Zadatak 001 (Petra, medicinska škola)

Izračunaj $(1 - i)^3$.

Rješenje 001

Ponovimo formulu za kub razlike: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Podsjetimo se potencija imaginarne jedinice i: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$.
Sada je:

$$(1 - i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 - i^3 = 1 - 3 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot (-1) - (-i) = 1 - 3i - 3 + i = -2 - 2i = -2(1 + i).$$

Vježba 001

Izračunaj $(2 - i)^3$.

Rezultat: $2 - 11i$.

Zadatak 002 (Dean, tehnička škola)

Odredi realne brojeve x i y ako je zadano: $(2x + y) + (x + y)i = 3 + i$.

Rješenje 002

Ponovimo definiciju jednakosti kompleksnih brojeva. Kada su dva kompleksna broja jednaka?

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c\,,\ b = d.$$

U našem slučaju je:

$$\mathrm{Re}\,[(2x + y) + (x + y)i] = 2x + y \quad , \quad \mathrm{Im}\,[(2x + y) + (x + y)i] = x + y,$$

$$\mathrm{Re}\,(3 + i) = 3 \quad , \quad \mathrm{Im}\,(3 + i) = 1.$$

Izjednačimo realne i imaginarne dijelove:

$$2x + y = 3$$
$$x + y = 1.$$

Sustav riješimo metodom suprotnih koeficijenata tako da drugu jednadžbu pomnožimo brojem -1 i onda jednadžbe zbrojimo.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 1 \ /\cdot(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Uvrstimo $x = 2$ u drugu jednadžbu:

$$x + y = 1 \ \Rightarrow \ 2 + y = 1 \ \Rightarrow \ y = 1 - 2 \ \Rightarrow \ y = -1.$$

Rješenje je $(x, y) = (2, -1)$.

Vježba 002

Odredi realne brojeve x i y ako je zadano: $(x + 6) + 2(y - 1)i = 3 - 4i$.

Rezultat: $(x, y) = (-3, -1)$.

Zadatak 003 (Katarina, ekonomska škola)

Za koji realan broj a je realni dio kompleksnog broja $z = \frac{a + 2i}{1 - i}$ jednak 1?

Rješenje 003

Najprije podijelimo dva kompleksna broja tako da razlomak pomnožimo s konjugirano kompleksnim brojem iz nazivnika:

$$z = \frac{a + 2i}{1 - i} = \frac{a + 2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{(a + 2i) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} = \left[2i \cdot i = 2i^2 = 2 \cdot (-1) = -2\right] =$$

$$= \frac{a + ai + 2i - 2}{1^2 + 1^2} = \frac{(a - 2) + (a + 2)i}{2} = \frac{a - 2}{2} + \frac{a + 2}{2}i.$$

Kompleksan broj je $z = \frac{a-2}{2} + \frac{a+2}{2} \cdot i.$

Realni dio kompleksnog broja iznosi: $\operatorname{Re} z = \frac{a-2}{2}.$

Iz uvjeta zadatka je

$$\operatorname{Re}(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a-2}{2} = 1 \;\; / \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad a - 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4.$$

Vježba 003

Za koji realan broj a je imaginarni dio kompleksnog broja $z = \frac{a+2i}{1-i}$ jednak 5?

Rezultat: a = 8.

Zadatak 004 (Kristina, gimnazija)

Riješi sustav jednadžbi:

$$\begin{array}{l} 2z + w = 7i \\ iz + w = -1. \end{array}$$

Rješenje 004

1.inačica

Sustav rješavamo metodom suprotnih koeficijenata. Drugu jednadžbu pomnožimo brojem – 1.

$$\left.\begin{array}{l} 2z+w=7i \\ iz+w=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z+w=7i \\ iz+w=-1 \; / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z+w=7i \\ -iz-w=1 \end{array}\right\} \Rightarrow (2-i)z = 1+7i \; / : (2-i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{1+7i}{2-i} = \frac{1+7i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2+i+14i-7}{4+1} = \frac{-5+15i}{5} = \frac{-5}{5} + \frac{15}{5} i = -1+3i.$$

Iz jednadžbe iz + w = – 1 izračunamo nepoznanicu w:

$$w = -1 - iz = -1 - i(-1+3i) = -1 + i + 3 = 2 + i.$$

Rješenje sustava je:

(z, w) = (– 1 + 3i, 2 + i).

2.inačica

$$\begin{array}{l} 2z + w = 7i \\ iz + w = -1. \end{array}$$

Stavimo da je z = a + bi, w = c + di. Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} 2(a+bi)+c+di=7i \\ i(a+bi)+c+di=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+2bi+c+di=7i \\ ia-b+c+di=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2a+c)+(2b+d)i=7i \\ (-b+c)+(a+d)i=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi.]

$$\left.\begin{array}{l} 2a+c=0 \\ 2b+d=7 \\ -b+c=-1 \\ a+d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+c=0 \;\Rightarrow\; c=-2a \\ 2b+d=7 \\ -b+c=-1 \\ a+d=0 \;\Rightarrow\; d=-a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2b-a=7 \\ -b-2a=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2b-a=7 \\ -b-2a=-1 \; / \cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2b-a=7 \\ -2b-4a=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow -5a = 5 \; / : (-5) \Rightarrow a = -1.$$

$$\begin{array}{l} c = -2a = -2 \cdot (-1) = 2 \\ d = -a = -(-1) = 1 \\ -b + c = -1 \Rightarrow -b = -1 - c \; / \cdot (-1) \Rightarrow b = 1 + c = 1 + 2 = 3. \end{array}$$

Rezultat je: z = a + bi = – 1 + 3i, w = c + di = 2 + i.

Vježba 004

Riješi sustav jednadžbi:

$$z + 2w = 1 + i$$
$$3z + iw = 2 - 3i.$$

Rezultat: (z, w) = (1 – i, i).

Zadatak 005 (Nina, gimnazija)

Izračunaj $(1 + i)^4 - (1 - i)^4$.

Rješenje 005

Uporabit ćemo pravilo za potenciranje potencije:

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n\cdot m} = \left(a^{n}\right)^{m}.$$

$$(1 + i)^4 - (1 - i)^4 = [(1 + i)^2]^2 - [(1 - i)^2]^2 =$$

= [koristimo formule za kvadrat zbroja i razlike: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$] =

= $[1 + 2i + i^2]^2 - [1 - 2i + i^2]^2$ = [kvadrat imaginarne jedinice je minus jedan, $i^2 = -1$] =

$$= [1 + 2i - 1]^2 - [1 - 2i - 1]^2 = [2i]^2 - [-2i]^2 = 4i^2 - 4i^2 = 0.$$

Vježba 005

Izračunaj $(1 + i)^4 + (1 - i)^4$.

Rezultat: – 8.

Zadatak 006 (Kristina, gimnazija)

Odredi realne brojeve x i y iz jednadžbe

$$\frac{x-2}{1-i}+\frac{y-3}{1+i}=1-3i.$$

Rješenje 006

$$\frac{x-2}{1-i}+\frac{y-3}{1+i}=1-3i.$$

Na lijevoj strani jednakosti je zbrajanje razlomaka. Budući da su nazivnici konjugirano kompleksni brojevi (1 – i, 1 + i), zajednički nazivnik je lako odrediti jer vrijedi pravilo za množenje konjugirano kompleksnih brojeva: $(a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2$.

$$\frac{(x-2)\cdot(1+i)+(y-3)\cdot 1-i}{(1-i)\cdot(1+i)}1-3i \Rightarrow \frac{x+xi-2-2i+y-yi-3+3i}{1+1}=1-3i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+xi-5+i+y-yi}{2}=1-3i.$$

Odvojimo posebno realni dio, a posebno imaginarni dio. Realni dio čine svi brojevi uz koje nema imaginarne jedinice i, a imaginarni dio su svi brojevi koji imaju faktor i. Imaginarnu jedinicu i izlučimo iza zagrade.

$$\frac{(x+y-5)+(x-y+1)\cdot i}{2}=1-3i.$$

Rastavimo razlomak na dva dijela kako bismo dobili realni i imaginarni dio dobivenog kompleksnog broja.

$$\frac{x+y-5}{2}+\frac{x-y+1}{2}\cdot i=1-3i.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako je realni dio jednak realnom dijelu, a imaginarni dio jednak imaginarnom dijelu.

$$\frac{x+y-5}{2}=1$$
$$\frac{x-y+1}{2}=-3.$$

U sustavu riješimo se razlomaka tako da sve pomnožimo brojem 2:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x+y-5}{2}&=1\\ \frac{x-y+1}{2}&=-3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\frac{x+y-5}{2}&=1\ /\cdot 2\\ \frac{x-y+1}{2}&=-3\ /\cdot 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x+y-5&=2\\ x-y+1&=-6\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x+y&=2+5\\ x-y&=-6-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}x+y&=7\\ x-y&=-7\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0.$$

Iz jednadžbe x + y = 7 slijedi: x + y = 7 => y = 7 – x => y = 7 – 0 = 7.

Rješenje je (x, y) = (0, 7).

Vježba 006

Odredi realne brojeve x i y za koje vrijedi: x · (2 – i) + y · (2i – 1) = 4 – 5i.

Rezultat: (x, y) = (1, – 2).

Zadatak 007 (Maja, medicinska škola)

Izračunaj Re z ako je

$$z=\frac{1+i}{(2+i)\cdot(1-3i)}.$$

Rješenje 007

U nazivniku pomnožimo dva kompleksna broja (to je množenje dviju zagrada; svaki član prve zagrade množimo svakim članom druge zagrade):

$$z=\frac{1+i}{(2+i)\cdot(1-3i)}=\frac{1+i}{2-6i+i-3i^2}=\left[i^2=-1\right]=\frac{1+i}{2-6i+i-3\cdot(-1)}=\frac{1+i}{2-6i+i+3}=\frac{1+i}{5-5i}=$$

= [dva kompleksna broja dijelimo tako da razlomak pomnožimo s konjugirano kompleksnim brojem nazivnika] =

$$=\frac{1+i}{5-5i}\cdot\frac{5+5i}{5+5i}=\frac{(1+i)\cdot(5+5i)}{(5-5i)\cdot(5+5i)}=\frac{5+5i+5i-5}{5^2+5^2}=\frac{10i}{50}=\frac{1}{5}i.$$

Znači da je $z=\frac{1}{5}\cdot i$ pa je Re z = 0.

Vježba 007

Izračunaj Im z ako je $z=\frac{1-i}{(3-i)\cdot(1+2i)}$.

Rezultat: $\operatorname{Im} z=-\frac{1}{5}$.

Zadatak 008 (Nina, gimnazija)

Odredi │z│, ako je z = (1 – √2 + i√3) · (1 + √2 – i√3).

Rješenje 008

1.inačica

Pomnožimo kompleksne brojeve (množimo zagrade). Rezultat množenja bit će opet kompleksan broj. Od njega izračunamo modul.

z = (1 – √2 + i√3) · (1 + √2 – i√3) =

$$= 1 + \sqrt{2} - i\sqrt{3} - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 + i\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + i\sqrt{3} + i\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - i^2 \cdot (\sqrt{3})^2 =$$

$$= 1 + \sqrt{2} - i\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2 + i\sqrt{6} + i\sqrt{3} + i\sqrt{6} + 3 = 2 + 2\sqrt{6} \cdot i.$$

Apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja z = a + bi računa se

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zato je

$$|z| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 6} = \sqrt{4 + 24} = \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2 \cdot \sqrt{7}.$$

2.inačica

Uporabit ćemo svojstvo modula kompleksnog broja koje glasi:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

Sada je

$$|z| = |(1 - \sqrt{2} + i\sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{2} - i\sqrt{3})| = |1 - \sqrt{2} + i\sqrt{3}| \cdot |1 + \sqrt{2} - i\sqrt{3}| =$$

$$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 3} \cdot \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 3} =$$

$$= \sqrt{6 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(6 - 2\sqrt{2}\right) \cdot \left(6 + 2\sqrt{2}\right)} = [\text{razlika kvadrata}] =$$

$$= \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

Vježba 008

Odredi $|z|$, ako je $z = (1 - i\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + i)$.

Rezultat: $|z| = 4$.

Zadatak 009 (Tanja, ekonomska škola)

Nađi x i y iz jednakosti: $(3y - xi) \cdot i - 2y - 3i = -4$.

Rješenje 009

$$(3y - xi) \cdot i - 2y - 3i = -4.$$

Na lijevoj strani se najprije oslobodimo zagrade tako da s imaginarnom jedinicom **i** pomnožimo cijelu zagradu:

$$3yi - xi^2 - 2y - 3i = -4.$$

Budući da je i^2 jednako -1, pišemo:

$$3yi + x - 2y - 3i = -4.$$

Sada napišemo kompleksan broj tako da odvojimo realan i imaginaran dio:

$$(x - 2y) + (3y - 3) \cdot i = -4.$$

Ponovimo definiciju jednakosti kompleksnih brojeva. Kada su dva kompleksna broja jednaka?

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c\,,\ b = d.$$

Na lijevoj strani je

Re z = x – 2y , Im z = 3y – 3.

Na desnoj strani je

Re z = – 4 , Im z = 0.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} x - 2y &= -4 \\ 3y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Riješimo ovaj sustav tako da najprije iz druge jednadžbe nađemo y i uvrstimo ga u prvu jednadžbu, kako bismo izračunali x.

$$\left.\begin{aligned} x-2y&=-4 \\ 3y-\ 3&=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-2y&=-4 \\ 3y&=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-2y&=-4 \\ 3y&=3\ /:3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-2y&=-4 \\ y&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x-2\cdot 1&=-4 \\ y&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-2&=-4 \\ y&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=-4+2 \\ y&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=-2 \\ y&=\ \ 1 \end{aligned}\right\}$$

Vježba 009

Odredite x i y iz jednakosti: $x^2 i - 63i + x + 3 = xyi + y - y^2 i$.

Rezultat: $(x_1, y_1) = (6, 9), (x_2, y_2) = (-9, -6)$.

Zadatak 010 (Klarisa, gimnazija)

Odredite i skicirajte skup svih kompleksnih brojeva z određenih uvjetom:

$$\operatorname{Im}\frac{z-2}{z-2i}=0.$$

Rješenje 010

Neka je z = x + yi. Najprije izračunamo

$$\frac{z-2}{z-2i},$$

a tek onda odredimo imaginarni dio dobivenog kompleksnog broja.

$$\frac{z-2}{z-2i}=\frac{x+yi-2}{x+yi-2i}=\frac{(x-2)+yi}{x+(y-2)i}.$$

Sada trebamo podijeliti dva kompleksna broja.Ponovimo kako se dijele kompleksni brojevi!

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Dalje ide ovako:

$$\frac{z-2}{z-2i}=\frac{(x-2)+yi}{x+(y-2)i}=\frac{(x-2)+yi}{x+(y-2)i}\cdot\frac{x-(y-2)i}{x-(y-2)i}=\frac{\left[(x-2)+yi\right]\cdot\left[x-(y-2)i\right]}{\left[x+(y-2)i\right]\cdot\left[x-(y-2)i\right]}=$$

$$=\frac{(x-2)x-(x-2)\cdot(y-2)i+xyi+y(y-2)}{x^2+(y-2)^2}=\frac{x^2-2x-(x-2)\cdot(y-2)i+xyi+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=$$

$$=\frac{\left(x^2-2x+y^2-2y\right)+\left[xy-(x-2)\cdot(y-2)\right]i}{x^2+(y-2)^2}=\frac{\left(x^2-2x+y^2-2y\right)+\left[xy-xy+2x+2y-4\right]i}{x^2+(y-2)^2}=$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2-2x-2y\right)+(2x+2y-4)i}{x^2+(y-2)^2}=\frac{x^2+y^2-2x-2y}{x^2+(y-2)^2}+\frac{2x+2y-4}{x^2+(y-2)^2}i.$$

Imaginarni dio je:

$$\operatorname{Im}\frac{z-2}{z-2i}=\operatorname{Im}\left[\frac{x^2+y^2-2x-2y}{x^2+(y-2)^2}+\frac{2x+2y-4}{x^2+(y-2)^2}i\right]=\frac{2x+2y-4}{x^2+(y-2)^2}.$$

Iz uvjeta zadatka:

$$\operatorname{Im}\frac{z-2}{z-2i}=0,$$

slijedi

$$\frac{2x+2y-4}{x^2+(y-2)^2}=0.$$

[Razlomak je jednak nuli ako je brojnik nula.]

$$2x + 2y - 4 = 0.$$

Dobili smo jednadžbu pravca u implicitnom obliku. Još možemo podijeliti s 2 pa će konačno biti:

$$2x + 2y - 4 = 0 \;/ : 2 \quad \Rightarrow \quad x + y - 2 = 0.$$

Diskusija!

Budući da je zadan razlomak

$$\frac{z-2}{z-2i}$$

nazivnik ne smije biti nula jer se s nulom ne može dijeliti. Moramo naći za koje je kompleksne brojeve nazivnik jednak nuli i to izbaciti iz skupa rješenja.

Pišemo:

$$z - 2i = 0,$$

$$x + yi - 2i = 0,$$

$$x + (y - 2)i = 0.$$

Sada koristimo jednakost dva kompleksna broja.

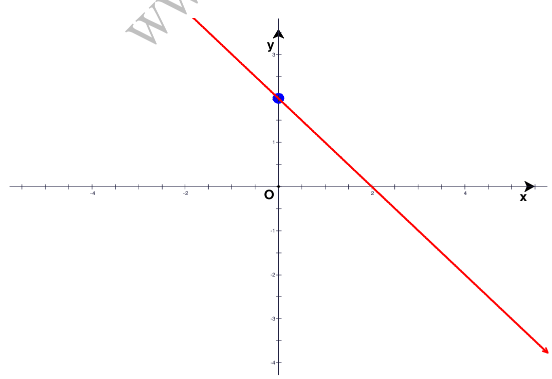
Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c\,,\ b = d\,.$$

U našem slučaju je

$$x + (y - 2)i = 0 + 0i \quad \Rightarrow \quad x = 0\,,\ y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,\ y = 2.$$

Kompleksan broj z = 2i, odnosno točka (0, 2) mora se izbaciti iz skupa rješenja. Skica skupa u koordinatnom sustavu izgleda ovako:



Vježba 010

Odredite i skicirajte skup svih kompleksnih brojeva z određenih uvjetom: Im z = 2.

Rezultat: y = 2

Zadatak 011 (Ines, gimnazija)

Odredi cijele brojeve n za koje je $(1 + i)^n = (1 - i)^n$.

Rješenje 011

$$(1+i)^n=(1-i)^n \;/:(1-i)^n \;\Rightarrow\; \frac{(1+i)^n}{(1-i)^n}=1 \;\Rightarrow\; \left[\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\right] \;\Rightarrow\; \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^n=1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(1+i)^2}{1+1}\right)^n = 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^n = 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{2i}{2}\right)^n = 1 \;\Rightarrow\; i^n = 1.$$

Eksponenti potencije i^n moraju biti djeljivi brojem četiri:

$$n = 4 \cdot k, \text{ k je cijeli broj.}$$

Vrijedi:

$$i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = \ldots = i^{4k} = 1,$$
$$i^{-4} = i^{-8} = i^{-12} = i^{-16} = i^{-20} = \ldots = i^{-4k} = 1.$$

Vježba 011

Za koji broj n je $(1 + i)^n = -4$?

Rezultat: $n = 4$.

Zadatak 012 (Hrvoje, tehnička škola)

Kompleksan broj z iz prvog kvadranta kompleksne ravnine ima svojstvo da je Re (z) četiri puta veći od Im (z). Koliko je puta Re (z^2) veći od Im (z^2)?

Rješenje 012

Standardni ili algebarski zapis kompleksnog broja glasi:

$$z = x + y \cdot i, \; x = \mathrm{Re}\,(z), \; y = \mathrm{Im}\,(x).$$

Kvadriramo kompleksan broj z:

$$z^2 = (x + y \cdot i)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i - y^2 = x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i, \; \mathrm{Re}\,(z^2) = x^2 - y^2, \; \mathrm{Im}\,(z^2) = 2 \cdot x \cdot y.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\mathrm{Re}\,(z) = 4 \cdot \mathrm{Im}\,(z) \;\Rightarrow\; x = 4 \cdot y.$$

Gledamo omjer:

$$\frac{\mathrm{Re}\,(z^2)}{\mathrm{Im}\,(z^2)} = \frac{x^2 - y^2}{2 \cdot x \cdot y} = \frac{(4 \cdot y)^2 - y^2}{2 \cdot 4 \cdot y \cdot y} = \frac{16 \cdot y^2 - y^2}{8 \cdot y^2} = \frac{15 \cdot y^2}{8 \cdot y^2} = \frac{15}{8} = 1.875.$$

Vježba 012

Kompleksan broj z iz prvog kvadranta kompleksne ravnine ima svojstvo da je Re (z) pet puta veći od Im (z). Koliko je puta Re (z^2) veći od Im (z^2)?

Rezultat: 2.4.

Zadatak 013 (Slavica, gimnazija)

Ako je $z = \frac{3+4i}{4-3i}$, loliko iznosi $z^3 + z^2 + z + |z|$?

Rješenje 013

Nađimo z: $z = \frac{3+4i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{12+9i+16i-12}{16+9} = \frac{25i}{25} = i.$

Sada je:

$$z^3 + z^2 + z + |z| = i^3 + i^2 + i + \sqrt{0^2 + 1^2} = \left[i^3 = -i, \; i^2 = -1\right] = -i - 1 + i + 1 = 0.$$

Vježba 013

Ako je $z = \frac{3+4i}{4-3i}$, koliko iznosi $z^3 + z^2 + z$?

Rezultat: -1.

Zadatak 014 (Petra, gimnazija)

Neka je z = $\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot i.$ Koliko iznosi broj $\sqrt{\left|z^2+2\cdot z+1\right|}$?

Rješenje 014

Izračunajmo:

$$z^2=\left(\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot i\right)^2=3+2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot i-\left(\sqrt{3}-1\right)^2=$$

$$=3+\left(6-2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot i-\left(3-2\cdot\sqrt{3}+1\right)=3+\left(6-2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot i-3+2\cdot\sqrt{3}-1=\left(2\cdot\sqrt{3}-1\right)+\left(6-2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot i,$$

$$2\cdot z=2\cdot\left(\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot i\right)=2\cdot\sqrt{3}+\left(2\cdot\sqrt{3}-2\right)\cdot i.$$

Sada je:

$$z^2+2\cdot z+1=\left(2\cdot\sqrt{3}-1\right)+\left(6-2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot i+2\cdot\sqrt{3}+\left(2\cdot\sqrt{3}-2\right)\cdot i+1=$$

$$=2\cdot\sqrt{3}-1+2\cdot\sqrt{3}+1+\left(6-2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}-2\right)\cdot i=4\cdot\sqrt{3}+4\cdot i.$$

Vježba 014

Neka je z = 9 + 2 · i. Koliko iznosi broj $\sqrt{\left|z-2\cdot i\right|}$?

Rezultat: 3.

Zadatak 015 (Ivana, hotelijerska škola)

Koliko ima prirodnih brojeva n manjih od 2005 za koje je ispunjena jednakost $(1 + i)^n = (1 - i)^n$? (i je imaginarna jedinica)

Rješenje 015

Pogledaj Zadatak 011

$$(1+i)^n=(1-i)^n\ \ /:(1-i)^n\ \Rightarrow\ \frac{(1+i)^n}{(1-i)^n}=1\ \Rightarrow\left[\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]\Rightarrow\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=1\ \Rightarrow\ \left(\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^n=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{(1+i)^2}{1+1}\right)^n=1\ \Rightarrow\ \left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^n=1\ \Rightarrow\ \left(\frac{2i}{2}\right)^n=1\ \Rightarrow\ i^n=1.$$

Potencija će biti jednaka 1 za n = 4 · k, k je prirodan broj. Iz uvjeta n < 2005 slijedi:

$$4\cdot k<2005\ \Rightarrow\ k<\frac{2005}{4}\ \Rightarrow\ k<501.25\ \Rightarrow\ k=501.$$

Vježba 015

Koliko ima prirodnih brojeva n manjih od 1001 za koje je ispunjena jednakost $(1 + i)^n = (1 - i)^n$? (i je imaginarna jedinica)

Rezultat: k = 250.

Zadatak 016 (Rea, gimnazija)

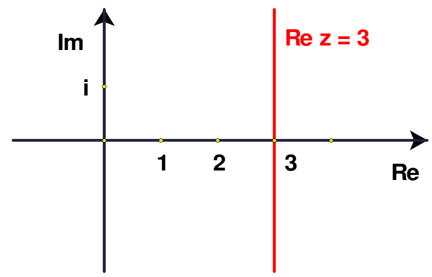
Koji dio kompleksne ravnine određuje kompleksni broj z za koji vrijedi Re z = 3?

Rješenje 016

Kompleksni broj jest broj oblika z = x + y · i, gdje su x i y realni brojevi.

U kompleksnom broju z = x + y · i realni broj x jest njegov realni dio, x = Re z.

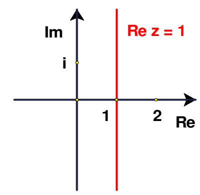
Budući da je u zadatku Re z = 3, slijedi da je x = 3. Sve kompleksne točke x + y · i za koje vrijedi x = 3 (dakle, 3 + y · i) leže na pravcu x = 3. To je pravac okomit na os x (apscisu), a prolazi točkom 3.



Vježba 016

Koji dio kompleksne ravnine određuje kompleksni broj z za koji vrijedi Re z = 1?

Rezultat:



Zadatak 017 (Petra, medicinska škola)

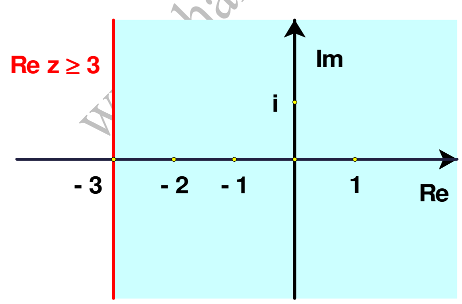
Koji dio kompleksne ravnine određuje kompleksni broj z za koji vrijedi Re $z \geq -3$?

Rješenje 017

Kompleksni broj jest broj oblika $z = x + y \cdot i$, gdje su x i y realni brojevi.

U kompleksnom broju $z = x + y \cdot i$ realni broj x jest njegov realni dio, x = Re z.

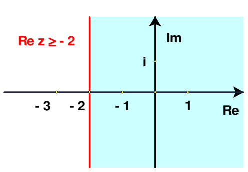
Budući da je u zadatku Re $z \geq -3$, slijedi da je $x \geq -3$. Sve kompleksne točke $x + y \cdot i$ za koje vrijedi $x \geq -3$ leže u zatamnjenoj poluravnini koja sadrži pravac $x = -3$ koji je omeđuje.



Vježba 017

Koji dio kompleksne ravnine određuje kompleksni broj z za koji vrijedi Re $z \geq -2$?

Rezultat:



Zadatak 018 (Roberta, hotelijerska škola)

Koliko je $\left(i^{-23} + i^{96}\right)^{-2}$?

Rješenje 018

Ponovimo!

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)} = \frac{-i}{1} = -i.$$

$$i^{-1}=-i\ ,\ i^0=1\ ,\ i^3=-i\ ,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ ,\ a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m$$

Sada je:

$$\left(i^{-23}+i^{96}\right)^{-2}=\left(\left(i^{-1}\right)^{23}+i^{96}\right)^{-2}=\left((-i)^{23}+i^{96}\right)^{-2}=\left(-i^{23}+i^{96}\right)^{-2}=\begin{bmatrix}23:4=5\ ,\ 96:4=24\\ 3\qquad\qquad 0\end{bmatrix}=\left(-i^3+i^0\right)^{-2}=$$

$$=\left(-(-i)+1\right)^{-2}=(i+1)^{-2}=(1+i)^{-2}=\frac{1}{(1+i)^2}=\frac{1}{1+2i-1}=\frac{1}{2i}=\frac{1}{2}\cdot i^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot i=-0.5\cdot i.$$

Vježba 018

Koliko je $\left(i^{-24}+i^{96}\right)^{-2}$?

Rezultat: 0.25.

Zadatak 019 (Petra, medicinska škola)

Odredi skup svih točaka kompleksne ravnine za koje je $|z| = |z-1-i|$.

Rješenje 019

Ako kompleksan broj zapišemo u standardnom obliku z = x + y · i, tada je $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Sada pišemo:

$$|z|=|z-1-i|\ \Rightarrow\ |x+y\cdot i|=|x+y\cdot i-1-i|\ \Rightarrow\ |x+y\cdot i|=|(x-1)+(y-1)\cdot i|\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\ /^2\ \Rightarrow\ x^2+y^2=(x-1)^2+(y-1)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left[(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right]\Rightarrow\ x^2+y^2=x^2-2x+1+y^2-2y+1\ \Rightarrow\ 0=-2x-2y+2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2x+2y-2=0\ /:2\ \Rightarrow\ x+y-1=0.$$

Vježba 019

Odredi skup svih točaka kompleksne ravnine za koje je $|z| = 3$.

Rezultat: $x^2+y^2=9.$

Zadatak 020 (Petra, medicinska škola)

Koliko je $2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\right)^{50}$?

Rješenje 020

$$2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\right)^{50}=2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot(1+i)\right)^{50}=\left[(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\right]=2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{50}\cdot(1+i)^{50}=$$

$$=2^{-50}\cdot 2^{25}\cdot(1+i)^{50}=\left[a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m\right]=2^{-25}\cdot\left((1+i)^2\right)^{25}=2^{-25}\cdot\left(1+2i+i^2\right)^{25}=$$

$$=\left[i^2=-1\right]=2^{-25}\cdot(1+2i-1)^{25}=2^{-25}\cdot(2i)^{25}=2^{-25}\cdot 2^{25}\cdot i^{25}=2^0\cdot i^{25}=$$

$$=\begin{bmatrix}a^0=1\ ,\ 25:4=6\\ \qquad\qquad 1\end{bmatrix}=1\cdot i^1=i.$$

Vježba 020

Koliko je $2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i\right)^{50}$?

Rezultat: $-i.$