Dokazi s pomoću popločavanja

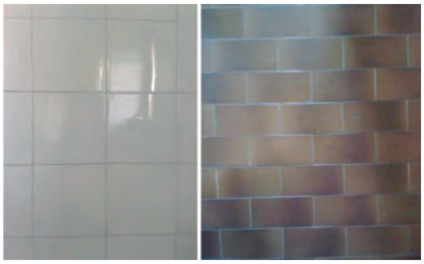
Lucija Šer, Zagreb

Uvod

Promotrimo li malo svijet oko sebe, uočit ćemo da se matematika pojavljuje svugdje oko nas. Izađemo li na ulicu i pogledamo li u tlo, uočit ćemo različite geometrijske likove. Šetajući gradom tako uočavamo raznovrsna rješenja u popločavanju ulica.

Slika 1. Primjeri raznovrsnih popločavanja ulica

Uočimo da raznovrsna popločavanja ravnih površina možemo vidjeti i u našim domovima, na primjer, u našim kuhinjama ili našim kupanicama (slika 2).



Slika 2. Primjeri popločavanja u našem domu

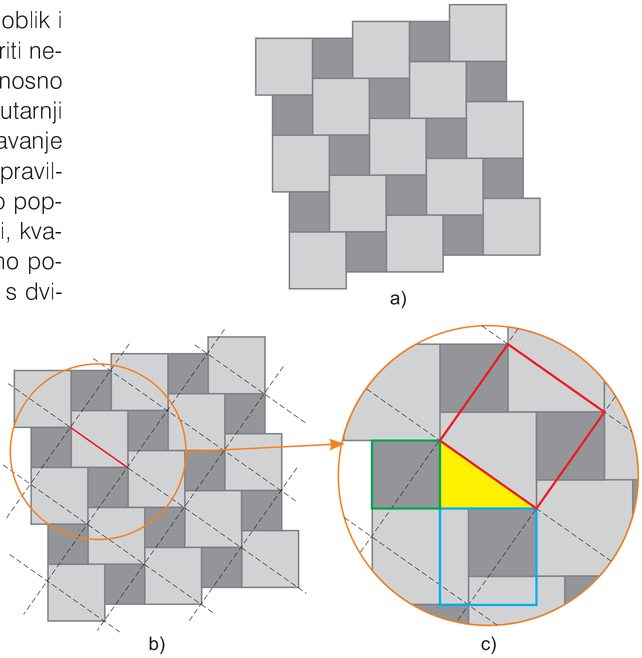
Stoljećima su nam mnogi majstori i umjetnici prikazivali različita popločavanja ravnina u svojim djelima. Majstori su koristili pločice za popločavanje podova i zidova zbog njihove izdržljivosti, vodootpornosti i ljepote, a umjetnici su različita popločavanja slikali na svojim slikama u kojima su prikazivali različite scene iz života.

Slika 3. Johannes Vermeer: *Djevojka s čašom vina*, 1660. (izvornik: `http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jan_Vermeer_van_Delft_006.jpg`; *public domain*).

Proučavajući takva različita popločavanja, možemo se pitati kakve pločice možemo koristiti pri popločavanju neke ravne površine kako bi ona bila potpuno pokrivena. Upravo je problem prekrivanja ravnine nekim ravninskim likovima matematički problem kojeg zovemo još i problem parketiranja ili popločavanja. Popločavanje ravnine ili problem parketiranja drevni je problem koji možemo naći kod starih Egipćana, Perzijanaca, Grka, Rimljana, a također u Kini, Japanu te drugim starim civilizacijama. Problem parketiranja sastoji se u tome kako razdijeliti ravninu na mnogokute koji bi je u potpunosti prekrivali, bez praznina i preklapanja,

Lucija Šer, PMF – Matematika, smjer nastavnički, diplomski studij, 4. godina

uz određene pravilnosti s obzirom na vrstu, oblik i poredak mnogokuta. Ravninu možemo pokriti nekim sukladnim pravilnim mnogokutima, odnosno mnogokutima kojima su sve stranice i svi unutarnji kutevi međusobno sukladni. Takvo popločavanje zovemo pravilnim popločavanjem, a jedini pravilni mnogokuti kojima možemo provesti takvo popločavanje ravnine su jednakostranični trokuti, kvadrati te pravilni šesterokuti. Ravninu možemo popločiti i s dvjema vrstama pločica, odnosno s dvije ili više vrsta pravilnih mnogokuta tako da se oko svakog vrha nižu istim redom. Takvo popločavanje ravnine zove se polupravilno ili Arhimedovo popločavanje. Dakako, ravninu možemo pokriti mnogokutima tako da to popločavanje nije niti pravilno, niti polupravilno. Štoviše, možemo popločavati ravninu i pločicama koje nisu mnogokuti, no bez ikakvih uvjeta i ograničenja postojalo bi bezbroj rješenja za takva popločavanja. Proučimo li neka od gore navedenih vrta popločavanja, moći ćemo uočiti da pomoću njih možemo dokazati neke poznate (ali i one manje poznate) matematičke teoreme.



Slika 4. Popločavanje kvadratima

Pitagorin poučak

S pojmom “Pitagorin poučak” susreli smo se još u osnovnoj školi. Tada smo naučili da u pravokutnom trokutu vrijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

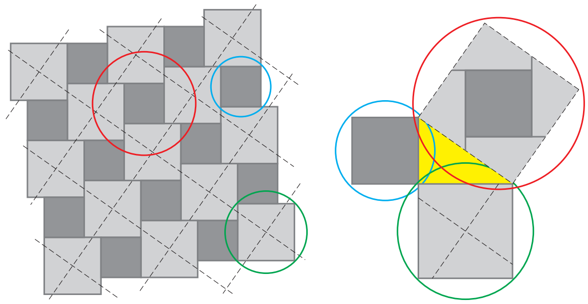
pri čemu je c duljina hipotenuze, a a i b duljine kateta. Odnosno, ako nad stranicama pravokutnog trkuta nacrtamo kvadrate, vrijedit će da je zbroj površina kvadrata nad katetama jednak površini kvadrata nad hipotenuzom.

Postoji više od 100 geometrijskih i algebarskih dokaza Pitagorina poučka, a pomoću popločavanja ravnine možemo pokazati dokaz ovog poučka s pomoću rastavljanja i preslagivanja.

Proučimo popločavanje ravnine kvadratima dvjema različitih veličina (slika 4(a)).

Prekrijmo tako popločanu ravninu mrežom sukladnih kvadrata kako je prikazano na slici 4(b). Uočimo da je stranica kvadrata koji pripada toj mreži hipotenuza pravokutnog trokuta čije su katete stranice kvadrata pomoću kojih smo popločili ravninu (svjetlosivi i tamnosivi kvadratići). Proučimo sada kvadrate koji su nacrtani nad stranicama tog pravokutnog trokuta (žuti trokut na slici 4(c)). Uočimo da rastavljanjem i preslagivanjem kvadrata nacrtanih nad katetama pravokutnog trokuta možemo dobiti kvadrat sukladan kvadratu nacrtanom nad hipotenuzom tog prvokutnog trokuta (slika 4(c)). Tako smo pokazali da je zbroj površina kvadrata nad katetama jednak površini kvadrata nad hipotenuzom. Ovaj dokaz Pitagorina teorema pripisujemo Annairiziju iz Arabije (oko 900.).

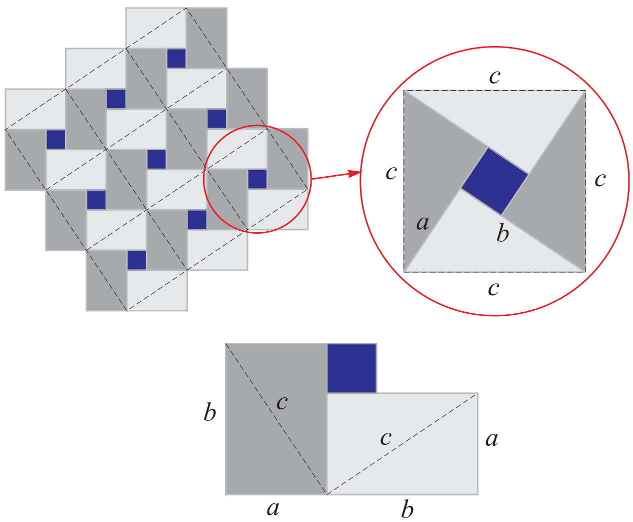
Translatiramo li mrežu sa slike 4(b) tako da se vrhovi kvadrata te mreže podudaraju sa središtima većih kvadrata (svjetlosivi kvadrati) pomoću kojih smo popločavali ravninu, dobit ćemo još jedan dokaz Pitagorina poučka s pomoću rastavljanja i preslagivanja kojeg pripisujemo Henryu Perigalu. Ponovo promatramo pravokutni trokut kojemu je duljina hipotenuze jednaka duljini stranice kvadrata iz mreže i kojemu su katete stranice kvadrata pomoću kojih smo popločili ravninu (svjetlosivi i tamnosivi kvadratići). Uočimo da rastavljanjem i preslagivanjem kvadrata nacrtanih nad katetama tog pravokutnog trokuta možemo dobiti kvadrat sukladan kvadratu nacrtanom nad hipotenuzom tog prvokutnog trokuta (slika 5.). Tako smo ponovo pokazali da je zbroj površina kvadrata nad katetama jednak površini kvadrata nad hipotenuzom.



Slika 5.

Pitagorin poučak možemo dokazati i pomoću drugačijih poločavanja ravnine. Bhāskara je sljedeći dokaz Pitagorina teorema prikazao u 12.st., a opisao ga je riječju “Vidi” koju je zapisao uz sliku. Kako bismo prikazali taj dokaz, promotrimo popločavanje ravnine kvadratima i pravokutnicima kako je prikazano na slici 6(a). Prekrijmo tako popločanu ravninu mrežom kvadrata čije su stranice dijagonale pravokutnika kojima smo popločali ravninu (slika 6(b)).

Označimo duljinu stranice kvadrata iz mreže slovom c, a duljine stranica pravokutnika kojima smo popločili ravninu slovima a i b. Proučimo sada kvadrat kojemu je duljina stranice jednaka c. Uočimo da taj kvadrat možemo presložiti u pravokutnike i kvadrat kako je prikazano na slici 7.



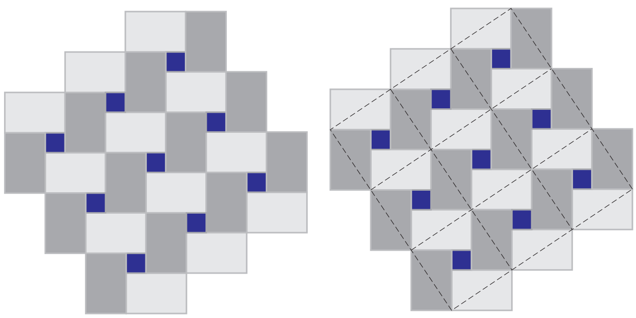
Slika 7.

Dakle, kvadrat površine c^2 možemo presložiti u dva pravokutnika čija je površina jednaka ab te u kvadrat čija je duljina stranice jednaka $b - a$, odnosno čija je površina jednaka $(b-a)^2$.

Dakle,

$$\begin{aligned}
c^2 &= ab + ab + (b-a)^2,\\
c^2 &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2,\\
c^2 &= a^2 + b^2.
\end{aligned}$$

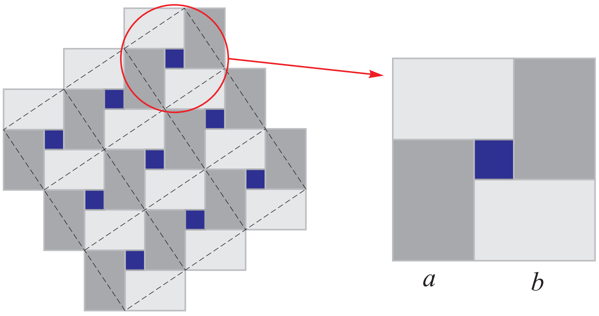
Popločavanje pravokutnicima različitih dimenzija



a) b)

Slika 6.

U prethodnom primjeru vidjeli smo kako ravninu možemo popločiti kvadratima i pravokutnicima kako je prikazano na slici 6(a). Osim Pitagorina poučka, pomoću takvog popločavanja možemo pokazati i neke druge matematičke tvrdnje. Prije svega, prisjetimo se pojmova aritmetičke sredine i geometrijske sredine. Aritmetička sredina je srednja vrijednost nekog skupa od n brojeva koja se dobiva dijeljenjem njihova zbroja s brojem n, a geometrijska sredina jednaka je n-tom korijenu umnoška n pozitivnih brojeva. Za dva broja a i b aritmetička sredina jednaka je izrazu $\frac{a+b}{2}$, a geometrijska sredina $\sqrt[2]{ab}$. Promotrimo sliku 8.



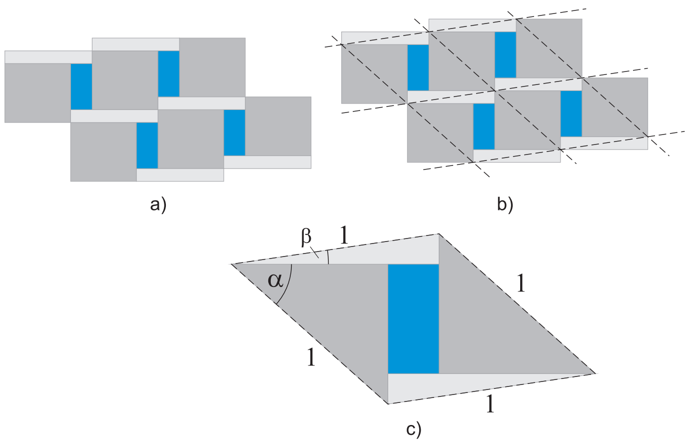
Slika 8.

Uočimo da prikazani kvadrat ima stranicu duljine $a+b$ te da se sastoji od 4 pravokutnika čije su stranice duljine a i b i malog plavog kvadrata. Proučavajući sliku, uočavamo da je $4ab \leq (a+b)^2$ (jednakost vrijedi kada je $a=b$), odnosno:

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}, \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Ovime smo pokazali nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju brojeva a i b.

Popločajmo sada ravninu koristeći tri različita pravokutnika takva da je dvama pravokutnicima duljina dijagonale jednaka 1, odnosno onako kako je prikazano na slici 9(a).



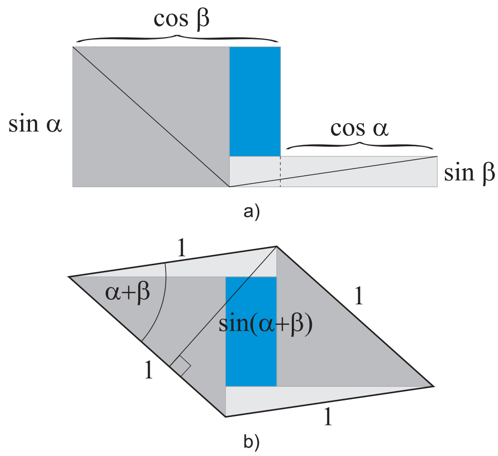
Slika 9.

Prekrijmo tako popločanu ravninu mrežom rombova kojima je duljina stranice jednaka 1 (slika 9(b)). Prisjetimo se što nam vrijedi za pravokutni trokut:

$$\text{sinus kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\text{kosinus kuta} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}.$$

Primijenimo to na trokute od kojih se sastoji romb na slici 9(c) i presložimo dijelove od kojih se sastoji (slika 10(a)).



Slika 10.

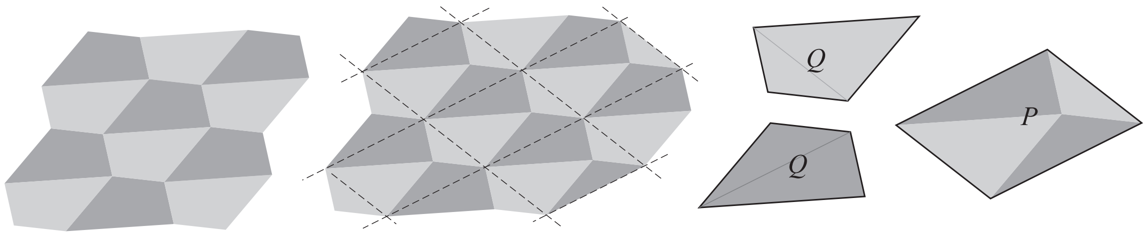
Površina romba jednaka je umnošku duljine stranice i duljine na nju okomite visine pa je površina romba prikazanog na gornjim slikama jednaka $1 \cdot \sin(\alpha+\beta)$ (slika 10(b)). S druge strane, površinu geometrijskog lika sa slike 10(a) možemo zapisati i kao $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

Tako zaključujemo da je

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

Popločavanje ravnine proizvoljnim četverokutima

Osim pravokutnicima i kvadratima, ravninu možemo popločiti nekim općenitim, proizvoljnim četverokutima,



a) b) c)

Slika 11.

koji mogu biti konkavni ili konveksni. Primjer takvog popločavanja možemo vidjeti na slici 11(a).

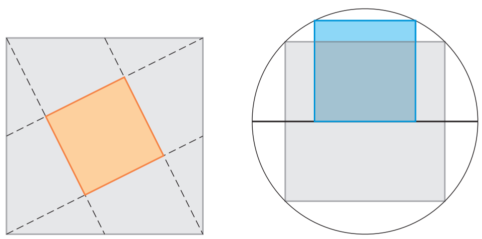
Prekrijmo tako popločanu ravninu paralelogramima čije stranice su paralelne i jednakih duljina kao i dijagonale četverokuta kojima smo popločili ravninu (slika 11(b)). Površinu tih paralelograma označimo slovom P, a površinu četverokuta kojim smo prekrivali ravninu slovom Q. Promatrajući tu popločanu ravninu i mrežu paralelograma, uočavamo da je $P = 2Q$ (slika 11(c)).

Na kraju napomenimo kako gore navedeni primjeri dokaza pomoću popločavanja ravnine nisu jedini primjeri dokaza matematičkih teorema pomoću popločavanja. Pomoću popločavanja, na primjer, možemo dokazati i formulu:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Osim toga, pomoću popločavanja ,možemo dokazati i sljedeća dva teorema:

Teorem 1. *Ako nacrtamo 4 dužine takve da je svakoj od tih dužina jedna krajnja točka vrh kvadrata, a druga polovište susjedne stranice kvadrata, kako je prikazano na slici 12(a), onda je površina manjeg kvadrata koji nastaje konstruiranjem tih dužina jednaka petini površine početnog kvadrata.*



a) b)

Slika 12.

Teorem 2. *Površina kvadrata upisanog polukrugu jednaka je $\frac{2}{5}$ površine kvadrata upisanog krugu istog radijusa (slika 12(b)).*

Bez sumnje, možemo zaključiti kako proučavajući popločavanja ravnih površina, možemo vidjeti mnoge ljepote matematike, uključujući razne teoreme i njihove dokaze.

LITERATURA

1/ B. Dakić (2014.): *Matematičar u Zagrebu*, Element, Zagreb.

2/ K. Krulić (2005.): *Popločavanje ravnine i njihova primjena u nastavi matematike osnovnoj i srednjoj školi : diplomski rad*, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu.

3/ R. Nelsen i A. Claudi (2006.): *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*, Mathematical Association of America.

4/ T. Nemeth, D. Stajčić i Z. Šikić (2013.): *Matematika 8, udžbenik i zbirka zadataka za osmi razred osnovne škole*, Profil, Zagreb.

5/ A Chronicle of Mathematical People: `http://www.robertnowlan.com/pdfs/Bhaskara.pdf`

6/ Wharton Statistics Department: `http://www-stat.wharton.upenn.edu/~steele/Publications/Books/CSMC/New%20Problems/paintings.pdf`

7/ Wikipedia: `https://bs.wikipedia.org/wiki/Po%C4%8Detna_strana`