**Zadatak 121 (Željka, gimnazija)**

Dokazati da je $z=(1+i)^4-(1-i)^4$ realan broj.

**Rješenje 121**

Ponovimo!

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$i^2=-1 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad (-a)^2=a^2.$$

1.inačica

$$z=(1+i)^4-(1-i)^4 \Rightarrow z=\left((1+i)^2\right)^2-\left((1-i)^2\right)^2 \Rightarrow z=\left(1+2\cdot i+i^2\right)^2-\left(1-2\cdot i+i^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=(1+2\cdot i-1)^2-(1-2\cdot i-1)^2 \Rightarrow z=(1+2\cdot i-1)^2-(1-2\cdot i-1)^2 \Rightarrow$$

$$z=(2\cdot i)^2-(-2\cdot i)^2 \Rightarrow z=(2\cdot i)^2-(2\cdot i)^2 \Rightarrow z=0\in R.$$

2.inačica

$$z=(1+i)^4-(1-i)^4 \Rightarrow z=\left((1+i)^2-(1-i)^2\right)\cdot\left((1+i)^2+(1-i)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\left(1+2\cdot i+i^2-\left(1-2\cdot i+i^2\right)\right)\cdot\left(1+2\cdot i+i^2+1-2\cdot i+i^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\left(1+2\cdot i+i^2-1+2\cdot i-i^2\right)\cdot\left(1+2\cdot i+i^2+1-2\cdot i+i^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\left(1+2\cdot i+i^2-1+2\cdot i-i^2\right)\cdot\left(1+2\cdot i+i^2+1-2\cdot i+i^2\right) \Rightarrow z=4\cdot i\cdot\left(2+2\cdot i^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=4\cdot i\cdot(2+2\cdot(-1)) \Rightarrow z=4\cdot i\cdot(2-2) \Rightarrow z=4\cdot i\cdot 0 \Rightarrow z=0\in R.$$



**Vježba 121**

Dokazati da je $z=(1+i)^2-(1-i)^2$ imaginaran broj.

**Rezultat:** $4\cdot i$.

**Zadatak 122 (Tihomir, gimnazija)**

Iz $(1-i)^5=a+b\cdot i$ slijedi :

A) $a-b=1$ B) $a+b=0$ C) $a+b=-1$ D) $a-b=0$

**Rješenje 122**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$\operatorname{Re}(z)=x \quad , \quad \operatorname{Im}(z)=y.$$

Zapis $z=x+y\cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i \Leftrightarrow a=c \;,\; b=d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad i^2=-1.$$

$$a^1=a \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad (-a)^2=a^2.$$

$$(1-i)^5=a+b\cdot i \Rightarrow (1-i)^4\cdot(1-i)^1=a+b\cdot i \Rightarrow (1-i)^4\cdot(1-i)=a+b\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left((1-i)^2\right)^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \Rightarrow \left(1-2\cdot i+i^2\right)^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-2\cdot i-1)^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \Rightarrow (1-2\cdot i-1)^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2\cdot i)^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \Rightarrow 4\cdot i^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \Rightarrow 4\cdot(-1)\cdot(1-i)=a+b\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\cdot(1-i)=a+b\cdot i \Rightarrow -4+4\cdot i=a+b\cdot i \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=-4 \\ b=4 \end{matrix}\right\}.$$

Tada je

$$a+b=-4+4=0.$$

Odgovor je pod B.

**Vježba 122**

Iz $(1-i)^5=a+b\cdot i$ slijedi :

$A)\ a\cdot b=0 \qquad B)\ a\cdot b=16 \qquad C)\ a\cdot b=-16 \qquad D)\ a\cdot b=8$

**Rezultat:** C.

**Zadatak 123 (Tihomir, gimnazija)**

Izračunaj: $\left|(1-i)^3\cdot(2-i)^3\cdot(3-i)^3\right|.$

$A)\ 100 \qquad B)\ 1000 \qquad C)\ 10\cdot\sqrt{10} \qquad D)\ 10\cdot\sqrt{2}$

**Rješenje 123**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$\mathrm{Re}(z)=x \quad , \quad \mathrm{Im}(z)=y.$$

Zapis $z=x+y\cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \;,\; a\geq 0 \quad , \quad \left|z^n\right|=|z|^n \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad i^2=-1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

$$\left|(1-i)^3\cdot(2-i)^3\cdot(3-i)^3\right|=\left|((1-i)\cdot(2-i)\cdot(3-i))^3\right|=\left|(1-i)\cdot(2-i)\cdot(3-i)\right|^3=$$

$$=\left(|1-i|\cdot|2-i|\cdot|3-i|\right)^3=\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2}\right)^3=$$

$$=\left(\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{9+1}\right)^3=\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\right)^3=\left(\sqrt{2\cdot5\cdot10}\right)^3=\left(\sqrt{100}\right)^3=\left(\sqrt{10^2}\right)^3=10^3=1000.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$\left|(1-i)^3\cdot(2-i)^3\cdot(3-i)^3\right|=\left|((1-i)\cdot(2-i)\cdot(3-i))^3\right|=\left|(1-i)\cdot(2-i)\cdot(3-i)\right|^3=$$

$$=\left|\left(2-i-2\cdot i+i^2\right)\cdot(3-i)\right|^3=\left|(2-i-2\cdot i-1)\cdot(3-i)\right|^3=\left|(1-3\cdot i)\cdot(3-i)\right|^3=$$

$$=\left|3-i-9\cdot i+3\cdot i^2\right|^3=\left|3-i-9\cdot i+3\cdot(-1)\right|^3=\left|3-i-9\cdot i-3\right|^3=\left|3-i-9\cdot i-3\right|^3=$$

$$=\left|-10\cdot i\right|^3=\left|0-10\cdot i\right|^3=\left(\sqrt{0^2+(-10)^2}\right)^3=\left(\sqrt{0+100}\right)^3=\left(\sqrt{100}\right)^3=\left(\sqrt{10^2}\right)^3=10^3=1000.$$

Odgovor je pod B.

**Vježba 123**

Izračunaj: $\left|(i-1)^3\cdot(i-2)^3\cdot(3-i)^3\right|.$

$A)$ 100 $B)$ 1000 $C)$ $10\cdot\sqrt{10}$ $D)$ $10\cdot\sqrt{2}$

**Rezultat:** B.



**Zadatak 124 (Anita, TUPŠ)**

Izračunaj: $\left(3\cdot\sqrt{2}-4\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)+\left(7\cdot\sqrt{2}+11\cdot i\cdot\sqrt{3}\right).$

**Rješenje 124**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$\mathrm{Re}(z)=x \quad , \quad \mathrm{Im}(z)=y.$$

Zapis $z=x+y\cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.

Dva kompleksna broja zbrajamo tako da posebno zbrojimo njihove realne dijelove, a posebno imaginarne dijelove.

$$\left.\begin{array}{l} z_1=a+b\cdot i \\ z_2=c+d\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1+z_2=a+b\cdot i+c+d\cdot i \Rightarrow z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left(3\cdot\sqrt{2}-4\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)+\left(7\cdot\sqrt{2}+11\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)=3\cdot\sqrt{2}-4\cdot i\cdot\sqrt{3}+7\cdot\sqrt{2}+11\cdot i\cdot\sqrt{3}=$$

$$=\left(3\cdot\sqrt{2}+7\cdot\sqrt{2}\right)+\left(-4\cdot\sqrt{3}+11\cdot\sqrt{3}\right)\cdot i=10\cdot\sqrt{2}+7\cdot\sqrt{3}\cdot i.$$

**Vježba 124**

Izračunaj: $\left(4\cdot\sqrt{2}-5\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)+\left(6\cdot\sqrt{2}+12\cdot i\cdot\sqrt{3}\right).$

**Rezultat:** $10\cdot\sqrt{2}+7\cdot\sqrt{3}\cdot i.$

**Zadatak 125 (Anita, TUPŠ)**

Izračunaj: $(0.1-1.22\cdot i)+(-2.5+1.7\cdot i).$

**Rješenje 125**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$\mathrm{Re}(z)=x \quad , \quad \mathrm{Im}(z)=y.$$

Zapis $z=x+y\cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.

Dva kompleksna broja zbrajamo tako da posebno zbrojimo njihove realne dijelove, a posebno imaginarne dijelove.

$$\left.\begin{array}{l} z_1=a+b\cdot i \\ z_2=c+d\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1+z_2=a+b\cdot i+c+d\cdot i \Rightarrow z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$(0.1-1.22\cdot i)+(-2.5+1.7\cdot i)=0.1-1.22\cdot i-2.5+1.7\cdot i=(0.1-2.5)+(-1.22+1.7)\cdot i=-2.4+0.48\cdot i.$$



**Vježba 125**

Izračunaj: $(0.3-1.12\cdot i)+(-2.7+1.6\cdot i).$

**Rezultat:** $-2.4+0.48\cdot i.$

**Zadatak 126 (Anita, TUPŠ)**

Izračunaj: $\left(\frac{1}{10}-\frac{5}{2}\cdot i\right)+\left(\frac{7}{10}+\frac{11}{2}\cdot i\right).$

**Rješenje 126**

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$\mathrm{Re}(z)=x \quad , \quad \mathrm{Im}(z)=y.$$

Zapis $z=x+y\cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.

Dva kompleksna broja zbrajamo tako da posebno zbrojimo njihove realne dijelove, a posebno imaginarne dijelove.

$$\left.\begin{array}{l} z_1=a+b\cdot i \\ z_2=c+d\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1+z_2=a+b\cdot i+c+d\cdot i \Rightarrow z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left(\frac{1}{10}-\frac{5}{2}\cdot i\right)+\left(\frac{7}{10}+\frac{11}{2}\cdot i\right)=\frac{1}{10}-\frac{5}{2}\cdot i+\frac{7}{10}+\frac{11}{2}\cdot i=\left(\frac{1}{10}+\frac{7}{10}\right)+\left(-\frac{5}{2}+\frac{11}{2}\right)\cdot i=\frac{8}{10}+\frac{6}{2}\cdot i=$$

$$=\frac{8}{10}+\frac{6}{2}\cdot i=\frac{4}{5}+3\cdot i.$$

**Vježba 126**

Izračunaj: $\left(\frac{3}{11}-\frac{3}{2}\cdot i\right)+\left(\frac{7}{11}+\frac{9}{2}\cdot i\right).$

**Rezultat:** $\frac{10}{11}+3\cdot i.$

**Zadatak 127 (Anita, TUPŠ)**

Izračunaj: $2\cdot z_1-3\cdot z_2$, ako je $z_1=5+6\cdot i,\ z_2=1-i.$

**Rješenje 127**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$\operatorname{Re}(z)=x \quad , \quad \operatorname{Im}(z)=y.$$

Zapis $z=x+y\cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.

Dva kompleksna broja zbrajamo tako da posebno zbrojimo njihove realne dijelove, a posebno imaginarne dijelove.

$$\left.\begin{array}{l} z_1=a+b\cdot i \\ z_2=c+d\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1+z_2=a+b\cdot i+c+d\cdot i \Rightarrow z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$2\cdot z_1-3\cdot z_2=\left[\begin{array}{l} z_1=5+6\cdot i \\ z_2=1-i \end{array}\right]=2\cdot(5+6\cdot i)-3\cdot(1-i)=10+12\cdot i-3+3\cdot i=(10-3)+(12+3)\cdot i=7+15\cdot i.$$

**Vježba 127**

Izračunaj: $3\cdot z_1-2\cdot z_2$, ako je $z_1=5+6\cdot i,\ z_2=1-i.$

**Rezultat:** $13+20\cdot i.$

**Zadatak 128 (Anita, TUPŠ)**

Izračunaj: $\frac{1}{2}\cdot z_1+\frac{3}{2}\cdot z_2$, ako je $z_1=5+6\cdot i,\ z_2=1-i.$

**Rješenje 128**

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$\mathrm{Re}(z)=x \quad , \quad \mathrm{Im}(z)=y.$$

Zapis $z=x+y\cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.
Dva kompleksna broja zbrajamo tako da posebno zbrojimo njihove realne dijelove, a posebno imaginarne dijelove.

$$\left.\begin{array}{l} z_1=a+b\cdot i \\ z_2=c+d\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1+z_2=a+b\cdot i+c+d\cdot i \Rightarrow z_1+z_2=(a+c)+(b+d)\cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\frac{1}{2}\cdot z_1+\frac{3}{2}\cdot z_2=\left[\begin{array}{l} z_1=5+6\cdot i \\ z_2=1-i \end{array}\right]=\frac{1}{2}\cdot(5+6\cdot i)+\frac{3}{2}\cdot(1-i)=\frac{5}{2}+\frac{6}{2}\cdot i+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot i=\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{6}{2}-\frac{3}{2}\right)\cdot i=$$

$$=\frac{8}{2}+\frac{3}{2}\cdot i=\frac{8}{2}+\frac{3}{2}\cdot i=4+\frac{3}{2}\cdot i.$$

**Vježba 128**

Izračunaj: $\frac{3}{2}\cdot z_1+\frac{1}{2}\cdot z_2$, ako je $z_1=5+6\cdot i,\ z_2=1-i.$

**Rezultat:** $8+\frac{17}{2}\cdot i.$



**Zadatak 129 (Ivana, gimnazija)**

Broj $(-1+2\cdot i)^3$ zapišite u obliku $a+b\cdot i.$

**Rješenje 129**

Ponovimo!

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3 \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad i^3=-i.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$\mathrm{Re}(z)=x \quad , \quad \mathrm{Im}(z)=y.$$

Zapis $z=x+y\cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

$$(-1+2\cdot i)^3=(-1)^3+3\cdot(-1)^2\cdot 2\cdot i+3\cdot(-1)\cdot(2\cdot i)^2+(2\cdot i)^3=-1+3\cdot 1\cdot 2\cdot i+3\cdot(-1)\cdot 4\cdot i^2+2^3\cdot i^3=$$

$$=-1+6\cdot i-12\cdot i^2+8\cdot(-i)=-1+6\cdot i-12\cdot(-1)+8\cdot(-i)=-1+6\cdot i+12-8\cdot i=11-2\cdot i.$$

2.inačica

$$(-1+2\cdot i)^3=(-1+2\cdot i)^2\cdot(-1+2\cdot i)=(1-4\cdot i-4)\cdot(-1+2\cdot i)=(-3-4\cdot i)\cdot(-1+2\cdot i)=$$

$$= 3 - 6 \cdot i + 4 \cdot i - 8 \cdot i^2 = 3 - 6 \cdot i + 4 \cdot i - 8 \cdot (-1) = 3 - 6 \cdot i + 4 \cdot i + 8 = 11 - 2 \cdot i.$$

**Vježba 129**

Broj $(1+i)^3$ zapišite u obliku $a + b \cdot i$.

**Rezultat:** $-2 + 2 \cdot i.$

**Zadatak 130 (Ivana, srednja škola)**

Izračunaj: $\left|(2-3\cdot i)\cdot(3+2\cdot i)\right|.$

**Rješenje 130**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$\mathrm{Re}(z) = x \quad , \quad \mathrm{Im}(z) = y.$$

Zapis $z = x + y \cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja (modul kompleksnog broja)

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

1.inačica

$$\left|(2-3\cdot i)\cdot(3+2\cdot i)\right| = |2-3\cdot i| \cdot |3+2\cdot i| = \sqrt{2^2+(-3)^2} \cdot \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{4+9} \cdot \sqrt{9+4} =$$

$$= \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} = \left(\sqrt{13}\right)^2 = 13.$$

2.inačica

$$\left|(2-3\cdot i)\cdot(3+2\cdot i)\right| = \left|6+4\cdot i-9\cdot i-6\cdot i^2\right| = \left|6+4\cdot i-9\cdot i-6\cdot(-1)\right| = \left|6+4\cdot i-9\cdot i+6\right| =$$

$$= |12-5\cdot i| = \sqrt{12^2+(-5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13.$$

**Vježba 130**

Izračunaj: $\left|(2+3\cdot i)\cdot(3-2\cdot i)\right|.$

**Rezultat:** 13.

**Zadatak 131 (Ivana, srednja škola)**

Izračunaj: $\left|\dfrac{7-i}{i-1}\right|.$

**Rješenje 131**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$\operatorname{Re}(z)=x \quad , \quad \operatorname{Im}(z)=y.$$

Zapis $z=x+y\cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.
Apsolutna vrijednost kompleksnog broja (modul kompleksnog broja)

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \ , \ a\ge 0 \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Za kompleksne brojeve oblika

$$z=a+b\cdot i \quad , \quad \bar{z}=a-b\cdot i$$

kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugom. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira.
Umnožak kompleksnog broja i njemu konjugiranog broja uvijek je realan broj:

$$\left.\begin{array}{l} z=a+b\cdot i \\ \bar{z}=a-b\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z\cdot\bar{z}=(a+b\cdot i)\cdot(a-b\cdot i) \Rightarrow z\cdot\bar{z}=a^2+b^2.$$

Dva kompleksna broja dijelimo tako da dijeljenje najprije zapišemo u obliku razlomka. Taj razlomak zatim proširimo množeći njegov brojnik i nazivnik konjugiranim nazivnikom:

$$\frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}=\frac{(a+b\cdot i)\cdot(c-d\cdot i)}{(c+d\cdot i)\cdot(c-d\cdot i)}=\frac{(a+b\cdot i)\cdot(c-d\cdot i)}{c^2+d^2}.$$

1.inačica

$$\left|\frac{7-i}{i-1}\right|=\left|\frac{7-i}{-1+i}\right|=\frac{|7-i|}{|-1+i|}=\frac{\sqrt{7^2+(-1)^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{49+1}}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{50}{2}}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5.$$

2.inačica

$$\left|\frac{7-i}{i-1}\right|=\left|\frac{7-i}{-1+i}\right|=\left|\frac{7-i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}\right|=\left|\frac{(7-i)\cdot(-1-i)}{(-1+i)\cdot(-1-i)}\right|=\left|\frac{-7-7\cdot i+i+i^2}{(-1)^2+1^2}\right|=\left|\frac{-7-7\cdot i+i-1}{1+1}\right|=$$

$$=\left|\frac{-8-6\cdot i}{2}\right|=\left|\frac{-8}{2}-\frac{6}{2}\cdot i\right|=|-4-3\cdot i|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=5.$$

**Vježba 131**

Izračunaj: $\left|\frac{7+i}{i-1}\right|.$

**Rezultat:** 5.

**Zadatak 132 (Željko, srednja škola)**

Vrijednost izraza iznosi: $\dfrac{(1+i)^{2008}-(1-i)^{2009}}{(1+i)^{2006}+(1-i)^{2007}}$ , $i^2=-1.$

**Rješenje 132**

Ponovimo!

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad (-a)^{2 \cdot n} = a^{2 \cdot n} \quad , \quad (-a)^{2 \cdot n - 1} = -a^{2 \cdot n - 1}.$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

$$\frac{(1+i)^{2008} - (1-i)^{2009}}{(1+i)^{2006} + (1-i)^{2007}} = \frac{(1+i)^{2008} - (1-i)^{2008} \cdot (1-i)^1}{(1+i)^{2006} + (1-i)^{2006} \cdot (1-i)^1} = \frac{(1+i)^{2008} - (1-i)^{2008} \cdot (1-i)}{(1+i)^{2006} + (1-i)^{2006} \cdot (1-i)} =$$

$$= \frac{\left((1+i)^2\right)^{1004} - \left((1-i)^2\right)^{1004} \cdot (1-i)}{\left((1+i)^2\right)^{1003} + \left((1-i)^2\right)^{1003} \cdot (1-i)} = \frac{\left(1 + 2 \cdot i + i^2\right)^{1004} - \left(1 - 2 \cdot i + i^2\right)^{1004} \cdot (1-i)}{\left(1 + 2 \cdot i + i^2\right)^{1003} + \left(1 - 2 \cdot i + i^2\right)^{1003} \cdot (1-i)} =$$

$$= \frac{(1 + 2 \cdot i - 1)^{1004} - (1 - 2 \cdot i - 1)^{1004} \cdot (1-i)}{(1 + 2 \cdot i - 1)^{1003} + (1 - 2 \cdot i - 1)^{1003} \cdot (1-i)} = \frac{(1 + 2 \cdot i - 1)^{1004} - (1 - 2 \cdot i - 1)^{1004} \cdot (1-i)}{(1 + 2 \cdot i - 1)^{1003} + (1 - 2 \cdot i - 1)^{1003} \cdot (1-i)} =$$

$$= \frac{(2 \cdot i)^{1004} - (-2 \cdot i)^{1004} \cdot (1-i)}{(2 \cdot i)^{1003} + (-2 \cdot i)^{1003} \cdot (1-i)} = \frac{(2 \cdot i)^{1004} - (2 \cdot i)^{1004} \cdot (1-i)}{(2 \cdot i)^{1003} - (2 \cdot i)^{1003} \cdot (1-i)} =$$

$$= \frac{(2 \cdot i)^{1004} - (2 \cdot i)^{1004} + (2 \cdot i)^{1004} \cdot i}{(2 \cdot i)^{1003} - (2 \cdot i)^{1003} + (2 \cdot i)^{1003} \cdot i} = \frac{(2 \cdot i)^{1004} - (2 \cdot i)^{1004} + (2 \cdot i)^{1004} \cdot i}{(2 \cdot i)^{1003} - (2 \cdot i)^{1003} + (2 \cdot i)^{1003} \cdot i} =$$

$$= \frac{(2 \cdot i)^{1004} \cdot i}{(2 \cdot i)^{1003} \cdot i} = \frac{(2 \cdot i)^{1004} \cdot i}{(2 \cdot i)^{1003} \cdot i} = \frac{(2 \cdot i)^{1004}}{(2 \cdot i)^{1003}} = (2 \cdot i)^{1004-1003} = 2 \cdot i.$$



**Vježba 132**

Vrijednost izraza iznosi: $\dfrac{(1+i)^{2006} + (1-i)^{2007}}{(1+i)^{2008} - (1-i)^{2009}}$ , $i^2 = -1.$

**Rezultat:** $-\frac{1}{2} \cdot i.$

**Zadatak 133 (Nina, gimnazija)**

Ako je $z = 1 - i$, koliko iznosi imaginarni dio broja $z^6$?

$A. -16 \qquad B. -8 \qquad C. 8 \qquad D. 16$

**Rješenje 133**

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (-a)^3 = -a^3.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad i^3 = -i \quad , \quad (a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Zapis z = x + y · i zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.

1.inačica

$$z^6 = (1-i)^6 = \left((1-i)^2\right)^3 = \left(1 - 2 \cdot i + i^2\right)^3 = (1 - 2 \cdot i - 1)^3 = (1 - 2 \cdot i - 1)^3 = (-2 \cdot i)^3 =$$

$$= -(2 \cdot i)^3 = -2^3 \cdot i^3 = -8 \cdot (-i) = 8 \cdot i = 0 + 8 \cdot i.$$

Tada je

$$\operatorname{Im} z^6 = \operatorname{Im}(0 + 8 \cdot i) = 8.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$z^6 = (1-i)^6 = \left((1-i)^3\right)^2 = \left(1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 - i^3\right)^2 = (1 - 3 \cdot 1 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot (-1) - (-i))^2 =$$

$$= (1 - 3 \cdot i - 3 + i)^2 = (-2 - 2 \cdot i)^2 = (-2 \cdot (1+i))^2 = (-2)^2 \cdot (1+i)^2 = 4 \cdot \left(1 + 2 \cdot i + i^2\right) =$$

$$= 4 \cdot (1 + 2 \cdot i - 1) = 4 \cdot (1 + 2 \cdot i - 1) = 4 \cdot (2 \cdot i) = 8 \cdot i = 0 + 8 \cdot i.$$



Tada je

$$\operatorname{Im} z^6 = \operatorname{Im}(0 + 8 \cdot i) = 8.$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 133**

Ako je $z = 1 + i$, koliko iznosi imaginarni dio broja $z^6$?

$A.\ -16 \qquad B.\ -8 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 16$

**Rezultat:** B.

**Zadatak 134 (Helena, strukovna škola)**

Ako je $z = 1 + 4 \cdot i$, koliko iznosi realni dio broja $\dfrac{z}{z + \overline{z}}$?

$A.\ -\dfrac{1}{2} \qquad B.\ \dfrac{1}{2} \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 4$

**Rješenje 134**

Ponovimo!

$$\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Zapis z = x + y · i zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.
Neka je z = x + y · i bilo koji kompleksan broj. Sa $\overline{z}$ označavamo broj

$$\bar{z} = x - y \cdot i$$

koji nazivamo kompleksno konjugiranim broju z.
Kompleksno konjugirani broj zadanog kompleksnog broja je

$$z = 1 + 4 \cdot i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 4 \cdot i.$$

Dalje slijedi:

$$\frac{z}{z+\bar{z}} = \frac{1+4\cdot i}{1+4\cdot i+1-4\cdot i} = \frac{1+4\cdot i}{1+4\cdot i+1-4\cdot i} = \frac{1+4\cdot i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{4\cdot i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{4\cdot i}{2} = \frac{1}{2} + 2\cdot i.$$

Sada je

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+\bar{z}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} + 2\cdot i\right) = \frac{1}{2}.$$

Odgovor je pod B.

**Vježba 134**

Ako je $z = 1 + 4 \cdot i$, koliko iznosi imaginarni dio broja $\frac{z}{z+\bar{z}}$?

$$A.\ -\frac{1}{2} \qquad B.\ \frac{1}{2} \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 4$$

**Rezultat:** C.

**Zadatak 135 (Emrah, srednja škola)**

Zadani su kompleksni brojevi $z_1 = 4 - 3 \cdot i$, $z_2 = -2 + 5 \cdot i$. Izračunaj:

$$A.\ z_1 + z_2 \qquad B.\ z_1 - z_2 \qquad C.\ z_1 \cdot z_2 \qquad D.\ \frac{z_1}{z_2}$$

**Rješenje 135**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Zapis $z = x + y \cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.
Neka je $z = x + y \cdot i$ bilo koji kompleksan broj. Sa $\bar{z}$ označavamo broj

$$\bar{z} = x - y \cdot i$$

koji nazivamo kompleksno konjugiranim broju z.

$$i^2 = -1 \quad , \quad \frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} \quad , \quad (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Ako su $z_1 = a + b \cdot i$, $z_2 = c + d \cdot i$ bilo koja dva kompleksna broja ovako se računa njihov:

- zbroj

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + b \cdot i \\ z_2 = c + d \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = a + c + (b + d) \cdot i$$

- razlika

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + b \cdot i \\ z_2 = c + d \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 - z_2 = a - c + (b - d) \cdot i$$

- umnožak

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + b \cdot i \\ z_2 = c + d \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i$$

- količnik

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + b \cdot i \\ z_2 = c + d \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i} = \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i} \cdot \frac{c - d \cdot i}{c - d \cdot i} = \frac{a \cdot c + b \cdot d + (b \cdot c - a \cdot d) \cdot i}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + \frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} \cdot i.$$

A.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 4 - 3 \cdot i \\ z_2 = -2 + 5 \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = 4 - 3 \cdot i + (-2 + 5 \cdot i) = 4 - 3 \cdot i - 2 + 5 \cdot i = \underline{\underline{4}} - 3 \cdot i \underline{\underline{- 2}} + 5 \cdot i = 2 + 2 \cdot i.$$

B.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 4 - 3 \cdot i \\ z_2 = -2 + 5 \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 - z_2 = 4 - 3 \cdot i - (-2 + 5 \cdot i) = 4 - 3 \cdot i + 2 - 5 \cdot i = \underline{\underline{4}} - 3 \cdot i \underline{\underline{+ 2}} - 5 \cdot i = 6 - 8 \cdot i.$$

C.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 4 - 3 \cdot i \\ z_2 = -2 + 5 \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (4 - 3 \cdot i) \cdot (-2 + 5 \cdot i) = -8 + 20 \cdot i + 6 \cdot i - 15 \cdot i^2 = -8 + 20 \cdot i + 6 \cdot i - 15 \cdot (-1) =$$

$$= -8 + 20 \cdot i + 6 \cdot i + 15 = \underline{\underline{-8}} + 20 \cdot i + 6 \cdot i \underline{\underline{+ 15}} = 7 + 26 \cdot i.$$

D.

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 4 - 3 \cdot i \\ z_2 = -2 + 5 \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - 3 \cdot i}{-2 + 5 \cdot i} = \frac{4 - 3 \cdot i}{-2 + 5 \cdot i} \cdot \frac{-2 - 5 \cdot i}{-2 - 5 \cdot i} = \frac{(4 - 3 \cdot i) \cdot (-2 - 5 \cdot i)}{(-2 + 5 \cdot i) \cdot (-2 - 5 \cdot i)} =$$

$$= \frac{(4 - 3 \cdot i) \cdot (-2 - 5 \cdot i)}{(-2 + 5 \cdot i) \cdot (-2 - 5 \cdot i)} = \frac{-8 - 20 \cdot i + 6 \cdot i + 15 \cdot i^2}{(-2)^2 + 5^2} = \frac{-8 - 20 \cdot i + 6 \cdot i + 15 \cdot (-1)}{4 + 25} = \frac{-8 - 20 \cdot i + 6 \cdot i - 15}{29} =$$

$$= \frac{\underline{\underline{-8}} - 20 \cdot i + 6 \cdot i \underline{\underline{- 15}}}{29} = \frac{-23 - 14 \cdot i}{29} = -\frac{23}{29} - \frac{14}{29} \cdot i.$$

**Vježba 135**

Zadani su kompleksni brojevi $z_1 = 5 + 2 \cdot i$, $z_2 = 3 - 4 \cdot i$. Izračunaj:

$$A.\ z_1 + z_2 \qquad B.\ z_1 - z_2 \qquad C.\ z_1 \cdot z_2 \qquad D.\ \frac{z_1}{z_2}$$

**Rezultat:** $8 - 2 \cdot i,\ 2 + 6 \cdot i,\ 23 - 14 \cdot i,\ \frac{7}{25} + \frac{26}{25} \cdot i.$

**Zadatak 136 (Ivan, srednja škola)**

Neka je $z = 3 + 2 \cdot i$. Koliko je $\left(i \cdot z \cdot \bar{z}\right)^4$?

**Rješenje 136**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Zapis z = x + y · i zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.
Neka je z = x + y · i bilo koji kompleksan broj. Sa $\bar{z}$ označavamo broj

$$\bar{z} = x - y \cdot i$$

koji nazivamo kompleksno konjugiranim broju z.

$$i^4 = 1 \quad , \quad (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2 \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 3 + 2 \cdot i \\ \bar{z} = 3 - 2 \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow \left(i \cdot z \cdot \bar{z}\right)^4 = \left(i \cdot (3 + 2 \cdot i) \cdot (3 - 2 \cdot i)\right)^4 = \left(i \cdot \left(3^2 + 2^2\right)\right)^4 = \left(i \cdot (9 + 4)\right)^4 =$$

$$= (i \cdot 13)^4 = (13 \cdot i)^4 = 13^4 \cdot i^4 = 13^4 \cdot 1 = 13^4 = 28561.$$

**Vježba 136**

Neka je $z = 3 - 2 \cdot i$. Koliko je $\left(i \cdot z \cdot \bar{z}\right)^4$?

**Rezultat:** 28561.



**Zadatak 137 (Tiny, gimnazija)**

Kompleksan broj z = 2 · i prikažite u trigonometrijskome obliku.

**Rješenje 137**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

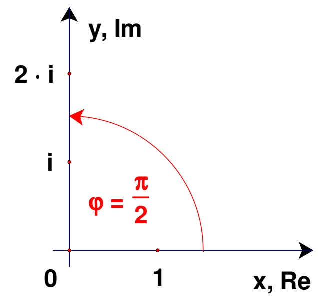
Apsolutna vrijednost kompleksnog broja (modul kompleksnog broja)

$$z = x + y \cdot i \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kompleksan broj z = x + y · i napisan u trigonometrijskom obliku glasi

$$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

gdje je | z | apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja (udaljenost kompleksnog broja od ishodišta kompleksne ravnine), φ argument kompleksnog broja.




Odredimo:

- apsolutnu vrijednost (modul) kompleksnog broja

$$z=2\cdot i\ \Rightarrow\ z=0+2\cdot i\ \Rightarrow\ |z|=\sqrt{0^2+2^2}\ \Rightarrow\ |z|=\sqrt{2^2}\ \Rightarrow\ |z|=2$$

- argument kompleksnog broja

$$\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja glasi:

$$\left.\begin{array}{l}|z|=2\ ,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}\\ z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)\end{array}\right\}\Rightarrow\ z=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

**Vježba 137**

Kompleksan broj z = – 2 prikažite u trigonometrijskome obliku.

**Rezultat:** $z=2\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi).$



**Zadatak 138 (Klarisa, gimnazija)**

Za koji realan broj x imaginarni dio kompleksnog broja $\dfrac{x-2\cdot i}{1+i}$ iznosi 1?

**Rješenje 138**

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$i^2=-1\quad,\quad\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y\cdot i$ i $x - y\cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i\ \Rightarrow\ \bar{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak kompleksnog broja i njemu konjugiranog broja uvijek je realan broj:

$$z\cdot\bar{z}=(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=\left[\begin{array}{l}\text{razlika}\\ \text{kvadrata}\end{array}\right]=x^2-y^2\cdot i^2=\left[i^2=-1\right]=x^2+y^2.$$

Najprije podijelimo zadane kompleksne brojeve.

$$\frac{x-2\cdot i}{1+i}=\frac{x-2\cdot i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{(x-2\cdot i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{x-x\cdot i-2\cdot i+2\cdot i^2}{1^2+1^2}=\frac{x-x\cdot i-2\cdot i+2\cdot(-1)}{1+1}=$$

$$=\frac{x-x\cdot i-2\cdot i-2}{2}=\frac{(x-2)+(-x-2)\cdot i}{2}=\frac{x-2}{2}+\frac{-x-2}{2}\cdot i.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{x-2\cdot i}{1+i}\right)=1\;\Rightarrow\;\operatorname{Im}\left(\frac{x-2}{2}+\frac{-x-2}{2}\cdot i\right)=1\;\Rightarrow\;\frac{-x-2}{2}=1\;\Rightarrow\;\frac{-x-2}{2}=1\;/\cdot 2\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;-x-2=2\;\Rightarrow\;-x=2+2\;\Rightarrow\;-x=4\;\Rightarrow\;-x=4\;/\cdot(-1)\;\Rightarrow\;x=-4.$$

**Vježba 138**

Za koji realan broj x realni dio kompleksnog broja $\frac{x-2\cdot i}{1+i}$ iznosi 1?

**Rezultat:** x = 4.

**Zadatak 139 (Matija, gimnazija)**

Zadan je kompleksan broj $z=(a+i)^2+\frac{a}{i}$, gdje je $a\in R$. Zapišite ga u standardnom obliku $(z=x+y\cdot i,\ x,\ y\in R)$.

**Rješenje 139**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i\;\Rightarrow\;\bar{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak kompleksnog broja i njemu konjugiranog broja uvijek je realan broj:

$$z\cdot\bar{z}=(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=\begin{bmatrix}\text{razlika}\\ \text{kvadrata}\end{bmatrix}=x^2-y^2\cdot i^2=\left[i^2=-1\right]=x^2+y^2.$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad i^2=-1\quad,\quad\frac{n}{1}=n\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$z=(a+i)^2+\frac{a}{i}\;\Rightarrow\;z=a^2+2\cdot a\cdot i+i^2+\frac{a}{i}\cdot\frac{-i}{-i}\;\Rightarrow\;z=a^2+2\cdot a\cdot i+i^2+\frac{-a\cdot i}{-i^2}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;z=a^2+2\cdot a\cdot i-1+\frac{-a\cdot i}{-(-1)}\;\Rightarrow\;z=a^2+2\cdot a\cdot i-1+\frac{-a\cdot i}{1}\;\Rightarrow\;z=a^2+2\cdot a\cdot i-1-a\cdot i\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;z=a^2-1+a\cdot i.$$

**Vježba 139**

Zadan je kompleksan broj $z=(a-i)^2+\frac{a}{i}$, gdje je $a \in R$. Zapišite ga u standardnom obliku $(z=x+y\cdot i,\ x,\ y \in R)$.

**Rezultat:** $z=a^2-1-3\cdot a\cdot i.$

**Zadatak 140 (Branka, gimnazija)**

Ako je $z=2+11\cdot i$, onda je $\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{\bar{z}}=4$. Dokažite.

**Rješenje 140**

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve x + y · i i x – y · i kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow \bar{z}=x-y\cdot i.$$

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3 \quad , \quad (a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3 \quad , \quad \sqrt[3]{a^3}=a.$$

$$i^1=i \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad i^3=-i.$$

Uočimo da vrijedi:

- $z=2+11\cdot i \Rightarrow z=(2+i)^3.$

Provjera:

$$(2+i)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3=8+3\cdot 4\cdot i+3\cdot 2\cdot(-1)+(-i)=8+12\cdot i-6-i=2+11\cdot i.$$

- $\bar{z}=2-11\cdot i \Rightarrow \bar{z}=(2-i)^3.$

Provjera:

$$(2-i)^3=2^3-3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2-i^3=8-3\cdot 4\cdot i+3\cdot 2\cdot(-1)-(-i)=8-12\cdot i-6+i=2-11\cdot i.$$

Tada je:

$$\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{\bar{z}}=\sqrt[3]{(2+i)^3}+\sqrt[3]{(2-i)^3}=2+i+2-i=2+i+2-i=4.$$

**Vježba 140**

Ako je $z=18+26\cdot i$, onda je $\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{\bar{z}}=6$. Dokažite.

**Rezultat:** Dokaz analogan.