Zadatak 041 (Ivana, gimnazija)

Za koje vrijednosti realnog parametra q je zbroj kubova rješenja jednadžbe $x^2 - x + q = 0$ jednak 19?

Rješenje 041

Ponovimo!

$$x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -b \ , \ x_1 \cdot x_2 = c \quad , \quad a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \left(a^2 - a \cdot b + b^2\right).$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2.$$

Računamo vrijednosti realnog parametra q:

$$x^2 - x + q \Rightarrow \begin{bmatrix} a = 1 \\ b = -1 \\ c = q \end{bmatrix}.$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 19 \Rightarrow \left(x_1 + x_2\right) \cdot \left(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2\right) = 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_1 + x_2\right) \cdot \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2\right) = 19 \Rightarrow \left(x_1 + x_2\right) \cdot \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2\right) = 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-b) \cdot \left((-b)^2 - 3 \cdot c\right) = 19 \Rightarrow 1 \cdot \left(1^2 - 3 \cdot q\right) = 19 \Rightarrow 1 - 3 \cdot q = 19 \Rightarrow -3 \cdot q = 19 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \cdot q = 18 \ /:(-3) \Rightarrow q = -6.$$

Vježba 041

Za koje vrijednosti realnog parametra q je zbroj kubova rješenja jednadžbe $x^2 - x + q = 0$ jednak 22?

Rezultat: $q = -7.$

Zadatak 042 (Felix, tehnička škola)

Napišite kvadratnu jednadžbu ako su zadana njezina rješenja: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

Rješenje 042

1.inačica

Kvadratna jednadžba sa rješenjima x_1 i x_2 glasi

$$a \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) = 0,$$

gdje je $a \neq 0$ po volji odabran broj.

Budući da su zadana rješenja kvadratne jednadžbe, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -3 \ , \ x_2 = 2 \\ a = 1 \ (\text{uzeto po volji}) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \cdot (x+3) \cdot (x-2) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 3 \cdot x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0.$$

2.inačica

Ako vrijedi $x_1 + x_2 = b$, $x_1 \cdot x_2 = c$, onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - b \cdot x + c = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = x_1 + x_2 = -3 + 2 = -1 \\ c = x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 2 = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0.$$

Vježba 042

Napišite kvadratnu jednadžbu ako su zadana njezina rješenja: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Rezultat: $x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0.$

Zadatak 043 (Marija, gimnazija)

Riješite jednadžbu: $\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(2\cdot x^2+2\cdot x-3\right)=3\cdot\left(x^2+x-1\right)$.

Rješenje 043

Ponovimo!

$$a\cdot b=0 \;\Rightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

$$\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(2\cdot x^2+2\cdot x-3\right)=3\cdot\left(x^2+x-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2+x+1\right)\cdot\left(2\cdot x^2+2\cdot x+2-5\right)=3\cdot\left(x^2+x+1-2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2+x+1\right)\cdot\left(2\cdot\left(x^2+x+1\right)-5\right)=3\cdot\left(x^2+x+1-2\right) \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zamjena (supstitucija)}\\ x^2+x+1=t\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\cdot(2\cdot t-5)=3\cdot(t-2) \Rightarrow 2\cdot t^2-5\cdot t=3\cdot t-6 \Rightarrow 2\cdot t^2-5\cdot t-3\cdot t+6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot t^2-8\cdot t+6=0 \;/:2 \Rightarrow t^2-4\cdot t+3=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow t_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{4+2}{2} \\ t_2=\dfrac{4-2}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=\dfrac{6}{2} \\ t_2=\dfrac{2}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1=3 \\ t_2=1\end{array}\right\}.$$

Rješenja zadane jednadžbe dobijemo vraćanjem na uvedenu zamjenu (supstituciju):

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+1=t \\ t=3\end{array}\right\} \Rightarrow x^2+x+1=3 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1+3}{2} \\ x_2=\dfrac{-1-3}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-2\end{array}\right\}.$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+1=t \\ t=1\end{array}\right\} \Rightarrow x^2+x+1=1 \Rightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x\cdot(x+1)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x+1=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3=0 \\ x_4=-1\end{array}\right\}.$$

Vježba 043

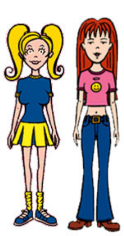
Nađite zbroj rješenja jednadžbe: $\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(2\cdot x^2+2\cdot x-3\right)=3\cdot\left(x^2+x-1\right)$.

Rezultat: -2.

Zadatak 044 (Kristina - Kiki, Izidora, ekonomska škola)

Odredite parametar p tako da jednadžba ima jedno realno rješenje: $4\cdot x^2+12\cdot x+p=0$.

Rješenje 044



Kiki i Izidora nisu kao druge cure da bi samo pričale o dečkima. One vole i matematiku. Slučajno sam čuo taj razgovor.

Izidora: "Kiki, kakva rješenja može imati kvadratna jednadžba?"

Kiki sa blaženim osmijehom na licu: "Kvadratna jednadžba $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ može imati

- dva realna različita rješenja, $x_1 \neq x_2$
- dvostruko realno rješenje, $x_1 = x_2$
- dva konjugirano kompleksna rješenja, $x_1 = \overline{x_2}$.

Vrsta rješenja ovisi o predznaku diskriminante:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c."$$

Opet će radoznala Izidora: "Ali kako ovisi?"

Kiki joj brižno objašnjava: "Dakle, diskriminanta $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ određuje vrstu rješenja kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Pamti:

- $b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$, dva realna različita rješenja , $x_1 \neq x_2$
- $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$, jedno (tzv. dvostruko) realno rješenje , $x_1 = x_2$
- $b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$, dva konjugirano kompleksna rješenja , $x_1 = \overline{x_2}$."

U tom trenutku kraj njih prođe zgodan lik. Cure ga zadivljeno pogledaju i uzdahnu. "Ah, što je sladak!" i istog trena zaborave na matematiku. Zato ću sam izračunati vrijednost parametra p:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \cdot x^2 + 12 \cdot x + p = 0 \\ a = 4 \ , \ b = 12 \ , \ c = p \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot p = 0 \Rightarrow 144 - 16 \cdot p = 0 \Rightarrow -16 \cdot p = -144 \ /:(-16) \Rightarrow p = 9.$$

Vježba 044

Odredite parametar p tako da jednadžba ima jedno realno rješenje: $x^2 + 12 \cdot x + p = 0$.

Rezultat: $p = 36$.

Zadatak 045 (Anamarija, gimnazija)

Nađite zbroj aritmetičke i geometrijske sredine korijena jednadžbe $2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 32 = 0$.

Rješenje 045

$$2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 32 = 0 \ /:2 \Rightarrow x^2 - 10 \cdot x + 16 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Vièteove formule} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \ , \ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 \cdot x_2 = 16 \end{array}\right\}.$$

Zbroj aritmetičke i geometrijske sredine iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ G = \sqrt{x_1 \cdot x_2} \end{array}\right\} \Rightarrow A + G = \frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \frac{10}{2} + \sqrt{16} = 5 + 4 = 9.$$

Vježba 045

Nađite razliku aritmetičke i geometrijske sredine korijena jednadžbe $2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 32 = 0$.

Rezultat: 1.

Zadatak 046 (Ana, gimnazija)

Brojevi $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ su nultočke funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + x - b$. Nađite a + b.

Rješenje 046

Ponovimo!

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array}\right\} - \text{Vièteove formule.}$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x_1=2\ ,\ x_2=1 \\ f(x)=a\cdot x^2+x-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Vièteove} \\ \text{formule} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{1}{a} \\ x_1\cdot x_2=-\frac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2+1=-\frac{1}{a} \\ 2\cdot 1=-\frac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3=-\frac{1}{a} \\ 2=-\frac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3} \\ b=-2\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3} \\ b=-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3} \Rightarrow a+b=\frac{1}{3}.$$

2.inačica

Budući da su brojevi $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ nultočke funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + x - b$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot 2^2+2-b=0 \\ a\cdot 1^2+1-b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a-b=-2 \\ a-b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a-b=-2 \\ a-b=-1\ /\cdot(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot a-b=-2 \\ -a+b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot a=-1\ /:3 \Rightarrow a=-\frac{1}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3} \\ a-b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{3}-b=-1 \Rightarrow -b=-1+\frac{1}{3} \Rightarrow -b=-\frac{2}{3}\ /\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{2}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3} \Rightarrow a+b=\frac{1}{3}.$$

Vježba 046

Brojevi $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ su nultočke funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + x - b$. Nađite $2 \cdot a + b$.

Rezultat: 0.

Zadatak 047 (Maturant, gimnazija)

Broj 1 nalazi se između nultočaka kvadratne funkcije $y = (m - 2) \cdot x^2 - 5 \cdot x$. Parametar m je iz intervala: $A.\langle -1, 3\rangle$ $B.\langle 2, 7\rangle$ $C.\langle 0, 5\rangle$ $D.\langle 1, 8\rangle$ $E.\langle 3, 9\rangle$

Rješenje 047

Nultočke kvadratne funkcije $y = (m - 2) \cdot x^2 - 5 \cdot x$ iznose:

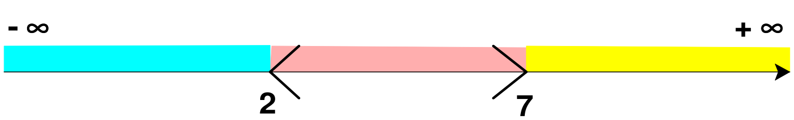
$$(m-2)\cdot x^2-5\cdot x=0 \Rightarrow x\cdot\left[(m-2)\cdot x-5\right]=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ (m-2)\cdot x-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ (m-2)\cdot x=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=\frac{5}{m-2} \end{array}\right\}.$$

Budući da se broj 1 nalazi između nultočaka kvadratne funkcije, slijedi:

$$0<1<\frac{5}{m-2} \Rightarrow \frac{5}{m-2}>1 \Rightarrow \frac{5}{m-2}-1>0 \Rightarrow \frac{5-m+2}{m-2}>0 \Rightarrow \frac{-m+7}{m-2}>0.$$

Prvi slučaj:

$$\frac{-m+7}{m-2}>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -m+7>0 \\ m-2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -m>-7\ /\cdot(-1) \\ m>2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m<7 \\ m>2 \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\langle 2, 7\rangle.$$



Drugi slučaj:

$$\frac{-m+7}{m-2}>0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -m+7<0 \\ m-2<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -m<-7 \;/\cdot(-1) \\ m<2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m>7 \\ m<2 \end{array}\right\} \Rightarrow x\in\emptyset.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 047

Broj 1 nalazi se između nultočaka kvadratne funkcije y = (m – 2) · x^2 – x. Parametar m je iz intervala: $A.\langle -1, 3\rangle$ $B.\langle 2, 7\rangle$ $C.\langle 0, 5\rangle$ $D.\langle 2, 3\rangle$ $E.\langle 3, 9\rangle$

Rezultat: Odgovor je pod D.

Zadatak 048 (Carmen, ekonomska škola)

Kako glasi kvadratna jednadžba čije je jedno rješenje 1 + i?

Rješenje 048

Ponovimo!

Ako je diskriminanta negativna, kvadratna jednadžba uvijek ima dva kompleksna rješenja. Ona se razlikuju samo u predznaku imaginarnog dijela, što znači da su međusobno konjugirani:

$$x_1=a+b\cdot i \Rightarrow x_2=\overline{x_1}=a-b\cdot i.$$

Kvadratna jednadžba sa rješenjima x_1 i x_2 glasi:

$$a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0,$$

gdje je a ≠ 0 po volji odabran broj.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe a · x^2 + b · x + c = 0 zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Zato vrijedi:

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \Rightarrow x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1+i \;,\; x_2=1-i \\ a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0 \\ a=1 \text{ po volji odabrani broj} \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1-i)\cdot(x-1+i)=0 \Rightarrow x^2-x+x\cdot i-x+1-i-x\cdot i+i+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-x+x\cdot i-x+1-i-x\cdot i+i+1=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x+2=0.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1+i \;,\; x_2=1-i \\ x_1+x_2=1+i+1-i=2 \\ x_1\cdot x_2=(1+i)\cdot(1-i)=1+1=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x+2=0.$$

Vježba 048

Kako glasi kvadratna jednadžba čije je jedno rješenje 1 – i?

Rezultat: $x^2-2\cdot x+2=0.$

Zadatak 049 (Carmen, ekonomska škola)

Za koji $m \in R$ jednadžba $5 \cdot x^2 + 2 \cdot x + m = 0$ ima konjugirano kompleksna rješenja?

Rješenje 049

Ponovimo!

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Ako je $D < 0$, jednadžba ima konjugirano kompleksna rješenja. Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x + m = 0 \\ a = 5 \;,\; b = 2 \;,\; c = m \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot m < 0 \Rightarrow 4 - 20 \cdot m < 0 \Rightarrow -20 \cdot m < -4 \;/:(-20) \Rightarrow m > \frac{4}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m > \frac{1}{5} \Rightarrow m \in \left\langle \frac{1}{5}, +\infty \right\rangle.$$

Vježba 049

Za koji $k \in R$ jednadžba $5 \cdot x^2 + 5 \cdot x + m = 0$ ima konjugirano kompleksna rješenja?

Rezultat: $m \in \left\langle \frac{5}{4}, +\infty \right\rangle.$

Zadatak 050 (Aleksandra, srednja škola)

Riješite jednadžbu:

$$\sqrt{x^2 - 4 \cdot x + 4} = 2 \cdot x - 1.$$

Rješenje 050

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad |a| = \begin{cases} a \;,\; a \geq 0 \\ -a \;,\; a < 0. \end{cases}$$

1.inačica

Aleksandra će kvadrirati obje strane jednakosti i riješiti dobivenu jednadžbu ☺:

$$\sqrt{x^2 - 4 \cdot x + 4} = 2 \cdot x - 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4 \cdot x + 4} = 2 \cdot x - 1 \;/^2 \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x + 4 = (2 \cdot x - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \cdot x + 4 = 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 \Rightarrow x^2 + 4 = 4 \cdot x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x^2 = 1 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \cdot x^2 = -3 \;/:(-3) \Rightarrow x^2 = 1 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Ova se rješenja moraju uvrstiti u početnu jednadžbu da bi se provjerilo jesu li ona njezina rješenja:

$x_1 = 1$	$x_2 = -1$
$\sqrt{x^2 - 4 \cdot x + 4} = 2 \cdot x - 1$	$\sqrt{x^2 - 4 \cdot x + 4} = 2 \cdot x - 1$
$\sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 + 4} = 2 \cdot 1 - 1$	$\sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 4} = 2 \cdot (-1) - 1$
$\sqrt{1 - 4 + 4} = 2 - 1$	$\sqrt{1 + 4 + 4} = -2 - 1$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{9} = -3$
1=1	$3 \neq -3$
$x_1 = 1$ jest rješenje	$x_2 = -1$ nije rješenje

2.inačica

Uporabimo apsolutnu vrijednost ili modul realnog broja:

$$\sqrt{x^2-4\cdot x+4}=2\cdot x-1 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2}=2\cdot x-1 \Rightarrow |x-2|=2\cdot x-1.$$

Aleksandra zna da vrijedi:

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 \text{ za } x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 2 \\ -x+2 \text{ za } x-2<0 \Rightarrow x<2. \end{cases}$$

Rješavamo zadanu jednadžbu za $x \ge 2$:

$$|x-2|=2\cdot x-1 \Rightarrow x-2=2\cdot x-1 \Rightarrow x-2\cdot x=-1+2 \Rightarrow -x=1\ /\cdot(-1) \Rightarrow x_1=-1 \text{ nije rješenje jer je } x\ge 2.$$

Rješavamo zadanu jednadžbu za $x < 2$:

$$|x-2|=2\cdot x-1 \Rightarrow -x+2=2\cdot x-1 \Rightarrow -x-2\cdot x=-1-2 \Rightarrow -3\cdot x=-3\ /\cdot(-3) \Rightarrow x_2=1 \text{ je rješenje jer je } x<2.$$

Vježba 050

Riješite jednadžbu:

$$\sqrt{x-2}=2.$$

Rezultat: 6.

Zadatak 051 (Ana, srednja škola)

Dana je kvadratna jednadžba $p\cdot x\cdot(1+x)+2=2\cdot x\cdot(p+x)$ pri čemu je x nepoznanica, a p neki realni broj.

1) Za koji p jednadžba ima realna rješenja?
2) Ako je – 2 jedno rješenje jednadžbe, odredi drugo rješenje?
3) Za koje će p umnožak rješenja jednadžbe biti veći od njihovog dvostrukog zbroja?

Rješenje 051

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0$$

$$\frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}\right\} \text{ ili } \left.\begin{matrix} a<0 \\ b<0 \end{matrix}\right\}.$$

Vièteove formule

Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ je broj $D=b^2-4\cdot a\cdot c$.

a) Ako je $D>0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
b) Ako je $D=0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
c) Ako je $D<0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

1) Tražimo p za koji jednadžba ima realna rješenja.

$$p\cdot x\cdot(1+x)+2=2\cdot x\cdot(p+x) \Rightarrow p\cdot x+p\cdot x^2+2=2\cdot p\cdot x+2\cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\cdot x+p\cdot x^2+2-2\cdot p\cdot x-2\cdot x^2=0 \Rightarrow (p-2)\cdot x^2-p\cdot x+2=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=p-2 \\ b=-p \\ c=2 \end{matrix}\right\}.$$

Budući da jednadžba mora imati realna rješenja, slijedi:

$$D\ge 0 \Rightarrow b^2-4\cdot a\cdot c\ge 0 \Rightarrow (-p)^2-4\cdot(p-2)\cdot 2\ge 0 \Rightarrow p^2-8\cdot p+16\ge 0 \Rightarrow (p-4)^2\ge 0.$$

Ova nejednakost istinita je za svaki realni broj p, dakle, $p\in\langle -\infty, +\infty\rangle$.

2) Ako je – 2 jedno rješenje jednadžbe, tražimo drugo rješenje.

$$\left.\begin{matrix} x=-2 \\ (p-2)\cdot x^2-p\cdot x+2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (p-2)\cdot(-2)^2-p\cdot(-2)+2=0 \Rightarrow 4\cdot(p-2)+2\cdot p+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot p-8+2\cdot p+2=0 \Rightarrow 6\cdot p=6 \;/:6 \Rightarrow p=1.$$

Znači da jednadžba, koja ima jedno rješenje – 2, glasi

$$(1-2)\cdot x^2-1\cdot x+2=0 \Rightarrow -x^2-x+2=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x^2+x-2=0.$$

Drugo rješenje možemo naći na više načina.
Prvi način (rastavljanjem na faktore)

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x^2-1+x-1=0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x+1)+x-1=0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x+1)+(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot(x+1+1)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x+2)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-1=0 \\ x+2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=1 \text{ drugo rješenje} \\ x=-2 \end{matrix}\right\}.$$

Drugi način (uporabit ćemo Vièteovu formulu)

$$\left.\begin{matrix} x^2+x-2=0 \;,\; x_1=-2 \\ a=1 \;,\; b=1 \;,\; c=-2 \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2+x_2=-\frac{1}{1} \Rightarrow -2+x_2=-1 \Rightarrow x_2=-1+2 \Rightarrow x_2=1.$$

Treći način (uporabit ćemo Vièteovu formulu)

$$\left.\begin{matrix} x^2+x-2=0 \;,\; x_1=-2 \\ a=1 \;,\; b=1 \;,\; c=-2 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2\cdot x_2=\frac{-2}{1} \Rightarrow -2\cdot x_2=-2 \;/:(-2) \Rightarrow x_2=1.$$

3) Tražimo p za koji će umnožak rješenja jednadžbe biti veći od njihovog dvostrukog zbroja. Uporabit ćemo Vièteove formule.

$$\left.\begin{matrix} (p-2)\cdot x^2-p\cdot x+2=0 \\ a=p-2 \;,\; b=-p \;,\; c=2 \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \;,\; x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1\cdot x_2>2\cdot(x_1+x_2) \Rightarrow \frac{2}{p-2}>2\cdot\left(-\frac{-p}{p-2}\right) \Rightarrow \frac{2}{p-2}>\frac{2\cdot p}{p-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{p-2}>\frac{2\cdot p}{p-2} \;/:2 \Rightarrow \frac{1}{p-2}>\frac{p}{p-2} \Rightarrow \frac{1}{p-2}-\frac{p}{p-2}>0 \Rightarrow \frac{1-p}{p-2}>0.$$

Razlomak je pozitivan u dva slučaja.

- $\dfrac{1-p}{p-2}>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1-p>0 \\ p-2>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -p>-1 \;/\cdot(-1) \\ p>2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p<1 \\ p>2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p\in\varnothing.$
- $\dfrac{1-p}{p-2}>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1-p<0 \\ p-2<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -p<-1 \;/\cdot(-1) \\ p<2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p>1 \\ p<2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p\in\langle 1, 2\rangle.$

Vježba 051

Dana je kvadratna jednadžba $(x-p)^2 = 2\cdot p\cdot(x+1)$ pri čemu je x nepoznanica, a p neki realni broj. Za koje je p jedno rješenje jednadžbe jednako nuli?

Rezultat: $p = 0 \;,\; p = 2.$

Zadatak 052 (Ivan, pomorska škola)

Ako jednadžba $(3 \cdot m - 3) \cdot x^2 + (6 \cdot m - 2) \cdot x + 3 \cdot m = 0$ ima jednu (dvostruku) nultočku, nađite m.

Rješenje 052

Ponovimo!

Kvadratna jednadžba $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ima jednu (dvostruku) nultočku ako je diskriminanta jednaka nuli:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0.$$

Tražimo m:

$$\left.\begin{array}{l} (3 \cdot m - 3) \cdot x^2 + (6 \cdot m - 2) \cdot x + 3 \cdot m = 0 \\ a = 3 \cdot m - 3 \ , \ b = 6 \cdot m - 2 \ , \ c = 3 \cdot m \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (6 \cdot m - 2)^2 - 4 \cdot (3 \cdot m - 3) \cdot 3 \cdot m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 \cdot m^2 - 24 \cdot m + 4 - 12 \cdot m \cdot (3 \cdot m - 3) = 0 \Rightarrow 36 \cdot m^2 - 24 \cdot m + 4 - 36 \cdot m^2 + 36 \cdot m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -24 \cdot m + 4 + 36 \cdot m = 0 \Rightarrow 12 \cdot m + 4 = 0 \Rightarrow 12 \cdot m = -4 \ /:12 \Rightarrow m = -\frac{4}{12} \Rightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Vježba 052

Ako jednadžba $(m - 1) \cdot x^2 + \left(2 \cdot m - \frac{2}{3}\right) \cdot x + m = 0$ ima jednu (dvostruku) nultočku, nađite m.

Rezultat: $m = -\frac{1}{3}.$

Zadatak 053 (Marijana, maturantica ekonomske škole)

Odredi sve parametre $a \in R$ takve da graf funkcije $f(x) = a \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x$ ima samo jednu nultočku.

Rješenje 053

Ponovimo!

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ili } y = 0 \text{ ili } x = y = 0.$$

Kvadratna jednadžba $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ima kompleksno – konjugirana rješenja (nema realna rješenja) ako je diskriminanta negativna:

$$D < 0 \quad => \quad b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0.$$

Računamo parametar a:

$$f(x) = a \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x \Rightarrow f(x) = x \cdot \left(a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1\right).$$

Budući da mora biti f(x) = 0, slijedi

$$x \cdot \left(a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \ \text{nultočka} \\ a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0 \end{array}\right\}.$$

Kvadratna jednadžba $a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0$ nema realna rješenja ako je:

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0 \\ a = a \ , \ b = 2 \ , \ c = 1 \\ D < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = a \ , \ b = 2 \ , \ c = 1 \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - 4 \cdot a \cdot 1 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - 4 \cdot a < 0 \Rightarrow -4 \cdot a < -4 \ /:(-4) \Rightarrow a > 1.$$

Vježba 053

Odredi sve parametre $a \in R$ takve da graf funkcije $f(x) = a \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + x$ ima samo jednu nultočku.

Rezultat: a > 4.

Zadatak 054 (Marijana, maturantica ekonomske škole)

Koliki je parametar m u jednadžbi $m \cdot x^2 + x + 4 \cdot m = 0$ ako je zbroj njezinih korijena (rješenja) jednak dvostrukom umnošku tih korijena?

Rješenje 054

Ponovimo!

Ako su x_1 i x_2 rješenja (korijeni) kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, tada vrijede Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Računamo parametar m:

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot x^2 + x + 4 \cdot m = 0 \\ a = m \ , \ b = 1 \ , \ c = 4 \cdot m \\ x_1 + x_2 = 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = m \ , \ b = 1 \ , \ c = 4 \cdot m \\ -\frac{b}{a} = 2 \cdot \frac{c}{a} \ / \cdot (-a) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = m \ , \ b = 1 \ , \ c = 4 \cdot m \\ b = -2 \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = -2 \cdot 4 \cdot m \Rightarrow 8 \cdot m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{8}.$$

Vježba 054

Koliki je parametar m u jednadžbi $m \cdot x^2 + x + 4 \cdot m = 0$ ako je zbroj njezinih korijena (rješenja) jednak trostrukom umnošku tih korijena?

Rezultat: $m = -\frac{1}{12}.$

Zadatak 055 (Petar, pomorska škola)

Dana je kvadratna jednadžba $p \cdot x^2 + (2 \cdot p + 6) \cdot x + 16 = 0$, $p \in R$. Za koje vrijednosti p jednadžba ima dvostruko realno rješenje?

Rješenje 055

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Kvadratna jednadžba $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ima dvostruko realno rješenje, ako je njezina diskriminanta jednaka nuli:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0.$$

Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} p \cdot x^2 + (2 \cdot p + 6) \cdot x + 16 = 0 \\ a = p \ , \ b = 2 \cdot p + 6 \ , \ c = 16 \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2 \cdot p + 6)^2 - 4 \cdot p \cdot 16 = 0 \Rightarrow 4 \cdot p^2 + 24 \cdot p + 36 - 64 \cdot p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot p^2 - 40 \cdot p + 36 = 0 \ /:4 \Rightarrow p^2 - 10 \cdot p + 9 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -10 \ , \ c = 9 \\ p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow p_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \Rightarrow p_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow p_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1 = \frac{10+8}{2} \\ p_2 = \frac{10-8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1 = \frac{18}{2} \\ p_2 = \frac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1 = 9 \\ p_2 = 1 \end{array}\right\}.$$

Vježba 055

Dana je kvadratna jednadžba $x^2 - 5 \cdot x + p = 0$, $p \in R$. Za koje vrijednosti p jednadžba ima dvostruko realno rješenje?

Rezultat: $p = \frac{25}{4}.$

Zadatak 056 (Marijana, maturantica)

Za koji realan broj k kvadratna jednadžba $k \cdot x^2 + (k^2 + k) \cdot x - 7 = 0$ ima dva međusobno suprotna rješenja?

Rješenje 056

Ponovimo!

Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Budući da su rješenja jednadžbe međusobno suprotna, slijedi:

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k \cdot x^2 + \left(k^2 + k\right) \cdot x - 7 = 0 \\ a = k \ , \ b = k^2 + k \ , \ c = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{k^2 + k}{k} = 0 \ / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k^2 + k}{k} = 0 \Rightarrow [k \neq 0] \Rightarrow \frac{k \cdot (k+1)}{k} = 0 \Rightarrow k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1.$$

Vježba 056

Za koji realan broj k kvadratna jednadžba $x^2 + (k + 1) \cdot x - 7 = 0$ ima dva međusobno suprotna rješenja?

Rezultat: $-1.$

Zadatak 057 (Marijana, maturantica)

Nađi zbroj rješenja jednadžbe: $\sqrt[3]{(x-3)^2} = 4 \cdot \left(3 + \sqrt[3]{x-3}\right).$

Rješenje 057

$$\sqrt[3]{(x-3)^2} = 4 \cdot \left(3 + \sqrt[3]{x-3}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{supstitucija} \\ t = \sqrt[3]{x-3} \end{array}\right] \Rightarrow t^2 = 4 \cdot (3 + t) \Rightarrow t^2 = 12 + 4 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 4 \cdot t - 12 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = -12 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \frac{4+8}{2} \\ t_2 = \frac{4-8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \frac{12}{2} \\ t_2 = -\frac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = 6 \\ t_2 = -2 \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se na supstituciju:

- $\left.\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x-3} \\ t = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[3]{x-3} = 6 \ /^3 \Rightarrow x - 3 = 6^3 \Rightarrow x - 3 = 216 \Rightarrow x_1 = 219.$
- $\left.\begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x-3} \\ t = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[3]{x-3} = -2 \ /^3 \Rightarrow x - 3 = (-2)^3 \Rightarrow x - 3 = -8 \Rightarrow x_1 = -5.$

Zbroj rješenja iznosi:

$$x_1 + x_2 = 219 + (-5) \Rightarrow x_1 + x_2 = 214.$$

Vježba 057

Nađi zbroj rješenja jednadžbe: $\sqrt[3]{(x-1)^2} = 4 \cdot \left(3 + \sqrt[3]{x-1}\right)$.

Rezultat: 210.

Zadatak 058 (Iva, maturantica)

Odredi koeficijent k tako da kvadratne jednadžbe $x^2 + k \cdot x + 6 = 0$ i $2 \cdot x^2 + k \cdot x + 2 = 0$ imaju zajednički korijen.

Rješenje 058

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + k \cdot x + 6 = 0 \\ 2 \cdot x^2 + k \cdot x + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k \cdot x = -x^2 - 6 \\ k \cdot x = -2 \cdot x^2 - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow -x^2 - 6 = -2 \cdot x^2 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2 \cdot x^2 = -2 + 6 \Rightarrow x^2 = 4 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array}\right\}.$$

Sada računamo k:

$$k \cdot x = -6 - x^2 \ /:x \Rightarrow k = \frac{-6 - x^2}{x}.$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ k_1 = \dfrac{-6 - x_1^2}{x_1} \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = \frac{-6 - 2^2}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{-6 - 4}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{-10}{2} \Rightarrow k_1 = -5.$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = -2 \\ k_2 = \dfrac{-6 - x_2^2}{x_2} \end{array}\right\} \Rightarrow k_2 = \frac{-6 - (-2)^2}{-2} \Rightarrow k_2 = \frac{-6 - 4}{-2} \Rightarrow k_2 = \frac{-10}{-2} \Rightarrow k_2 = 5.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + k \cdot x + 6 = 0 \\ 2 \cdot x^2 + k \cdot x + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + k \cdot x + 6 = 0 \ / \cdot 2 \\ 2 \cdot x^2 + k \cdot x + 2 = 0 \ / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot x^2 + 2 \cdot k \cdot x + 12 = 0 \\ -2 \cdot x^2 - k \cdot x - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow k \cdot x + 10 = 0 \Rightarrow k \cdot x = -10 \ /:k \Rightarrow x = -\frac{10}{k}.$$

Sada računamo k:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + k \cdot x + 6 = 0 \\ x = -\dfrac{10}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(-\frac{10}{k}\right)^2 + k \cdot \left(-\frac{10}{k}\right) + 6 = 0 \Rightarrow \frac{100}{k^2} - 10 + 6 = 0 \Rightarrow \frac{100}{k^2} - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{100}{k^2} = 4 \ / \cdot k^2 \Rightarrow 4 \cdot k^2 = 100 \ /:4 \Rightarrow k^2 = 25 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{25} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1 = 5 \\ k_2 = -5 \end{array}\right\}.$$

Vježba 058

Odredi koeficijent k tako da kvadratne jednadžbe $x^2 + 2 \cdot k \cdot x + 8 = 0$ i $x^2 + k \cdot x + 2 = 0$ imaju zajednički korijen.

Rezultat: $k_{1,2} = \pm 3.$

Zadatak 059 (Ksenija, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}.$

Rješenje 059

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

$$\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{a+b+x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{x-(a+b+x)}{(a+b+x) \cdot x} = \frac{b+a}{a \cdot b} \Rightarrow \frac{x-a-b-x}{(a+b+x) \cdot x} = \frac{a+b}{a \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-a-b}{(a+b+x) \cdot x} = \frac{a+b}{a \cdot b} \Rightarrow -\frac{a+b}{(a+b+x) \cdot x} = \frac{a+b}{a \cdot b} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{pretpostavka je} \\ a+b \neq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a+b}{(a+b+x) \cdot x} = \frac{a+b}{a \cdot b} \; / \cdot \frac{-1}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{(a+b+x) \cdot x} = \frac{-1}{a \cdot b} \Rightarrow (a+b+x) \cdot x = -a \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b) \cdot x + x^2 = -a \cdot b \Rightarrow x^2 + (a+b) \cdot x + a \cdot b = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + (a+b) \cdot x + a \cdot b = 0 \\ a = 1 \; , \; b = a+b \; , \; c = a \cdot b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \; , \; b = a+b \; , \; c = a \cdot b \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a \cdot b}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-a-b \pm \sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 - 4 \cdot a \cdot b}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-a-b \pm \sqrt{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-a-b \pm \sqrt{(a-b)^2}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-a-b \pm (a-b)}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{-a-b+(a-b)}{2} \\ x_2 = \frac{-a-b-(a-b)}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{-a-b+a-b}{2} \\ x_2 = \frac{-a-b-a+b}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{-2 \cdot b}{2} \\ x_2 = \frac{-2 \cdot a}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -b \\ x_2 = -a \end{array} \right\}.$$

Vježba 059

Riješi jednadžbu: $x^2 - (a+b) \cdot x + a \cdot b = 0.$

Rezultat: $x_1 = a \; , \; x_2 = b.$

Zadatak 060 (Marko, srednja škola)

Za koju vrijednost parametra $p \in R$ jednadžba $2 \cdot p \cdot x^2 - x + 1 = 0$ ima realna različita rješenja?

Rješenje 060

Ponovimo!

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.
Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot p \cdot x^2 - x + 1 = 0 \\ a = 2 \cdot p \ , \ b = -1 \ , \ c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2 \cdot p \ , \ b = -1 \ , \ c = 1 \\ D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p \cdot 1 \Rightarrow D = 1 - 8 \cdot p.$$

Realna različita rješenja postojat će ako je $D > 0$,
odnosno

$$1 - 8 \cdot p > 0,$$

odakle slijedi:

$$1 - 8 \cdot p > 0 \Rightarrow -8 \cdot p > -1 \ /:(-8) \Rightarrow p < \frac{1}{8} \Rightarrow p \in \left\langle -\infty, \frac{1}{8} \right\rangle.$$

Vježba 060

Za koju vrijednost parametra $p \in R$ jednadžba $2 \cdot p \cdot x^2 - x + 1 = 0$ ima jedno dvostruko realno rješenje?

Rezultat: $\frac{1}{8}$.