Egipatski razlomci

Predrag Lončar[1]

Uvod

Egipćani su prikazivali sve razlomke, osim jednog, $\frac{2}{3}$, kao sumu tzv. jediničnih razlomaka, tj. razlomaka oblika $\frac{1}{n}$, koji su morali biti međusobno različiti. Taj način zapisivanja razlomka zove se *egipatski razlomak*. U širem smislu pod egipatskim razlomkom podrazumijeva se zapis razlomka kao sume jediničnih razlomaka, od kojih se neki mogu ponavljati.

Egipatski razlomci pojavili su se u srednjem egipatskom kraljevstvu, poboljšavajući brojni sustav oko božanstva Horusa, koji potječe još iz starog egipatskog kraljevstva. Iz ranog razdoblja o egipatskim razlomcima postoji pet tekstova, od kojih je nama najpoznatiji Moskovski papirus, a iz kasnijeg razdoblja, Rhindov papirus iz 1650. god. p.n.e., koji daje poboljšani način pisanja egipatskih razlomaka i opsežne tablice za rastav $\frac{2}{n}$ na jedinične razlomke s neparnim nazivnicima između 5 i 101. Rindov papirus napisao je Ahmes, tadašnji vodeći matematički autoritet.

U srednjem vijeku egipatske razlomke koristio je, i za njih dao algoritam, talijanski matematičar Fibonacci (Leonardo iz Pise) u svojoj knjizi Liber Abaci (1202.), da bi potkraj 19. stoljeća Fibonaccijev algoritam preotkrio engleski matematičar J. J. Sylvester. Stoga ćemo taj algoritam za egipatske razlomke zvati Fibonacci-Sylvesterov algoritam. U zapadnom svijetu egipatski razlomci bili su omiljena tema istraživanja amatera pa i uglednih profesora, kao npr. G. Hardya, M. N. Bleichera, P. Erdösa i R. L. Grahama. Napravljeni su razni algoritmi za egipatske razlomke i istraživana je njihova složenost, napose prilikom provedbe na računalu. Upoznajmo neke od tih algoritama.

Fibonacci-Sylvesterov algoritam

Kako prikazati pravi razlomak $\frac{a}{b}$ u obliku egipatskog razlomka? Da je to moguće za svaki neskrativi razlomak $\frac{a}{b}$ garantira čuveni Fibonacci-Sylvesterov algoritam. Opišimo ga za pravi neskrativi razlomak $\frac{a}{b}$ gdje je $1 < a < b$ i $\operatorname{nzm}(a, b) = 1$. Prvo napravimo

[1] Autor je viši predavač na Geodetskom fakultetu u Varaždinu, e-pošta: `ploncar@gfv.hr`

recipročnu vrijednost tog razlomka $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$. Neka je $b = aq + r$, pri čemu je r ostatak prilikom dijeljenja b s a, dakle $1 \leq r < a$. Odavde je $a(q+1) = b + (a-r)$, odnosno dijeljenjem s $b(q+1)$,

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q+1} + \frac{a-r}{b(q+1)} \tag{1}$$

Uočimo da je $1 \leq a-r < a$, tj. brojnik drugog sumanda $\frac{a-r}{b(q+1)}$ u rastavu (1) manji je od brojnika od $\frac{a}{b}$. Sada primjenjujemo istu opisanu shemu na pravi razlomak $\frac{a-r}{b(q+1)}$, pa potom na onaj koji je u njegovom rastavu oblika (1) itd. Vidimo da se u prvom, pa onda i u svakom koraku algoritma brojnik smanjuje. Stoga u konačno koraka, točnije u manje od a koraka, moramo dobiti egipatski rastav za $\frac{a}{b}$. Dakle Fibonacci-Sylvesterov algoritam daje uvijek konačan niz jediničnih razlomaka kao sumanada.

Nađimo npr. egipatski razlomak od $\frac{8}{77}$. Kako je $77 = 9 \cdot 8 + 5$, odnosno $8 \cdot 10 = 77 + (8-5)$, vrijedi $\frac{8}{77} = \frac{1}{10} + \frac{3}{77 \cdot 10}$. Sada $770 = 3 \cdot 256 + 2$, tj. $3 \cdot 257 = 770 + 1$, pa je $\frac{3}{770} = \frac{1}{257} + \frac{1}{770 \cdot 257}$. Time smo dobili

$$\frac{8}{77} = \frac{1}{10} + \frac{1}{257} + \frac{1}{197\,890}.$$

Zadatak 1. *Neka je n neparan broj, $n = 2k-1$. Pokažite da Fibonacci-Sylvesterov algoritam za $\frac{2}{n}$ daje dvočlani rastav*

$$\frac{2}{2k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(2k-1)}. \tag{2}$$

Postoje razne modifikacije Fibonacci-Sylvesterovog algoritma. Ako u svakom koraku uzimamo prvi veći parni broj, imamo tzv. parnu modifikaciju Fibonacci-Sylvesterovog algoritma, za kojeg se zna da uvijek daje konačni rastav. Postoji i teža varijanta Fibonacci-Sylvesterovog algoritma, i to da u nazivniku budu samo neparni brojevi. Postupak tog algoritma teče kao kod Fibonacci-Sylvesterovog algoritma, jedino se u svakom koraku bira prvi veći neparni broj. Do danas je otvoren problem da li takva varijanta Fibonacci-Sylvesterovog algoritma uvijek daje konačan niz sumanada, ili se može desiti, za neke razlomke, da algoritam nikada ne stane i daje beskonačan niz sumanada. U praksi su ipak svi razlomci rastavljeni po neparnom algoritmu na konačno sumanada. Pokažimo neparni Fibonacci-Sylvesterov algoritam na primjeru $\frac{2}{3}$. Kako je $\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$, prvi neparni broj veći od $\frac{3}{2}$ je 3. To daje $\frac{1}{3}$ kao prvi pribrojnik i razliku $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Na isti način je $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$, a prvi veći neparni broj je 5. Dakle drugi je pribrojnik $\frac{1}{5}$ i razlika $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$. Prvi veći neparni broj od $\frac{15}{2}$ je 9, a

$\frac{2}{15} - \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$. Tu algoritam staje, dobili smo rastav: $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{45}$. Sam Fibonacci-Sylvesterov algoritam daje $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$. Iz tog primjera vidimo da egipatski zapis razlomka ne mora biti jedinstven. U stvari svaki razlomak posjeduje beskonačno mnogo različitih egipatskih zapisa.

Fareyev algoritam

Pokažimo sada kako se egipatski rastav dobiva pomoću Fareyevog algoritma i Fareyevih razlomaka. Englez J. Farey (1766.–1826.) je 1816. otkrio ove razlomke i naslutio neka njihova svojstva, koja je potom dokazao A. Cauchy.

Definicija 1. *Fareyevim nizom F_n naziva se skup neskrativih razlomaka $\frac{a}{b}$ s nazivnikom b, $b \leq n$, koji leže u intervalu $[0, 1]$ i pobrojani su u rastućem slijedu.*

Evo tablice Fareyevih razlomaka, od F_1 do F_5, pri čemu je niz F_1 zapisan u prvom retku donje tablice, niz F_2 u drugom, itd.

F_1	$\frac{0}{1}$										$\frac{1}{1}$
F_2	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{2}$					$\frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

U tablici su jednaki razlomci zapisani jedan ispod drugog. Ova tablica dobiva se tzv. Fareyevim procesom. To znači da kada prelazimo iz poznatog nam n-tog nivoa u nepoznati $(n+1)$-vi nivo, trebamo gledati samo one susjedne neskrative razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ za koje je $b+d \leq n+1$. Ta dva susjeda u n-tom nivou, valja u $(n+1)$-vom razdvojiti, stavljajući između njih tzv. medijanu – razlomak $\frac{a+c}{b+d}$ za koji vrijedi $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, i koji se također zapiše u neskrativom obliku. Ostale susjedne razlomke n-tog nivoa samo prepišemo u $(n+1)$-vi. U to se možemo uvjeriti gledajući gornju tablicu Fareyevih brojeva.

Svojstva Fareyevih razlomaka dobro su istražena. Poznato je da ako je $\frac{a}{b} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_m}$ Fareyev rastav neskrativog razlomka $\frac{a}{b}$, tada je $m \leq a$ i $r_m \leq b(b-1)$. Izvrstan prikaz tog i drugih svojstava Fareyevih i egipatskih razlomaka može se naći u milenijskom izdanju knjige [5, Fareyevi razlomci str. 416–421, i egipatski razlomci str. 421–435]. No manje je poznato da Fareyevi razlomci imaju vezu s egipatskim. Opišimo Fareyev algoritam baziran na Fareyevim razlomcima (Bleicher

1968). Pokažimo to na primjeru neskrativog razlomka $\frac{4}{5}$. U tu svrhu nađimo $\frac{4}{5}$ u gornjoj tablici, u F_5 jer je nazivnik 5, i pogledajmo u F_5 prvi razlomak manji od njega, to je $\frac{3}{4}$. Produkt nazivnika tih dvaju razlomaka je $5 \cdot 4 = 20$, pa je $\frac{1}{20}$ prvi sumand u egipatskom zapisu od $\frac{4}{5}$. Nađimo u gornjoj tablici $\frac{3}{4}$, jasno sada u nizu F_4 jer je nazivnik 4 i jer se $\frac{3}{4}$ prvi put pojavljuje na toj razini. Pogledajmo njegov prvi lijevi susjed u istom retku, jasno u F_4, to je $\frac{2}{3}$. Produkt nazivnika od $\frac{3}{4}$ i $\frac{2}{3}$ je $4 \cdot 3 = 12$, pa je $\frac{1}{12}$ drugi sumand u rastavu od $\frac{4}{5}$. Nađimo sada $\frac{2}{3}$ u F_3 i njegov prvi lijevi susjed, tj. $\frac{1}{2}$, kako je $3 \cdot 2 = 6$, sljedeći sumand je $\frac{1}{6}$. Konačno nađemo u Fareyevoj tablici $\frac{1}{2}$ u F_2, prvi njegov lijevi prethodnik je $\frac{0}{1}$. Produkt nazivnika je $2 \cdot 1 = 2$ i $\frac{1}{2}$ je zadnji sumand, jer je $\frac{0}{1}$ na lijevom rubu tablice. Imamo rastav

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Interesantno je da Fibonacci-Sylvesterov algoritam ovdje daje kraći rastav

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}.$$

Isto se dobiva i grupiranjem članova u rastavu (3), ako uočimo da je $\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$. Na internetu postoji također web stranica [2] s više *kalkulatora za egipatske razlomke*, koje možemo koristiti da dobijemo egipatske rastave po danom broju sumanada, s najmanje njih, s gornjom ogradom za nazivnike i tome slično.

Zadatak 2. *Pomoću Fareyevih razlomaka nađimo egipatski rastav za* $\frac{21}{23}$. *Na internet stranici za Fareyeve razlomke [3] nađeni su, pomoću kalkulatora za Fareyeve razlomke, parovi susjednih najbližih Fareyevih razlomaka:* $\frac{21}{23}$ *i* $\frac{10}{11}$, $\frac{10}{11}$ *i* $\frac{9}{10}$, $\frac{9}{10}$ *i* $\frac{8}{9}$, $\frac{8}{9}$ *i* $\frac{7}{8}$, $\frac{7}{8}$ *i* $\frac{6}{7}$, $\frac{6}{7}$ *i* $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}$ *i* $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{5}$ *i* $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ *i* $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ *i* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ *i* $\frac{0}{1}$. *Odatle slijedi*

$$\frac{21}{23} = \frac{1}{253} + \frac{1}{110} + \frac{1}{90} + \frac{1}{72} + \frac{1}{56} + \frac{1}{42} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}.$$

Potom pokažite da je za egipatski rastav od $\frac{21}{23}$ *potrebno barem pet različitih jediničnih razlomaka. Pokažite da ima* 37 *različitih rastava duljine točno 5. Tri takva rastava su*

$$\begin{aligned}\frac{21}{23} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{23} + \frac{1}{46} + \frac{1}{69} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{23} + \frac{1}{345} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{359} + \frac{1}{644\,046}.\end{aligned}$$

Ostali algoritmi

Fibonacci-Sylvesterov algoritam, njegove modifikacije i Fareyev algoritam nisu jedini za egipatske razlomke. Poslije je otkriveno više od deset novih algoritama za egipatske razlomke (vidi [1]) kao npr.: Erdösov algoritam dan 1950., algoritam Golomba iz 1962., modificirani Fareyev algoritam, binarni algoritam, Tenenbaum-Yokota algoritam i drugi. Profesor Bleicher dao je 1972. algoritam za egipatski rastav razlomka uz pomoć verižnih razlomaka. Oko 1993. L. Beeckmans je dao tzv. splitting algoritam. On se bazira na vještom rastavljanju razlomaka na jedinične razlomke čak i uz ponavljanja, a potom se korištenjem nekih identiteta dobivaju različiti jedinični razlomci kao sumandi. Pokažimo kako taj algoritam funkcionira na primjeru $\frac{3}{5}$:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}&=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)\\&=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right)+\left[\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{42}\right)+\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{930}\right)\right]\end{aligned}$$

pa smo dobili ovaj rastav

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{30}+\frac{1}{31}+\frac{1}{42}+\frac{1}{930}.$$

Pri tome je više puta korišten identitet

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}. \tag{4}$$

Modifikacije splitting algoritma baziraju se na identitetu

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n(n+1)}. \tag{5}$$

Jedan jednostavan algoritam može se dobiti iz sljedeće leme.

Lema 1. *Razlomak* $\frac{a}{b}$ *može se izraziti u obliku*

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_m} \tag{6}$$

$r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_m$, *ako postoje djelitelji* d_1, d_2, $\ldots$, d_m *broja* b *takvi da* a *dijeli* $d_1+d_2+\ldots+d_m$. *U slučaju* $m=2$ *i ako su* a *i* b *relativno prosti, vrijedi i obrat gornje tvrdnje, tj. ako je* $\frac{a}{b}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$, *tada postoje djelitelji* d_1 *i* d_2 *broja* b *takvi da* a *dijeli* d_1+d_2.

Dokaz. Neka postoje djelitelji d_1, d_2, $\ldots$, d_m broja b takvi da vrijedi

$$d_1+d_2+\ldots+d_m=l\cdot a.$$

Tada je

$$\frac{a}{b}=\frac{l\cdot a}{l\cdot b}=\frac{d_1+d_2+\ldots+d_m}{l\cdot b}=\frac{1}{l\cdot\frac{b}{d_1}}+\frac{1}{l\cdot\frac{b}{d_2}}+\ldots+\frac{1}{l\cdot\frac{b}{d_m}}$$

i imamo egipatski zapis. Dokažimo obrat tvrdnje u slučaju $m = 2$. Neka je $\frac{a}{b} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. Neka je $d = \text{nzm}(r_1, r_2)$ i $r_1 = rd$ i $r_2 = sd$ pri čemu su r i s relativno prosti. Sada je
$$\frac{a}{b} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = \frac{r + s}{rsd}.$$
Neka je $M = \text{nzm}(r + s, d)$. Kako su r i s relativno prosti, to su i $r + s$ i rs relativno prosti, pa M dijeli d. Imamo
$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{r+s}{M}}{\frac{rsd}{M}}.$$
Oba razlomka, $\frac{a}{b}$ i $\frac{\frac{r+s}{M}}{\frac{rsd}{M}}$ su neskrativi, pa vrijedi: $a = \frac{r+s}{M}$ i $b = \frac{rsd}{M}$. Uzmimo sada $d_1 = r$ i $d_2 = s$ i $k = M$. Vrijedi: $d_1 + d_2 = ka$ i $d_1 d_2$ dijeli b, pa su d_1 i d_2 djelitelji od b. $\square$

Na temelju ove leme imamo *koristan algoritam* za rastav neskrativog razlomka $\frac{m}{n}$ na egipatske razlomke: proširimo razlomak $\frac{m}{n}$ s nekim zgodno odabranim brojem k, $\frac{a}{b} = \frac{km}{kn}$ i potom $a = km$, ili njegov višekratnik, prikažimo kao zbroj nekih pravih djelitelja broja $b = kn$. Najteže je pronaći broj k s takvim svojstvom. Obično se uzima $k = 2^q$, ili k koji je produkt nekoliko prvih uzastopnih prostih brojeva. Evo jednostavnog primjera. Nađimo rastav na egipatske razlomke za $\frac{5}{7}$. Lemu 1 ne možemo odmah primijeniti, jer 5 ne dijeli zbroj 1+ 7. No, $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$. Djelitelji od 28 su redom 1, 2, 4, 7, 14 i vrijedi $20 = 14 + 4 + 2$. Stoga imamo
$$\frac{5}{7} = \frac{20}{28} = \frac{14+4+2}{28} = \frac{14}{28} + \frac{4}{28} + \frac{2}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}.$$

Neke dopune

Poučak 1. *Za bilo koji prirodan broj n, svi rastavi broja $\frac{1}{n}$ na zbroj dva jedinična razlomka su oblika:*
$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+d} + \frac{1}{n + \frac{n^2}{d}} \tag{7}$$
gdje je d neki djelitelj broja n^2 takav da je $1 \le d \le n$.

Dokaz. Neka je $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, gdje je $a \le b$. Kako je $n < a$ i $n < b$, možemo pisati $a = n + d$ i $b = n + D$, za neke prirodne brojeve d i D, $d \le D$. Lako se provjeri da je $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ekvivalentno s $dD = n^2$. Tada je d djelitelj od n^2 i zbog $d \leq D$ je $1 \leq d \leq n$. Kako je $D = \frac{n^2}{d}$, imamo rastav (7). $\square$

Za $d = 1$ dobivamo relaciju (4), a za $d = n$ imamo rastav $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$. Za primjer, uz pomoć poučka 1, nađimo sve rastave od $\frac{1}{12}$ na dvočlane egipatske razlomke. Kako je $n = 12 = 2^2 \cdot 3$, a $n^2 = 12^2 = 2^4 \cdot 3^2$, za d možemo uzeti $d = 1, 2, 3, 2^2, 2 \cdot 3$, $2^3, 3^2$ i prema tome dobivamo ovih 7 rastava od $\frac{1}{12}$:

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{13} + \frac{1}{156} = \frac{1}{14} + \frac{1}{84} = \frac{1}{15} + \frac{1}{60} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{21} + \frac{1}{28}.$$

Zadatak 3. *Neka su p i q dva različita neparna prosta broja. Uz pomoć poučka 1 nađite sve egipatske dvočlane rastave razlomka $\frac{1}{pq}$.*

U američkoj literaturi o egipatskim razlomcima ekvivalent poučka 1 je ovaj identitet

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a(a+b)c} + \frac{1}{b(a+b)c}$$

pri čemu se n rastavi na tri faktora, $n = abc$, i to tako da su a i b relativno prosti. Pri tome je $d = a^2c$ ili $d = b^2c$.

Pokažimo još kako uz pomoć poučka 1 možemo pronaći sve dvočlane rastave za $\frac{2}{n}$, gdje je n neparan broj. Neka je $\frac{2}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Odatle je $\frac{1}{n} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}$, pa koristeći poučak 1, imamo: $2x = n + d$, $2y = n + \frac{n^2}{d}$, gdje je d neki djelitelj broja n^2 i $1 \leq d \leq n$. Kako su $n + d$ i $n + \frac{n^2}{d}$ parni brojevi, to su x i y cijeli brojevi. Time smo dokazali

Poučak 2. *Neka je n neparan broj. Tada su svi dvočlani egipatski rastavi od $\frac{2}{n}$ oblika*

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+d}{2}} + \frac{1}{\frac{n+\frac{n^2}{d}}{2}} \tag{8}$$

gdje je d neki djelitelj broja n^2 takav da je $1 \leq d \leq n$.

Za $d = 1$ poučak 2 daje rastav (2). Za primjer nađimo sve dvočlane rastave od $\frac{2}{15}$. Kako je $15^2 = 3^2 \cdot 5^2$, za d možemo uzeti $d = 1$, 3, 5, 3^2 i $3 \cdot 5$. Odavde, po poučku 2 imamo rastave:

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120} = \frac{1}{9} + \frac{1}{45} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15}.$$

Neki dodatni rezultati o tročlanom rastavu sadržaj su sljedećih zadataka.

Zadatak 4. *Dokažite, da ako je* n *paran broj, razlomak* $\frac{3}{n}$ *se može napisati kao zbroj dva različita jedinična razlomka.*

Zadatak 5. *Dokažite da ako* n *nije djeljivo s 3, ali je djeljivo s prostim brojem* p *oblika* $p = 6k - 1$, $\frac{3}{n}$ *je jednak zbroju dva različita jedinična razlomka.*

Zadatak 6. *Pokažite da ako su svi prosti brojevi koji dijele neko neparno* n *oblika* $6k + 1$, $\frac{3}{n}$ *se ne može prikazati kao zbroj dva jedinična razlomka, već samo kao zbroj tri jedinična razlomka, npr. po Fibonacci-Sylvesterovom algoritmu. Ovo je rezultat N. Nakayame iz 1940. Uputa: Pretpostavite da takav rastav postoji, pa dokažite da tada* n *ima prosti djelitelj oblika* $6l - 1$, *što je u suprotnosti s pretpostavkom o* n.

Ovdje postoji čuveni rezultat s gotovo elementarnim dokazom od N. Nakayame.

Poučak 3. *Razlomak* $\frac{3}{n}$, *pri čemu* n *nije djeljivo s 3, ima dvočlani rastav ako i samo ako* n *ima djelitelj koji je kongruentan s 2 modulo 3.*

Pokažimo samo dovoljnost uvjeta u poučku 3. Ako je $n = d(3k + 2)$, tada vrijedi ovaj dvočlani rastav od $\frac{3}{n}$

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{d(k+1)} + \frac{1}{n(k+1)}.$$

Evo još nekih tročlanih rastava. Ako je $\frac{a}{b}$ neskrativi razlomak takav da je a djelitelj od $2b + 1$, tada vrijedi

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{(2b+1)}{a}} + \frac{1}{\frac{(2b+1)}{a}} + \frac{1}{\frac{b(2b+1)}{a}}.$$

Ako je $\frac{a}{b}$ neskrativi razlomak takav da je a djelitelj od $2b + 1$ i a neparan broj, tada vrijedi bolji rastav

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{N+1}{2}} + \frac{1}{\frac{N(N+1)}{2}} + \frac{1}{bN},$$

pri čemu je $N = \frac{2b+1}{a}$. Podrobnije o tome koji sve razlomci nemaju dvočlani ili tročlani rastav možete naći u [4].

Mnogi poznati matematičari bavili su se, pored pronalaženja novih algoritama za egipatske razlomke, i *ocjenom duljine egipatskih razlomaka*. Čuvena je i nedokazana *Erdös-Strausova* pretpostavka iz 1948.: za sve $n \geq 4$ razlomak $\frac{4}{n}$ ima egipatski rastav duljine najviše 3 (Fibonacci-Sylvesterov algoritam daje općenito 4 člana u rastavu od $\frac{4}{n}$). Poljski matematičar Waclaw *Sierpinsk*i iznio je 1956. nedokazanu pretpostavku da je broj $\frac{5}{n}$ za sve $n \geq 4$ suma od najviše tri jedinična razlomka. Primijetimo da ako je

m bilo koji prirodni broj, tada za prirodne brojeve n oblika $n = d(mk - 1)$, gdje je k prirodan broj, vrijedi dvočlani rastav

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{kd} + \frac{1}{kn}. \tag{9}$$

Dakle *Erdö-Strausova* pretpostavka vrijedi za brojeve n koji imaju djelitelj oblika $4k-1$, a pretpostavka *Sierpinskog* vrijedi za brojeve n koji imaju djelitelj oblika $5k-1$, što se vidi ako stavimo $m = 4$, odnosno $m = 5$ u rastavu (9).

Recimo da želimo naći *sve* egipatske rastave neskrativog razlomka $\frac{a}{b}$ koji imaju $\leq k$ članova, tj. tražimo $\frac{a}{b} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_k}$ gdje je $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_k$. Imamo $\frac{1}{r_1} \geq \frac{1}{r_2} \geq \ldots \geq \frac{1}{r_k}$, pa odatle $\frac{a}{b} \leq \frac{k}{r_1}$, tj. $r_1 \leq \frac{k}{\frac{a}{b}}$. Dakle možemo sastaviti listu od konačno kandidata za r_1. Za svaki takav r_1 napravimo $\frac{a}{b} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_k}$ i sada pravimo novu konačnu listu kandidata za r_2, koristeći analognu ocjenu $r_2 \leq \frac{k-1}{\frac{a}{b} - \frac{1}{r_1}}$. Postupak se nastavlja za $(k-2)$-člani rastav od $\frac{a}{b} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$ itd. To daje sveukupno konačan broj rješenja od kojih se neka prekinu i prije k-tog koraka, a neka u k-tom koraku otpadnu ako r_k ne bude cijeli broj.

Riješite na taj način i uz pomoć poučka 1 nagradni natječaj br. 200 iz MFL-a godišta LXIII, broj 1/ 249. Uvjerite se da dobijete rješenje objavljeno u MFL-u godišta LXIII, broj 3/ 251, str. 207.

Literatura

[1] DAVID EPPSTEIN, *Egyptian Fractions*, 2007.
`http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/`

[2] `http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html77calc1`

[3] `http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/FareySB.html#sbcalc`

[4] WILLIAM A. WEBB, *Rationals Not Expressible as a Sum of Three Unit Fractions*, Elemente der Mathematik, (1974), Volume 29, 1–6.

[5] A. BECK, M. N. BLEICHER, D. W. CROWE, *Excursions into Mathematics: the Millenium Edition*, AK Peters Ltd., 2000.

[6] VICTOR KLEE, STAN WAGON, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Mathematical Association of America, 1991.