JEDNA ZANIMLJIVA PRIMJENA NEJEDNAKOSTI IZMEĐU ARITMETIČKE I GEOMETRIJSKE SREDINE

Dr. Šefket Arslanagić, Sarajevo, BiH

Dokazivanje nejednakosti u matematici predstavlja izuzetno zanimljiv i važan čin za buduće mlade (nadarene) matematičare i nastavnike koji rade s njima. Nejednakosti između brojnih sredina su takoreći temelj u tom poslu, osobito nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine koja glasi:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\,; \ \left(a_i \geq 0,\, i = 1,2,\ldots,n\right) \tag{1}$$

gdje jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. (Ubuduće ćemo ovu nejednakost označavati kao $AM - GM$ nejednakost). Recimo i to da se u odgovarajućoj matematičkoj literaturi o nejednakostima nalazi na desetine raznih dokaza ove nejednakosti; u [1] se nalaze tri razna dokaza.

U ovom radu ćemo pokazati kako se razne algebarske nejednakosti mogu uspješno dokazati primjenom (ne direktnom, op.a.) nejednakosti (1) za npr. $n = 2$ ili $n = 3$ ukoliko se stvore pogodni uvjeti za tu primjenu. To ćemo demonstrirati na više primjera.

Nejedankost 1. Dokazati da za $a,b,c > 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c\,. \tag{2}$$

Dokaz: Direktnom primjenom $AM - GM$ nejednakosti (1) za $n = 3$ imamo:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{c} \cdot \frac{c^2}{a}}\text{, tj.}$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 3\sqrt[3]{abc}\,.$$

Ali iz (1) slijedi da je

$$3\sqrt[3]{abc} \leq a + b + c\,,$$

pa ovakav dokaz ne dolazi u obzir. Šta sada? Primjenom $AM - GM$ nejednakosti (1) za $n = 2$ dobijamo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b} + b\right) \geq \sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b}\text{, tj.}$$

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a\,, \tag{3}$$

te analogno

$$\frac{b^2}{c}+c\geq 2b\,, \tag{4}$$

$$\frac{c^2}{a}+a\geq 2c\,. \tag{5}$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (3), (4) i (5), dobijamo nejednakost (2). Lijepo, zar ne? Hvala nejednakosti $AM-GM$ za $n=2$.
Vrijedi jednakost u (2) ako i samo ako je $a=b=c$.

Nejednakost 2. Dokazati da za $a,b,c>0$ vrijedi nejednakost

$$a^4+b^4+c^4\geq abc\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right). \tag{6}$$

Dokaz: Ne bi se puno usrećili ako bi koristili $AM-GM$ nejednakost (1) za $n=3$:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{3}\geq\sqrt[3]{a^4b^4c^4}\text{ , tj.}$$

$$a^4+b^4+c^4\geq 3abc\sqrt[3]{abc}\,.$$

Nakon dijeljenja date nejednakosti (6) sa $abc>0$, dobijamo ekvivalentnu nejednakost:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\,. \tag{7}$$

Sada ćemo dokazati nejednakost (7). Koristeći $AM-GM$ nejednakost (1) za $n=3$, dobijamo:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{bc}+b+c\right)\geq\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc}\cdot b\cdot c}\text{, tj.}$$

$$\frac{a^3}{bc}+b+c\geq 3a\,, \tag{8}$$

te analogno

$$\frac{b^3}{ac}+a+c\geq 3b\,, \tag{9}$$

$$\frac{c^3}{ab}+a+b\geq 3c\,, \tag{10}$$

a odavde nakon zbrajanja nejednakosti (8), (9) i (10):

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c\,. \tag{11}$$

Kako je na osnovu $AM-GM$ nejednakosti (1) za $n=2$:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ , tj.}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \text{ ,}$$

te analogno

$$b+c \geq 2\sqrt{bc} \text{ ,}$$

$$c+a \geq 2\sqrt{ca} \text{ ,}$$

te dobijamo nakon zbrajanja posljednje tri nejednakosti:

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \text{ .} \tag{12}$$

Sada iz nejednakosti (11) i (12) slijedi nejednakost (7), odnosno (6).
Vrijedi jednakost u (6) ako i samo ako je $a=b=c$.

Napomena 1. Vrijedi nejednakost u (6) ako uzmemo da su a,b,c nenegativni realni brojevi, tj. mogu biti i jednaki nuli.

Sada ćemo preći na dokaze nešto težih nejednakosti pomoću $AM-GM$ nejednakosti (1) za $n=2$ i $n=3$.

Nejednakost 3. Dokazati da za $a,b,c,d \geq 0$ takve da je $a+b+c+d=1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2} \text{ .} \tag{13}$$

Dokaz: Na osnovu $AM-GM$ nejednakosti (1) za $n=2$, dobijamo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\right) \geq \sqrt{\frac{a^2}{a+b}\cdot\frac{a+b}{4}} \text{ , tj.}$$

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{a+b}{4} \geq a \text{ ,}$$

te analogno

$$\frac{b^2}{b+c}+\frac{b+c}{4} \geq b \text{ ,}$$

$$\frac{c^2}{c+d}+\frac{c+d}{4} \geq c \text{ ,}$$

$$\frac{d^2}{d+a}+\frac{d+a}{4} \geq d \text{ .}$$

Nakon zbrajanja posljednje četiri nejednakosti, imamo:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}+\frac{1}{2}(a+b+c+d) \geq a+b+c+d \text{ ,}$$

a odavde zbog $a+b+c+d=1$:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geq\frac{1}{2}\text{, q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (13) ako i samo ako je $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

I ovdje vrijedi ono šo smo rekli u Napomeni 1 vodeći računa o tome da data nejednakost ima smisla.

Nejednakost 4. Dokazati da za $a,b,c\geq 0$ takve da je $ab+bc+cd+da=1$ vrijedi nejednakost

$$\sum_{cyclic}\frac{a^3}{b+c+d}\geq\frac{1}{3}. \tag{14}$$

Dokaz: Napišimo da je

$$\sum_{cyclic}\frac{a^3}{b+c+d}=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{b+a+d}+\frac{d^3}{b+c+a}.$$

Koristeći $AM-GM$ nejednakost (1) za $n=3$, dobijamo:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{18}+\frac{1}{12}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{a^3}{b+c+d}\cdot\frac{b+c+d}{18}\cdot\frac{1}{12}}\text{, tj.}$$

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{18}+\frac{1}{12}\geq\frac{a}{2},$$

te analogno

$$\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{a+c+d}{18}+\frac{1}{12}\geq\frac{b}{2},$$

$$\frac{c^3}{b+a+d}+\frac{b+a+d}{18}+\frac{1}{12}\geq\frac{c}{2},$$

$$\frac{d^3}{b+c+a}+\frac{b+c+a}{18}+\frac{1}{12}\geq\frac{d}{2}.$$

Nakon zbrajanja četiri posljednje nejednakosti, dobijamo:

$$\sum_{cyclic}\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{3(a+b+c+d)}{18}+\frac{4}{12}\geq\frac{a+b+c+d}{2},$$

a odavde

$$\sum_{cyclic}\frac{a^3}{b+c+d}\geq\frac{1}{3}(a+b+c+d-1). \tag{15}$$

Kako je na osnovu $AM-GM$ nejednakosti (1) za $n=2$:

$$\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\geq\sqrt{(a+c)(b+d)}$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c+d)^2\geq 4(ab+bc+cd+da)$$

odnosno zbog datog uvjeta $ab+bc+cd+da=1$:

$$\left(a+b+c+d\right)^2 \geq 4\,,$$

slijedi da je

$$a+b+c+d \geq 2\,. \tag{16}$$

Sada iz nejednakosti (15) i (16) dobijamo nejednakost (14), q.e.d.

Vrijedi jednakost u (13) ako i samo ako je $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

Nejednakost 5. Dokazati da za $a,b,c>0$ takve da je $a+b+c=2$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a}{b\left(a+b\right)}+\frac{b}{c\left(b+c\right)}+\frac{c}{a\left(a+c\right)}>2\,. \tag{17}$$

Dokaz: Koristeći $AM-GM$ nejednakost (1) za $n=3$, imamo:

$$\frac{a}{b\left(a+b\right)}+\left(a+b\right)a+ab \geq 3a\,, \tag{18}$$

$$\frac{b}{c\left(b+c\right)}+\left(b+c\right)b+cb \geq 3b\,, \tag{19}$$

$$\frac{c}{a\left(a+c\right)}+\left(a+c\right)c+ac \geq 3c\,, \tag{20}$$

a odavde nakon zbrajanja nejednakosti (18), (19) i (20):

$$\frac{a}{b\left(a+b\right)}+\frac{b}{c\left(b+c\right)}+\frac{c}{a\left(a+c\right)} \geq 3\left(a+b+c\right)-\left(a+b+c\right)^2\,,$$

odnosno zbog uvjeta $a+b+c=2$:

$$\frac{a}{b\left(a+b\right)}+\frac{b}{c\left(b+c\right)}+\frac{c}{a\left(a+c\right)}>2\,,\text{ q.e.d.}$$

Ovdje vrijedi stroga nejednakost jer npr. u nejednakosti (18) vrijedi jednakost ako je

$$\left(a+b\right)a=ab\left(=\frac{a}{b\left(a+b\right)}\right)\Rightarrow a=0\,,$$

što ne može biti zbog uvjeta da su $a,b,c>0$.

Nejednakost 6. Dokazati da za $a,b,c>0$ tave da je $abc=1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^3}{\left(1+b\right)\left(1+c\right)}+\frac{b^3}{\left(1+a\right)\left(1+c\right)}+\frac{c^3}{\left(1+a\right)\left(1+b\right)} \geq \frac{3}{4}\,. \tag{21}$$

Dokaz: Na osnovu $AM-GM$ nejednakosti (1) za $n=3$, imamo:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\geq\frac{3a}{4},$$

te analogno

$$\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+c}{8}\geq\frac{3b}{4},$$

$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{1+a}{8}+\frac{1+b}{8}\geq\frac{3c}{4},$$

a odavde nakon zbrajanja gornjih nejednakosti

$$\sum_{cyclic}\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{3+a+b+c}{4}\geq\frac{3}{4}(a+b+c),$$

odnosno

$$\sum_{cyclic}\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}. \tag{22}$$

Kako je na osnovu $AM-MG$ nejednakosti za $n=2$ i datog uvjeta $abc=1$:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\text{, tj.}$$

$$a+b+c\geq 3, \tag{23}$$

to dobijamo iz nejednakost (22) i (23):

$$\sum_{cyclic}\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}\geq\frac{3}{4}\text{, q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (21) ako i samo ako je $a=b=c=1$.

Nejednakost 7. Dokazati da za $a,b\geq 0$ tako da je $a+b=1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{1+b}+\frac{b^2}{1+a}\geq\frac{1}{3}. \tag{24}$$

Dokaz: Na osnovu $AM-GM$ nejednakosti za $n=2$, imamo:

$$\frac{a^2}{b+1}+\frac{b+1}{9}\geq\frac{2a}{3},$$

$$\frac{b^2}{1+a}+\frac{a+1}{9}\geq\frac{2b}{3},$$

a odavde nakon zbrajanja gornjih nejednakosti:

$$\frac{a^2}{b+1}+\frac{b^2}{1+a}+\frac{a+b+2}{9}\geq\frac{2}{3}(a+b),$$

odnosno zbog datog uvjeta $a+b=1$:

$$\frac{a^2}{b+1}+\frac{b^2}{1+a}+\frac{1}{3}\geq\frac{2}{3}, \text{ tj.}$$

$$\frac{a^2}{b+1}+\frac{b^2}{1+a}\geq\frac{1}{3}, \text{ q.e.d.}$$

Vrijedi jednakost u (24) ako i samo ako je $a=b=\frac{1}{2}$.

Napomena 2. Svakako sve dokazane nejednakosti se mogu dokazati i na neki drugi način. To bih preporučio budućim čitateljima ovog rada da pokušaju uraditi. No, siguran sam da će ti dokazi biti teži i složeniji nego dokazi dati u ovom radu. Ovim želim istaći značaj date metode pomoću $AM-GM$ nejednakosti koju smo obilato koristili u ovom radu.

LITERATURA

[1] **Arslanagić, Š.**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.

[2] **Cvetkovski, Z.**, *Inequalities – Theorems Techniques and Selected Problems*, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 2012.