:

- Prvi ne-nul (koji nije nula) element (stožer) svakog retka iznosi 1. Svi elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su nuli.
- Svi retci koji sadrže samo nul elemente (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan ne-nul element.
- Svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera: ako stožer u retku r_1 leži u stupcu s_1, a stožer u retku $r_2 > r_1$, leži u stupcu s_2, tada je $s_2 > s_1$.

Evo nekoliko primjera reduciranih formi:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Rang matrice je broj ne-nul redaka u reduciranom obliku matrice. Označavamo ga obično slovom r i pišemo r(A) = r ili rang(A) = r.

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&3&0&4\\1&2&-3&4&0\\3&1&0&4&4\\1&-3&6&-4&4\end{bmatrix}\sim\left(\begin{matrix}\text{prvi redak množimo s -1}\\\text{i dodajemo trećem retku}\end{matrix}\right)\sim\begin{bmatrix}2&-1&3&0&4\\1&2&-3&4&0\\1&2&-3&4&0\\1&-3&6&-4&4\end{bmatrix}\sim\left(\begin{matrix}\text{drugi redak množimo s -1}\\\text{i dodajemo trećem retku}\end{matrix}\right)\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}2&-1&3&0&4\\1&2&-3&4&0\\0&0&0&0&0\\1&-3&6&-4&4\end{bmatrix}\sim\left(\begin{matrix}\text{četvrti redak množimo s -1}\\\text{i dodajemo prvom retku}\end{matrix}\right)\sim\begin{bmatrix}1&2&-3&4&0\\1&2&-3&4&0\\0&0&0&0&0\\1&-3&6&-4&4\end{bmatrix}\sim\left(\begin{matrix}\text{prvi redak množimo s -1}\\\text{i dodajemo drugom retku}\end{matrix}\right)\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&-3&4&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&-3&6&-4&4\end{bmatrix}\sim\left(\begin{matrix}\text{zamjenjujemo drugi}\\\text{i četvrti redak}\end{matrix}\right)\sim\begin{bmatrix}1&2&-3&4&0\\1&-3&6&-4&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\left(\begin{matrix}\text{prvi redak množimo s -1}\\\text{i dodajemo drugom redak}\end{matrix}\right)\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&-3&4&0\\0&-5&9&-8&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\left(\begin{matrix}\text{drugi redak}\\\text{množimo s -1}\end{matrix}\right)\sim\begin{bmatrix}1&2&-3&4&0\\0&5&-9&8&-4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\left(\begin{matrix}\text{drugi redak}\\\text{dijelimo s 5}\end{matrix}\right)\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&-3&4&0\\0&1&\frac{-9}{5}&\frac{8}{5}&\frac{-4}{5}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\left(\begin{matrix}\text{drugi redak množimo}\\s-2\text{ i dodajemo prvom}\end{matrix}\right)\sim\begin{bmatrix}1&0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&\frac{8}{5}\\0&1&\frac{-9}{5}&\frac{8}{5}&\frac{-4}{5}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Rang matrice je: r(A) = 2.

Vježba 002

Nađi rang matrice

$$A=\begin{bmatrix}1&3&6\\2&6&12\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

Rezultat: rang(A) = 2

Zadatak 003 (Marija, Nina, Antonia, Armin, Ana, Jelena, Goran, ekonomski fakultet)

Odredi inverz matrice

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&-3&-6\\3&6&10\end{bmatrix}.$$

Rješenje 003

Elementarne transformacije nad retcima matrice su:

- zamjena dvaju redaka

Primjer

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\sim\left(\begin{matrix}\text{zamjenjujemo}\\\text{prvi i treći redak}\end{matrix}\right)\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

- množenje ili dijeljenje retka skalarom (brojem) različitim od nule

Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{matrix} \text{drugi redak} \\ \text{dijelimo } s \text{ } 2 \end{matrix} \right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- množenje jednog retka odabranim skalarom (brojem) i dodavanje nekom drugom retku

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{matrix} \text{prvi redak pomnožimo } s \\ -2 \text{ i dodajemo drugom} \end{matrix} \right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 \cdot 1 + 2 & -2 \cdot 3 + 1 & -2 \cdot 1 + 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjenom elementarnih transformacija moguće je matricu svesti na **reducirani oblik** koji je jedinstven. Tu podrazumjevamo sljedeći oblik matrice:

- Prvi ne-nul (koji nije nula) element (stožer) svakog retka iznosi 1. Svi elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su nuli.
- Svi retci koji sadrže samo nul elemente (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan ne-nul element.
- Svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera: ako stožer u retku r_1 leži u stupcu s_1, a stožer u retku $r_2 > r_1$, leži u stupcu s_2, tada je $s_2 > s_1$.

Evo nekoliko primjera reduciranih formi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za kvadratnu matricu A kažemo da je **regularna** ako postoji matrica, označavamo je s A^{-1}, za koju vrijedi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Matricu A^{-1} nazivamo **inverzna matrica**. Čitav se postupak traženja inverzne matrice sprovodi na proširenoj matrici koja se sastoji u lijevom dijelu od matrice A, a u desnom od jedinične matrice I. Elementarnim transformacijama se na koncu postupka s desne nalazi upravo tražena inverzna matrica, a s lijeve strane jedinična matrica.

$[A, I] \sim [I, A^{-1}]$.

Računamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & / & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & / & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & / & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{matrix} \text{prvi redak množimo} \\ \text{s 2 i dodajemo drugom} \end{matrix} \right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & / & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & / & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & / & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{matrix} \text{prvi redak množimo} \\ \text{s -3 i dodajemo trećem} \end{matrix} \right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & / & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & / & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & / & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{matrix} \text{drugi redak množimo} \\ \text{s -2 i dodajemo prvom} \end{matrix} \right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & / & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & / & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & / & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{matrix} \text{treći redak množimo} \\ \text{s -3 i dodajemo prvom} \end{matrix} \right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & / & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & / & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & / & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vježba 003

Odredi inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rezultat: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 11 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$

Zadatak 004 (Anita, gimnazija)

Izračunaj nepoznatu matricu X:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje 004

Jednakost A · X = B za $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, **množimo slijeva inverznom matricom A^{-1}**

(A je regularna) pa imamo:

$$A \cdot X = B \;\; \Rightarrow \;\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\; \Rightarrow \;\; X = A^{-1} \cdot B.$$

Najprije računamo A^{-1}. Iz proširene matrice **[A | I]** elementarnim transformacijama nad retcima trebamo dobiti oblik **[I | A^{-1}]**:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{c} \text{prvi redak množimo s} \\ -3 \text{ i dodajemo drugom} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{c} \text{drugi redak} \\ \text{dijelimo s } 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{c} \text{drugi redak množimo} \\ \text{s } 2 \text{ i dodajemo prvom} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right].$$

Dobili smo:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \left[\text{iz svih elemenata matrice izlučimo } \frac{1}{10} \right] = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ -3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & -3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 26 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}.$$

Vježba 004

Izračunaj nepoznatu matricu X: $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$

Rezultat:

Jednakost X · A = B za $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, množimo zdesna inverznom matricom A^{-1}

(A je regularna) pa imamo:

$$X \cdot A = B \;\; \Rightarrow \;\; X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;\; \Rightarrow \;\; X = B \cdot A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 005 (Silvio, šumarski fakultet)

Izračunaj determinantu:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Rješenje 005

Determinanta trećeg reda ima oblik:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Specijalno se za računanje determinante trećeg reda rabi Sarrusovo pravilo:

- prva dva stupca prepišu se iza trećeg stupca

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

- množe se po tri broja koja se nalaze na istovrsnim dijagonalama, ali pri tome padajuće dijagonale nose pozitivan predznak, a rastuće negativan predznak

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}\right. ,$$

$$=\left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\right)-\left(a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}+a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}\right).$$

Sada je:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 5 \\ - & - & - & & \end{array}\right. =$$

$$=(0\cdot 3\cdot 7+1\cdot 5\cdot 3+3\cdot 2\cdot 5)-(3\cdot 3\cdot 3+5\cdot 5\cdot 0+7\cdot 2\cdot 1)=(15+30)-(27+14)=45-41=4.$$

Vježba 005

Izračunaj determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Rezultat: $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ - & - & - & & \end{array}\right. =(15+24+24)-(27+16+20)=63-63=0.$$

Zadatak 006 (Tanja, Tina, gimnazija)

Riješite sustav:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=6 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=7 \\ x_1+x_2+3x_3+x_4=6 \\ x_1+x_2+x_3+4x_4=6. \end{cases}$$

Rješenje 006

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{prvi redak pomnožimo s -1} \\ \text{i pribrojimo drugom retku} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{prvi redak pomnožimo s -1} \\ \text{i pribrojimo trećem retku} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{prvi redak pomnožimo s -1} \\ \text{i pribrojimo četvrtom retku} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{treći redak podijelimo s 2,} \\ \text{četvrti redak podijelimo s 3} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{četvrti redak pomnožimo s} \\ -1 \text{ i pribrojimo prvom retku} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{treći redak pomnožimo s } -1 \\ \text{i pribrojimo prvom retku} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{drugi redak pomnožimo s } -1 \\ \text{i pribrojimo prvom retku} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Sada je:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad x_3 = 2 \quad , \quad x_4 = 3.$$

Vježba 006

Riješite sustav:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 7. \end{cases}$$

Rezultat: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1.$

Zadatak 007 (Anamarijina sestra, studentica)

Riješite sustav jednadžbi Gaussovom metodom: $\begin{cases} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = -2 \\ x_2 + 3 \cdot x_3 = 6. \end{cases}$

Rješenje 007

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = -2 \\ x_2 + 3 \cdot x_3 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \\ 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = -2 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{drugi redak podijelimo} \\ \text{brojem 2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{zamijenimo} \\ \text{prvi i drugi redak} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{prvi redak pomnožimo brojem} \\ -3 \text{ i pribrojimo drugom retku} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{zamijenimo} \\ \text{drugi i treći redak} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{drugi redak pomnožimo brojem} \\ 2 \text{ i pribrojimo trećem retku} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 15 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{treći redak} \\ \text{podijelimo brojem 9} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{9} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{treći redak pribrojimo} \\ \text{prvom retku} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{l} \text{treći redak pomnožimo brojem} \\ -3 \text{ i pribrojimo drugom retku} \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}\right).$$

Vježba 007

Riješite sustav jednadžbi: $\begin{cases} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 0 \\ 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = 2 \\ x_2 + 3 \cdot x_3 = 6. \end{cases}$

Rezultat: $\left(x_1, x_2, x_3\right) = (2, 3, 1).$

Zadatak 008 (Anamarijina sestra, studentica)

Izračunajte determinantu reda n: $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \\ a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Rješenje 008

Ponovimo!

(Laplaceov razvoj)

Determinanta matrice reda n dobije se pomoću determinanti reda n – 1 tako da se zbroje (ili oduzmu) produkti elemenata nekog retka ili stupca s determinantama matrice koje se dobiju uklanjanjem retka i stupca u kojem se taj element nalazi. Piše se na dva načina:

- $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij}$, rastav po i-tom retku.

Na primjer, rastav determinante matrice reda 3 po prvom retku:

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{2} \cdot a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{3} \cdot a_{12} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{4} \cdot a_{13} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

- $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij}$, rastav po j-tom stupcu.

Na primjer, rastav determinante matrice reda 3 po prvom stupcu:

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot a_{31} \cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{2} \cdot a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{3} \cdot a_{21} \cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{4} \cdot a_{31} \cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{21} \cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{31} \cdot \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

M_{ij} je minor elementa a_{ij}. To je determinanta matrice reda n – 1 u kojoj se ne nalazi i – ti redak niti j – ti stupac početne matrice.

Determinantu rastavljamo po prvom stupcu jer su svi elementi nule, osim zadnjeg:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot a \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{determinantu} \\ \text{reda } n-1 \text{ sveli} \\ \text{smo na} \\ \text{trokutastu formu} \end{bmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot a \cdot a^{n-1} = (-1)^{n+1} \cdot a^{1+n-1} = (-1)^{n+1} \cdot a^{n}.$$

Vježba 008

Izračunajte determinantu reda n: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Rezultat: $(-1)^{n+1}.$

Zadatak 009 (Anamarijina sestra, studentica)

U ovisnosti o parametru $\lambda \in R$ nađite rang matrice: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

Rješenje 009

Elementarne transformacije nad retcima matrice su:

- zamjena dvaju redaka

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{zamjenjujemo} \\ \text{prvi i treći redak} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- množenje ili dijeljenje retka skalarom (brojem) različitim od nule

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{drugi redak} \\ \text{dijelimo brojem } 2 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- množenje jednog retka odabranim skalarom (brojem) i dodavanje nekom drugom retku

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \text{prvi redak pomnožimo s} \\ -2 \text{ i dodajemo drugom} \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 \cdot 1 + 2 & -2 \cdot 3 + 1 & -2 \cdot 1 + 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjenom elementarnih transformacija moguće je matricu svesti na **reducirani oblik** koji je jedinstven. Tu podrazumjevamo sljedeći oblik matrice:

- Prvi ne-nul (koji nije nula) element (stožer) svakog retka iznosi 1. Svi elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su nuli.

- Svi retci koji sadrže samo nul elemente (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan ne-nul element.
- Svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera: ako stožer u retku r_1 leži u stupcu s_1, a stožer u retku $r_2 > r_1$, leži u stupcu s_2, tada je $s_2 > s_1$.

Evo nekoliko primjera reduciranih formi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rang matrice je broj ne-nul redaka u reduciranom obliku matrice. Označavamo ga obično slovom r i pišemo r(A) = r ili rang(A) = r.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 1 & \lambda \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{prvi redak množimo} \\ \text{brojem } -4 \text{ i pribrajamo} \\ \text{drugom retku} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 7 & 17 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{prvi redak množimo} \\ \text{brojem } -7 \text{ i pribrajamo} \\ \text{trećem retku} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{prvi redak množimo} \\ \text{brojem } -2 \text{ i pribrajamo} \\ \text{četvrtom retku} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 0 & 10 & -25 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{treći redak podijelimo} \\ \text{brojem } 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{treći redak množimo} \\ \text{brojem } -1 \text{ i pribrojimo} \\ \text{četvrtom retku} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{zamijenimo drugi i} \\ \text{treći redak} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -15 & \lambda-12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{drugi redak množimo} \\ \text{brojem } -3 \text{ i pribrajamo} \\ \text{trećem retku} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{drugi redak podijelimo} \\ \text{brojem } 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{drugi redak množimo} \\ \text{brojem } -1 \text{ i pribrojimo} \\ \text{prvom retku} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz dobivenog reduciranog oblika slijedi:

- ako je $\lambda = 0$, tada je r(A) = 2
- ako je $\lambda \neq 0$, tada je r(A) = 3.

Vježba 009

U ovisnosti o parametru $\alpha \in R$ nađite rang matrice: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 7 & \alpha \end{bmatrix}$.

Rezultat: r(A) = 2, neovisno o vrijednosti parametra α.

Zadatak 010 (Anamarijina sestra, studentica)

Riješite sustav Gaussovom metodom eliminacije: $\begin{cases} x+3\cdot y-z=-4 \\ -x+2\cdot y+3\cdot z=5 \\ 2\cdot x+y+z=6. \end{cases}$

Rješenje 010

Linearni sustav od m jednadžbi s n nepoznanica zapisujemo u obliku:

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3+\ \dots\ +a_{1n}\cdot x_n=b_1, \\ &a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3+\ \dots\ +a_{2n}\cdot x_n=b_2, \\ &\dots \\ &a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+a_{m3}\cdot x_3+\ \dots\ +a_{mn}\cdot x_n=b_m. \end{aligned}$$

Koeficijenti a_{ij} i slobodni članovi b_i su zadani realni brojevi, a $x_1, x_2, \dots, x_n$ nepoznanice sustava. Rješenje ovog sustava je svaka n – torka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koja uvrštena u zadani sustav identički zadovoljava sve jednadžbe. Linearni sustav možemo predočiti u obliku proširene matrice sustava:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Pomoću elementarnih transformacija sustav se svede na ekvivalentan u kojemu matrica ima reducirani oblik. **Elementarne transformacije** nad retcima matrice su:

- zamjena dvaju redaka

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{c} \text{zamjenjujemo} \\ \text{prvi i treći redak} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- množenje ili dijeljenje retka skalarom (brojem) različitim od nule

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{drugi redak} \\ \text{dijelimo brojem } 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- množenje jednog retka odabranim skalarom (brojem) i dodavanje nekom drugom retku

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{prvi redak pomnožimo } s \\ -2 \text{ i dodajemo drugom} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2\cdot 1+2 & -2\cdot 3+1 & -2\cdot 1+0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjenom elementarnih transformacija moguće je matricu svesti na **reducirani oblik** koji je jedinstven. Tu podrazumjevamo sljedeći oblik matrice:

- Prvi ne-nul (koji nije nula) element (stožer) svakog retka iznosi 1. Svi elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su nuli.
- Svi retci koji sadrže samo nul elemente (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan ne-nul element.
- Svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera: ako stožer u retku r_1 leži u stupcu s_1, a stožer u retku $r_2 > r_1$, leži u stupcu s_2, tada je $s_2 > s_1$.

Evo nekoliko primjera reduciranih formi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transformacije se primjenjuju na proširenoj matrici sustava. Rješenje sustava postojat će ako matrica i proširena matrica sustava imaju isti rang.
Najprije napišemo proširenu matricu sustava i pomoću elementarnih transformacija svedemo na reducirani oblik:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \text{prvi redak pribrajamo} \\ \text{drugom retku} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \text{prvi redak množimo} \\ \text{brojem } -2 \text{ i pribrajamo} \\ \text{trećem retku} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 14 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \text{drugi redak pribrojimo} \\ \text{trećem retku} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \text{treći redak podijelimo} \\ \text{brojem 5} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \text{treći redak pomnožimo} \\ \text{brojem } -2 \text{ i pribrojimo} \\ \text{drugom retku} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \text{drugi redak podijelimo} \\ \text{brojem 5} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \text{treći redak pribrojimo} \\ \text{prvom retku} \end{pmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \text{drugi redak pomnožimo} \\ \text{brojem } -3 \text{ i pribrojimo} \\ \text{prvom retku} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Matricu A sveli smo na reducirani oblik. Budući da je rang matrice A jednak rangu proširene matrice (iznosi 3), rješenje sustava čitamo direktno iz reduciranog oblika:

$$x = 2,\ y = -1,\ z = 3.$$

Vježba 010

Riješite sustav Gaussovom metodom eliminacije:

$$\{x + 2\cdot y + 3\cdot z = 3\ ,\ -2\cdot x + z = -2\ ,\ x + 2\cdot y - z = 3\ ,\ -x + 2\cdot y + 12\cdot z = 1.$$

Rezultat: x = 1, y = 1, z = 0. Naputak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 12 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{pmatrix} \text{posljednji redak matrice, ispunjen} \\ \text{nulama, ne moramo prepisivati} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right\}.$$

Zadatak 011 (Nataša, studentica)

Za koji realni broj x će matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ imati inverznu matricu?

Rješenje 011

Ponovimo!

Kvadratna matrica (ima jednaki broj redaka i stupaca) čija je determinanta različita od nule naziva se regularnom matricom. Regularna kvadratna matrica ima inverznu matricu.

Dakle, da bi matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ imala inverznu matricu njezina determinanta mora biti različita od nule:

$$\det A \neq 0.$$

Determinantu matrice A izračunamo pomoću Sarrusova pravila (pogledati **Zadatak 005**):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & + & + \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ - & - & - \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & x \\ 5 & 1 \end{matrix} =$$

$$= (1 \cdot x \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot 5 + 0 \cdot 2 \cdot 1) - (5 \cdot x \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4) = (4 \cdot x + 20) - (1 + 32) = 4 \cdot x + 20 - 1 - 32 = 4 \cdot x - 13.$$

Determinanta je jednaka nuli za

$$4 \cdot x - 13 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{4}.$$

Znači za sve realne brojeve različite od $\frac{13}{4}$ matrica A imat će inverznu matricu.

Vježba 011

Za koji realni broj x matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ neće imati inverznu matricu?

Rezultat: $x = \frac{13}{4}.$

Zadatak 012 (Ivana, studentica)

Dokažite da je $\begin{vmatrix} b \cdot c & a & a^2 \\ c \cdot a & b & b^2 \\ a \cdot b & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$

Rješenje 012

Determinanta se množi ili dijeli nekim brojem $k \neq 0$, ako se tim brojem pomnože ili podijele svi elementi jednog retka ili jednog stupca:

$$k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k \cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinanta trećeg reda ima oblik:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Specijalno se za računanje determinante trećeg reda rabi Sarrusovo pravilo:

- prva dva stupca prepišu se iza trećeg stupca

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

- množe se po tri broja koja se nalaze na istovrsnim dijagonalama, ali pri tome padajuće dijagonale nose pozitivan predznak, a rastuće negativan predznak

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ - & - & - \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} ,$$

$$=\left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\right)-\left(a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}+a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}\right).$$

1.inačica

$$\begin{vmatrix} b\cdot c & a & a^2 \\ c\cdot a & b & b^2 \\ a\cdot b & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{prvi redak pomnožimo sa a} \\ \text{drugi redak pomnožimo sa } b \\ \text{treći redak pomnožimo sa c} \end{bmatrix} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\cdot \begin{vmatrix} a\cdot b\cdot c & a^2 & a^3 \\ a\cdot b\cdot c & b^2 & b^3 \\ a\cdot b\cdot c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{a\cdot b\cdot c}\cdot \begin{vmatrix} a\cdot b\cdot c & a^2 & a^3 \\ a\cdot b\cdot c & b^2 & b^3 \\ a\cdot b\cdot c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{iz prvog stupca izlučimo} \\ \text{zajednički faktor } a\cdot b\cdot c \end{bmatrix} = \frac{1}{a\cdot b\cdot c}\cdot a\cdot b\cdot c\cdot \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

2.inačica

Treba dokazati:

$$\begin{vmatrix} b\cdot c & a & a^2 \\ c\cdot a & b & b^2 \\ a\cdot b & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Obje determinante izračunamo po Sarrusovom pravilu i usporedimo rezultate.

- $$\begin{vmatrix} b\cdot c & a & a^2 \\ c\cdot a & b & b^2 \\ a\cdot b & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} + & + & + \\ b\cdot c & a & a^2 \\ c\cdot a & b & b^2 \\ a\cdot b & c & c^2 \\ - & - & - \end{vmatrix} \begin{matrix} b\cdot c & a \\ c\cdot a & b = \\ a\cdot b & c \end{matrix}$$

$$=\left(b^2\cdot c^3+a^2\cdot b^3+c^2\cdot a^3\right)-\left(a^3\cdot b^2+c^2\cdot b^3+a^2\cdot c^3\right)=$$

$$=b^2\cdot c^3+a^2\cdot b^3+c^2\cdot a^3-a^3\cdot b^2-c^2\cdot b^3-a^2\cdot c^3. \qquad (1)$$

$$\bullet \quad \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & a^2 \\ 1 & b^2 \\ 1 & c^2 \end{matrix} =$$

$$=\left(b^2 \cdot c^3 + a^2 \cdot b^3 + c^2 \cdot a^3\right) - \left(a^3 \cdot b^2 + c^2 \cdot b^3 + a^2 \cdot c^3\right) =$$

$$= b^2 \cdot c^3 + a^2 \cdot b^3 + c^2 \cdot a^3 - a^3 \cdot b^2 - c^2 \cdot b^3 - a^2 \cdot c^3. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi jednakost.

Vježba 012

Dokažite da je $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + a^3 \\ 1 & a^2 & a^3 + a \\ 1 & a^3 & a + a^2 \end{vmatrix} = 0.$

Rezultat: Tvrdnja točna.

Zadatak 013 (Ptičica, studentica)

Napišite antisimetričnu matricu A trećeg reda s elementima a_{ij} za koju vrijedi da je $a_{21} = x$, $a_{31} = -1$, $a_{32} = -x$. Izračunajte parametar $x \in R$ takav da je det A = 0.

Rješenje 013

Ponovimo!

Zamjenom u matrici A = (a_{ij}), redaka odgovarajućim stupcima, dobije se transponirana matrica $A^T = (a_{ji})$. Ako je matrica A tipa m · n, onda je njezina transponirana matrica A^T tipa n · m. Ako je A kvadratna matrica (ima jednak broj redaka i stupaca), onda je njezina determinanta jednaka determinanti transponirane matrice A^T:

$$\det A = \det A^T. \qquad (1)$$

Kvadratna matrica A je antisimetrična ako je jednaka negativnoj transponiranoj matrici A^T, tj.

$$A = -A^T.$$

Za njihove determinante vrijedi jednakost:

$$\det A = -\det A^T. \qquad (2)$$

Kod antisimetrične matrice elementi na glavnoj dijagonali jednaki su nuli ($a_{ii} = 0$, i = 1, 2, 3, …, n).
Antisimetrična matrica trećeg reda je, na primjer

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tvrdnja: Determinanta antisimetrične matrice jednaka je nuli.

Dokaz: Neka je A antisimetrična matrica. Zbog (1) i (2) slijedi

$$\left.\begin{matrix} \det A = \det A^T \\ \det A = -\det A^T \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot \det A = 0 \; /:2 \;\Rightarrow\; \det A = 0.$$ Dokaz gotov. (*Q.E.D.*)

Napišimo zadanu antisimetričnu matricu trećeg reda. Zadani elementi su:

$$a_{21} = x,\ a_{31} = -1,\ a_{32} = -x.$$

Ostali elementi iznose:

$$a_{11} = 0,\ a_{12} = -a_{21} = -x,\ a_{13} = -a_{31} = 1,\ a_{22} = 0,\ a_{23} = -a_{32} = x,\ a_{33} = 0.$$

Matrica glasi:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -x & 1 \\ x & 0 & x \\ -1 & -x & 0 \end{bmatrix}.$$

1.inačica

Budući da je determinanta antisimetrične matrice jednaka nuli, znači da x može biti bilo koji realan broj, $x \in R.$

2.inačica

Tražimo x realan broj za koji vrijedi det A = 0:

$$\begin{vmatrix} 0 & -x & 1 \\ x & 0 & x \\ -1 & -x & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Uporabit ćemo Sarrusovo pravilo koje se specijalno koristi za računanje determinante trećeg reda. Pogledati **Zadatak 012.**

$$\begin{vmatrix} 0 & -x & 1 \\ x & 0 & x \\ -1 & -x & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -x & 1 \\ x & 0 & x \\ -1 & -x & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & -x \\ x & 0 \\ -1 & -x \end{matrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0\cdot 0\cdot 0+(-x)\cdot x\cdot(-1)+1\cdot x\cdot(-x)\right)-\left(-1\cdot 0\cdot 1+(-x)\cdot x\cdot 0+0\cdot x\cdot(-x)\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(0+x^2-x^2\right)-(0+0+0)=0 \Rightarrow 0-0=0 \Rightarrow 0=0.$$

Dobili smo identitet, što znači da x može biti bilo koji realan broj, $x \in R.$

Vježba 013

Napišite antisimetričnu matricu A trećeg reda s elementima a_{ij} za koju vrijedi da je $a_{21} = x$, $a_{31} = 1$, $a_{32} = -x$. Izračunajte parametar $x \in R$ takav da je det A = 0.

Rezultat: $x \in R.$

Zadatak 014 (Ivana, studentica)

Riješi sustav jednadžbi Cramerovom metodom:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=6 \\ 2\cdot y-z&=3 \\ 2\cdot x\quad +z&=7 \end{aligned}\right\}.$$

Rješenje 014

Ponovimo!

Sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice, obično se te nepoznanice označavaju s x, y i z, vrlo elegantno rješava se pomoću Cramerova pravila. Neka sustav ima oblik

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\cdot x+a_{12}\cdot y+a_{13}\cdot z&=b_1 \\ a_{21}\cdot x+a_{22}\cdot y+a_{23}\cdot z&=b_2 \\ a_{31}\cdot x+a_{32}\cdot y+a_{33}\cdot z&=b_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Najprije napišemo determinantu sustava (nju čine koeficijenti uz nepoznanice x, y i z):

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Sada tražimo tri determinante:

- D_x je determinanta dobivena iz determinante D tako da se prvi stupac a_{11}, a_{21}, a_{31} zamijeni stupcem b_1, b_2, b_3.

$$D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- D_y je determinanta dobivena iz determinante D tako da se drugi stupac a_{12}, a_{22}, a_{32} zamijeni stupcem b_1, b_2, b_3.

$$D_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- D_z je determinanta dobivena iz determinante D tako da se treći stupac a_{13}, a_{23}, a_{33} zamijeni stupcem b_1, b_2, b_3.

$$D_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Rješenje sustava (1) je dano sa

$$x=\frac{D_x}{D} \quad , \quad y=\frac{D_y}{D} \quad , \quad z=\frac{D_z}{D}. \tag{2}$$

Formule (2) zovu se Cramerovo pravilo za rješavanje sustava.
Rješavamo zadani sustav.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2\cdot y-z=3 \\ 2\cdot x \quad +z=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{uočimo koeficijente} \\ \text{uz nepoznanice } x,\ y \text{ i } z\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z=6 \\ 0\cdot x+2\cdot y-1\cdot z=3 \\ 2\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{računamo} \\ \text{determinantu} \\ \text{sustava, } D\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{Sarrusovo pravilo!} \\ \text{Pogledati Zadatak 012}\end{array}\right]=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right.=$$

$$=(1\cdot 2\cdot 1+1\cdot(-1)\cdot 2+1\cdot 0\cdot 0)-(2\cdot 2\cdot 1+0\cdot(-1)\cdot 1+1\cdot 0\cdot 1)=(2-2+0)-(4+0+0)=0-4=-4.$$

Sada računamo tri determinante D_x, D_y, D_z:

- $$D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_x=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{Sarrusovo pravilo!} \\ \text{Pogledati Zadatak 012}\end{array}\right]=\left|\begin{array}{ccc|cc} 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right.=$$

$$=(6\cdot 2\cdot 1+1\cdot(-1)\cdot 7+1\cdot 3\cdot 0)-(7\cdot 2\cdot 1+0\cdot(-1)\cdot 6+1\cdot 3\cdot 1)=(12-7+0)-(14+0+3)=5-17=-12.$$

- $$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{Sarrusovo pravilo!} \\ \text{Pogledati Zadatak 012}\end{array}\right]=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right.=$$

$$=(1\cdot 3\cdot 1+6\cdot(-1)\cdot 2+1\cdot 0\cdot 7)-(2\cdot 3\cdot 1+7\cdot(-1)\cdot 1+1\cdot 0\cdot 6)=$$

$$=(3-12+0)-(6-7+0)=-9-(-1)=-9+1=-8.$$

- $$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{Sarrusovo pravilo!} \\ \text{Pogledati Zadatak 012}\end{array}\right]=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right.=$$

$$=(1\cdot2\cdot7+1\cdot3\cdot2+6\cdot0\cdot0)-(2\cdot2\cdot6+0\cdot3\cdot1+7\cdot0\cdot1)=(14+6+0)-(24+0+0)=20-24=-4.$$

Rješenja sustava glase:

- $\left.\begin{matrix} D=-4 \\ D_x=-12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{D_x}{D} \Rightarrow x=\dfrac{-12}{-4} \Rightarrow x=3,$
- $\left.\begin{matrix} D=-4 \\ D_y=-8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=\dfrac{D_y}{D} \Rightarrow y=\dfrac{-8}{-4} \Rightarrow y=2,$
- $\left.\begin{matrix} D=-4 \\ D_z=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z=\dfrac{D_z}{D} \Rightarrow z=\dfrac{-4}{-4} \Rightarrow z=1.$

$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 1).$$

Vježba 014

Riješi sustav jednadžbi Cramerovom metodom:

$$\left.\begin{matrix} x+\ \ y+z=5 \\ x+2\cdot y-z=2 \\ 2\cdot x+\ \ y+2\cdot z=9 \end{matrix}\right\}.$$

Rezultat: $(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2).$

Zadatak 015 (Iva, gimnazija)

Dokažite jednakost $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b).$

Rješenje 015

Ponovimo!

(Laplaceov razvoj)

Determinanta matrice reda n dobije se pomoću determinanti reda n – 1 tako da se zbroje (ili oduzmu) produkti elemenata nekog retka ili stupca s determinantama matrice koje se dobiju uklanjanjem retka i stupca u kojem se taj element nalazi. Piše se na dva načina:

- $\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot M_{ij}$, rastav po i-tom retku.

Na primjer, rastav determinante matrice reda 3 po prvom retku:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{2}\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{3}\cdot a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{4}\cdot a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

- $\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot M_{ij}$, rastav po j-tom stupcu.

Na primjer, rastav determinante matrice reda 3 po prvom stupcu:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{2+1}\cdot a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\cdot a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{2}\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{3}\cdot a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{4}\cdot a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

M_{ij} je minor elementa a_{ij}. To je determinanta matrice reda n – 1 u kojoj se ne nalazi i – ti redak niti j – ti stupac početne matrice.
Svakoj kvadratnoj matrici (koja ima jednaki broj redaka i stupaca) pridružena je njezina determinanta. Determinanti odgovara brojčana vrijednost. Ako je zadana kvadratna matrica drugog reda (ima dva retka i dva stupca)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

njezina pripadna determinanta drugog reda glasi

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},$$

a računa se po pravilu

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}.$$

Elementi determinante su brojevi a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} pri čemu prvi dio indeksa elementa pokazuje broj reda u kojem se element nalazi, a drugi dio indeksa elementa broj stupca u kojem se taj element nalazi. Na primjer, a_{12} je element koji se nalazi u prvom retku i drugom stupcu, a element a_{21} se nalazi u drugom retku i prvom stupcu. Elementi a_{11} i a_{22} čine glavnu dijagonalu determinante, a elementi a_{21} i a_{12} čine sporednu dijagonalu. Determinantu drugog reda računamo tako da pomnožimo elemente na glavnoj dijagonali i od toga oduzmemo pomnožene elemente na sporednoj dijagonali, tj. determinanta drugog reda jednaka je razlici umnožaka elemenata na glavnoj i sporednoj dijagonali.

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Zadanu determinantu rastavljamo po prvom stupcu jer su svi elementi jedinice pa je lako računati.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} b & b^2\\ c & c^2\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} a & a^2\\ c & c^2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} a & a^2\\ b & b^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & b^2\\ c & c^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & a^2\\ c & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a^2\\ b & b^2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(b\cdot c^2-c\cdot b^2\right)-\left(a\cdot c^2-c\cdot a^2\right)+\left(a\cdot b^2-b\cdot a^2\right)=b\cdot c^2-c\cdot b^2-a\cdot c^2+c\cdot a^2+a\cdot b^2-b\cdot a^2=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=\left(b\cdot c^2-a\cdot c^2\right)+\left(-c\cdot b^2+c\cdot a^2\right)+\left(a\cdot b^2-b\cdot a^2\right)=$$

$$=c^2\cdot(b-a)-c\cdot\left(b^2-a^2\right)+a\cdot b\cdot(b-a)=c^2\cdot(b-a)-c\cdot(b-a)\cdot(b+a)+a\cdot b\cdot(b-a)=$$

$$=c^2\cdot(b-a)-c\cdot(b-a)\cdot(b+a)+a\cdot b\cdot(b-a)=(b-a)\cdot\left(c^2-c\cdot(b+a)+a\cdot b\right)=$$

$$=(b-a)\cdot\left(c^2-c\cdot b-c\cdot a+a\cdot b\right)=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=(b-a)\cdot\left(\left(c^2-c\cdot b\right)+(-c\cdot a+a\cdot b)\right)=$$

$$=(b-a)\cdot\left(\left(c^2-c\cdot a\right)+(-c\cdot b+a\cdot b)\right)=(b-a)\cdot(c\cdot(c-a)-b\cdot(c-a))=(b-a)\cdot(c\cdot(c-a)-b\cdot(c-a))=$$

$$=(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b).$$

Vježba 015

Dokažite jednakost $\begin{vmatrix}1 & a & b\cdot c\\ 1 & b & a\cdot c\\ 1 & c & a\cdot b\end{vmatrix}=(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b).$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 016 (Marta, gimnazija)

Zadane su kvadratne matrice $A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}c & d\\ d & c\end{bmatrix}$, gdje su $a, b, c, d\in R.$ Dokazati da vrijedi zakon komutacije za množenje tih matrica, tj. da je $A\cdot B=B\cdot A.$

Napomena: Množenje matrica općenito nije komutativno. Matrice za koje je A · B = B · A nazivaju se komutativnim matricama.

Rješenje 016

Ponovimo!

Za zbrajanje i množenje realnih brojeva vrijedi svojstvo komutativnosti (zamjene).

$$\left.\begin{array}{l}a+b=b+a\\ a\cdot b=b\cdot a\end{array}\right\},\ \text{za sve } a,\ b\in R.$$

Množenje matrica

Za dvije matrice A i B kažemo da su **ulančane** ako je broj stupaca prve matrice A jednak broju redaka druge matrice B.

Neka je tip A = m · n, tip B = n · p, tada je A · B = C . Tip C = m · p. Element matrice C = (c_{ij}) dobije se po formuli:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$$

i = 1, 2, 3, ... , m

j = 1, 2, 3, ... , p.

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 1\\ 6 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot5+4\cdot6 & 1\cdot1+4\cdot7\\ 3\cdot5+2\cdot6 & 3\cdot1+2\cdot7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29 & 29\\ 27 & 17\end{bmatrix}.$$

Nađimo umnožak matrica.

$$\left.\begin{array}{l}A\cdot B=\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c & d\\ d & c\end{bmatrix}\\ \\ B\cdot A=\begin{bmatrix}c & d\\ d & c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ b & a\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A\cdot B=\begin{bmatrix}a\cdot c+b\cdot d & a\cdot d+b\cdot c\\ b\cdot c+a\cdot d & b\cdot d+a\cdot c\end{bmatrix}\\ \\ B\cdot A=\begin{bmatrix}c\cdot a+d\cdot b & c\cdot b+d\cdot a\\ d\cdot a+c\cdot b & d\cdot b+c\cdot a\end{bmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A\cdot B&=\begin{bmatrix} a\cdot c+b\cdot d & a\cdot d+b\cdot c \\ a\cdot d+b\cdot c & a\cdot c+b\cdot d \end{bmatrix} \\ \\ B\cdot A&=\begin{bmatrix} a\cdot c+b\cdot d & a\cdot d+b\cdot c \\ a\cdot d+b\cdot c & a\cdot c+b\cdot d \end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \Rightarrow A\cdot B=B\cdot A.$$

Budući da za zbrajanje i množenje realnih brojeva vrijedi zakon komutacije, desne strane obje jednakosti jednake su pa su zato jednake i lijeve strane, tj. A · B = B · A.

Vježba 016

Zadane su kvadratne matrice $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. Dokazati da vrijedi zakon komutacije za množenje tih matrica, tj. da je $A\cdot B=B\cdot A.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 017 (Micek, veleučilište)

Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunati $2\cdot A+3\cdot B.$

Rješenje 017

Ponovimo!

Pravokutna tablica oblika A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ kojoj su elementi najčešće realni ili kompleksni brojevi naziva se matrica tipa m · n jer ima m redaka i n stupaca. Ako je broj redaka jednak broju stupaca, m = n, matrica je kvadratna i kažemo da je n-tog reda. Element matrice označavamo s a_{ij}. Prvi indeks **i** predstavlja redni broj retka, a drugi indeks **j** redni broj stupca.

Množenje skalara i matrice

Matrica A množi se skalarom λ tako da se svaki element matrice A pomnoži tim skalarom. Npr.

$$\lambda\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda\cdot a & \lambda\cdot b \\ \lambda\cdot c & \lambda\cdot d \end{bmatrix}.$$

Zbrajanje matrica

Matrice možemo zbrajati onda i samo onda ako su istog tipa (imaju jednaki broj redaka i stupaca). Neka je tip A = m · n, tip B = m · n, tada je A + B = C. Za element matrice C = (c_{ij}) vrijedi

$$a_{ij}+b_{ij}=c_{ij} \quad , \quad i=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ m \quad , \quad j=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}.$$

Nađimo rješenje zadatka.

$$2\cdot A+3\cdot B=2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2+3 & 2+9 \\ -2+6 & 4+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Vježba 017

Zadane su matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunati $3\cdot B+2\cdot A.$

Rezultat: $\begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$

Zadatak 018 (Micek, veleučilište)

Ako je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, odredi A^2.

Rješenje 018

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Pravokutna tablica oblika A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ kojoj su elementi najčešće realni ili kompleksni brojevi naziva se matrica tipa m · n jer ima m redaka i n stupaca. Ako je broj redaka jednak broju stupaca, m = n, matrica je kvadratna i kažemo da je n-tog reda. Element matrice označavamo s a_{ij}. Prvi indeks **i** predstavlja redni broj retka, a drugi indeks **j** redni broj stupca.

Množenje matrica

Za dvije matrice A i B kažemo da su ulančane ako je broj stupaca prve matrice A jednak broju redaka druge matrice B.

Neka je tip A = m · n, tip B = n · p, tada je A · B = C . Tip C = m · p. Element matrice C = (c_{ij}) dobije se po formuli:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots , m \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots , n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 4 \cdot 6 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 29 \\ 27 & 17 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot a + b \cdot b & a \cdot b + b \cdot a \\ b \cdot a + a \cdot b & b \cdot b + a \cdot a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 2 \cdot a \cdot b \\ 2 \cdot a \cdot b & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$

Vježba 018

Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$, odredi A^2.

Rezultat: $\begin{bmatrix} 1 + a \cdot b & 2 \cdot a \\ 2 \cdot b & 1 + a \cdot b \end{bmatrix}.$

Zadatak 019 (Micek, veleučilište)

Izračunaj vrijednost determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$

Rješenje 019

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Svakoj kvadratnoj matrici (koja ima jednaki broj redaka i stupaca) pridružena je njezina determinanta. Determinanti odgovara brojčana vrijednost. Ako je zadana kvadratna matrica drugog reda (ima dva retka i dva stupca)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

njezina pripadna determinanta drugog reda glasi

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

a računa se po pravilu

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \color{magenta}{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} \\ \color{blue}{a_{21}} & \color{magenta}{a_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Determinanta trećeg reda ima oblik:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Specijalno se za računanje determinante trećeg reda rabi Sarrusovo pravilo:

- prva dva stupca prepišu se iza trećeg stupca

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \color{red}{a_{11}} & \color{red}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \color{red}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \color{red}{a_{31}} & \color{red}{a_{32}} \end{array}\right.$$

- množe se po tri broja koja se nalaze na istovrsnim dijagonalama, ali pri tome padajuće dijagonale nose pozitivan predznak, a rastuće negativan predznak

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \color{red}{+} & \color{red}{+} & \color{red}{+} & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \color{blue}{-} & \color{blue}{-} & \color{blue}{-} & & \end{array}\right. =$$

$$= \left(\color{red}{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}}\right) - \left(\color{blue}{a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}}\right).$$

(Laplaceov razvoj)

Determinanta matrice reda n dobije se pomoću determinanti reda n – 1 tako da se zbroje (ili oduzmu) produkti elemenata nekog retka ili stupca s determinantama matrice koje se dobiju uklanjanjem retka i stupca u kojem se taj element nalazi. Piše se na dva načina:

- $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij}$, rastav po i - tom retku.

Na primjer, rastav determinante matrice reda 3 po prvom retku:

$$\det A = \begin{vmatrix} \color{magenta}{a_{11}} & \color{red}{a_{12}} & \color{green}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot \color{magenta}{a_{11}} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot \color{red}{a_{12}} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot \color{green}{a_{13}} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2} \cdot \color{magenta}{a_{11}} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3} \cdot \color{red}{a_{12}} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{4} \cdot \color{green}{a_{13}} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Vrijednost determinante izračunat ćemo tako da je razvijemo, na primjer, po elementima prvog retka.

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix}c & a\\ a & b\end{vmatrix}-b\cdot\begin{vmatrix}b & a\\ c & b\end{vmatrix}+c\cdot\begin{vmatrix}b & c\\ c & a\end{vmatrix}=$$

$$=a\cdot(c\cdot b-a\cdot a)-b\cdot(b\cdot b-c\cdot a)+c\cdot(b\cdot a-c\cdot c)=$$

$$=a\cdot\left(b\cdot c-a^2\right)-b\cdot\left(b^2-a\cdot c\right)+c\cdot\left(a\cdot b-c^2\right)=$$

$$=a\cdot\left(b\cdot c-a^2\right)-b\cdot\left(b^2-a\cdot c\right)+c\cdot\left(a\cdot b-c^2\right)=$$

$$=a\cdot b\cdot c-a^3-b^3+a\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot c-c^3=3\cdot a\cdot b\cdot c-a^3-b^3-c^3.$$

2.inačica

Sarrusovo pravilo pomoći će nam da izračunamo vrijednost determinante.

$$\left|\begin{array}{ccc}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{array}\right|\begin{array}{cc}a & b\\ b & c\\ c & a\end{array}=\left|\begin{array}{ccc}+ & + & +\\ a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\\ - & - & -\end{array}\right|\begin{array}{cc}\\ a & b\\ b & c\\ c & a\\ \\ \end{array}=$$

$$=(a\cdot c\cdot b+b\cdot a\cdot c+c\cdot b\cdot a)-(c\cdot c\cdot c+a\cdot a\cdot a+b\cdot b\cdot b)=$$

$$=(a\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot c)-\left(c^3+a^3+b^3\right)=3\cdot a\cdot b\cdot c-a^3-b^3-c^3.$$

Vježba 019

Izračunaj vrijednost determinante $\begin{vmatrix}a & c & b\\ b & a & c\\ c & b & a\end{vmatrix}.$

Rezultat: $a^3+b^3+c^3-3\cdot a\cdot b\cdot c.$

Zadatak 020 (Sanja, studentica)

Zadane su matrice: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$. Izračunajte $3\cdot A-2\cdot B-C^T$.

Rješenje 020

Ponovimo!

Pravokutna tablica oblika A = $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$ kojoj su elementi najčešće realni ili kompleksni brojevi naziva se matrica tipa m · n jer ima m redaka i n stupaca. Ako je broj redaka jednak broju stupaca, m = n, matrica je kvadratna i kažemo da je n-tog reda. Element matrice označavamo s a_{ij}. Prvi indeks **i** predstavlja redni broj retka, a drugi indeks **j** redni broj stupca.

Množenje skalara i matrice

Matrica A množi se skalarom λ tako da se svaki element matrice A pomnoži tim skalarom. Npr.

$$\lambda\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda\cdot a & \lambda\cdot b \\ \lambda\cdot c & \lambda\cdot d \end{bmatrix}.$$

Zbrajanje i oduzimanje matrica

Matrice možemo zbrajati (oduzimati) onda i samo onda ako su istog tipa (imaju jednaki broj redaka i stupaca). Neka je tip A = m · n, tip B = m · n, tada je A + B = C. Za element matrice C = (c_{ij}) vrijedi

$$a_{ij}+b_{ij}=c_{ij} \qquad , \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots ,\ m \qquad , \qquad j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots ,\ n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \end{bmatrix}.$$

Transponirana matrica

Zamjenom u matrici A = (a_{ij}), redaka odgovarajućim stupcima, dobije se transponirana matrica A^T = (a_{ji}). Ako je matrica A tipa m · n, onda je njezina transponirana matrica A^T tipa n · m.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

$$3\cdot A-2\cdot B-C^T=3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T=$$

$$=\begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 0 & 3\cdot 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 6 & 8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-4 & 6-2 & -3-2 \\ 9-(-2) & 0-6 & 3-8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 9+2 & -6 & -5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 4 & -5 \\ 11 & -6 & -5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -1-1 & 4-0 & -5-3 \\ 11-2 & -6-1 & -5-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 4 & -8 \\ 9 & -7 & -7 \end{bmatrix}.$$

Vježba 020

Zadane su matrice: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Izračunajte $2\cdot A+3\cdot B+C^T$.

Rezultat: $\begin{bmatrix} 7 & 7 & -2 \\ 1 & 8 & 12 \end{bmatrix}.$