JOŠ JEDAN DOKAZ PITAGORINOG POUČKA

Mladen Halapa, *Bjelovar*

Znani nam poučak o hipotenuzi i katetama pravokutnog trokuta i Pitagorin teorem može se izvesti i na sljedeći način.

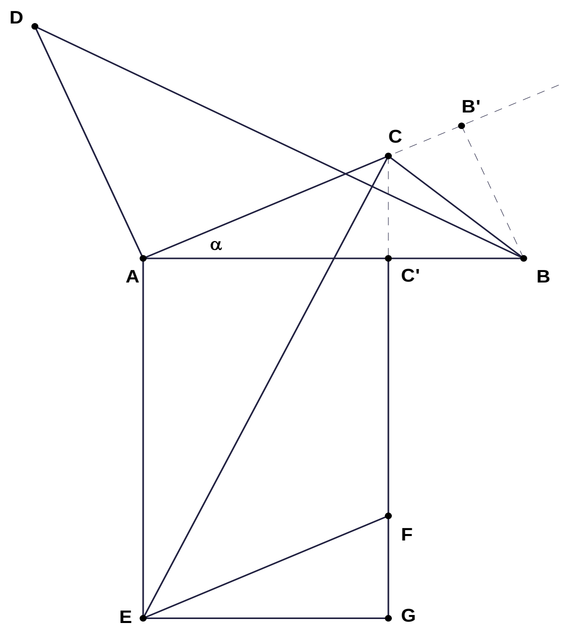
Lema. Dvije stranice trokuta projiciraju se ortogonalno jedna na drugu. Svaka od ovih stranica i projekcija druge na nju, stranice su pravokutnika. Tada su površine ova dva pravokutnika jednake.

Dokaz. Zadan je ΔABC. Neka je $\overline{AB'}$ projekcija stranice $\overline{AB}$ na AC, a $\overline{AC'}$ projekcija stranice $\overline{AC}$ na AB. Konstruiramo točke D i E tako da vrijedi:

$$AD \perp AC, \quad |\mathrm{AD}| = |AC| \;\text{ i }\; \mathrm{AE} \perp \mathrm{AB}, \quad |\mathrm{AE}| = |AB|.$$

Uočimo trokute *ABD* i *AEC.* Oni su sukladni (podudaraju se u dvije stranice i kutu među njima), pa za njihove površine vrijedi:

$$P_{AEC} = P_{ABD}. \qquad (1)$$



Pokažimo još da je površina ΔAEC jednaka polovini površine pravokutnika čije su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{\mathrm{AC}'}$. Na zraci CC' odredimo točke F i G tako da je

$$|AE| = |CF| \;\text{ i }\; |\mathrm{AE}| = |C'G|.$$

Trokuti $AC'C$ i EGF su sukladni i zato može pisati:

$$P_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot P_{AEFC} = \frac{1}{2} \cdot P_{AEGC'} = \frac{1}{2} \cdot \left| AB \right| \cdot \left| AC' \right| .$$

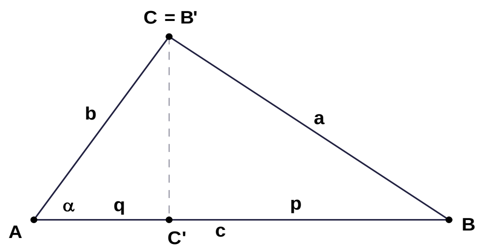
Slično se dokazuje

$$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \left| AC \right| \cdot \left| AB' \right| .$$

Zbog (1) slijedi

$$\left| AB \right| \cdot \left| AC' \right| = \left| AC \right| \cdot \left| AB' \right| . \qquad (2)$$

Primijenimo dokazanu tvrdnju (2) na pravokutni trokut.



$$\left| AC' \right| = q, \quad \left| C'B \right| = p, \quad q + p = c.$$

Prvo promatrajmo katetu *b* i hipotenuzu *c*.

$$\left| AB \right| = c, \quad \left| AC' \right| = q, \quad \left| AC \right| = b, \quad \left| AB' \right| = b.$$

Zbog (2) slijedi

$$c \cdot q = b^2. \qquad (3)$$

Analogno vrijedi za katetu *a* i hipotenuzu *c*:

$$c \cdot p = a^2. \qquad (4)$$

Zbroj (3) i (4) daje poznati poučak:

$$cq + cp = b^2 + a^2 \quad => \quad c^2 = a^2 + b^2.$$