Rastavljanje polinoma na faktore

Distributivnost množenja prema zbrajanju
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c)$
$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c \quad , \quad a\cdot c+b\cdot c=(a+b)\cdot c$
Distributivnost množenja prema oduzimanju
$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c \quad , \quad a\cdot b-a\cdot c=a\cdot(b-c)$
$(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c \quad , \quad a\cdot c-b\cdot c=(a-b)\cdot c$

Navodimo neke slučajeve kako se polinom može rastaviti na faktore, tj. napisati u obliku umnoška.

I.

Svi članovi polinoma imaju zajednički faktor koji izlučimo.

$$n\cdot a+n\cdot b-n\cdot c=n\cdot(a+b-c)$$

- $5\cdot a+5\cdot b-5\cdot c=5\cdot(a+b-c)$
- $12\cdot x+30\cdot y=6\cdot(2\cdot x+5\cdot y)$
- $2\cdot a\cdot b+4\cdot a=2\cdot a\cdot(b+2)$
- $a^2\cdot b+a\cdot b^2=a\cdot b\cdot(a+b)$
- $x^3-x^2=x^2\cdot(x-1)$
- $5\cdot a^3\cdot b-10\cdot a^2\cdot b=5\cdot a^2\cdot b\cdot(a-2)$
- $2\cdot(x+3)+x\cdot(x+3)=(x+3)\cdot(2+x)$
- $(a+2)^3-b\cdot(a+2)^2=(a+2)^2\cdot(a+2-b).$

II.

Polinom se može prikazati kao kvadrat zbroja (kvadrat binoma).

Kvadrat zbroja

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2$$

- $a^2+6\cdot a+9=(a+3)^2$
- $4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2=(2\cdot a+b)^2$
- $9\cdot a^2+30\cdot a\cdot b+25\cdot b^2=(3\cdot a+5\cdot b)^2$
- $a^2+a+\frac{1}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$
- $\frac{1}{4}\cdot a^2+2\cdot a+4=\left(\frac{1}{2}\cdot a+2\right)^2.$

III.

Polinom se može prikazati kao kvadrat razlike (kvadrat binoma).

Kvadrat razlike

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2$$

- $a^2-4\cdot a+4=(a-2)^2$
- $9\cdot a^2-6\cdot a\cdot b+b^2=(3\cdot a-b)^2$
- $16\cdot a^2-24\cdot a\cdot b+9\cdot b^2=(4\cdot a-3\cdot b)^2$
- $a^2-a+\frac{1}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$
- $\frac{1}{9}\cdot a^2-2\cdot a+9=\left(\frac{1}{3}\cdot a-3\right)^2$.

IV.

Polinom ima zajednički faktor koji najprije izlučimo i onda uporabimo formulu za kvadrat zbroja (kvadrat binoma).

Kvadrat zbroja

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2$$

$$n\cdot a^2+2\cdot n\cdot a\cdot b+n\cdot b^2=n\cdot\left(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\right)=n\cdot(a+b)^2$$

- $5\cdot a^2+10\cdot a+5=5\cdot\left(a^2+2\cdot a+1\right)=5\cdot(a+1)^2$
- $x^3+4\cdot x^2+4\cdot x=x\cdot\left(x^2+4\cdot x+4\right)=x\cdot(x+2)^2$
- $8\cdot a^3+8\cdot a^2\cdot b+2\cdot a\cdot b^2=2\cdot a\cdot\left(4\cdot a^2+4\cdot a\cdot b+b^2\right)=2\cdot a\cdot(2\cdot a+b)^2$
- $2\cdot x^4+2\cdot x^3+\frac{1}{2}\cdot x^2=2\cdot x^2\cdot\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)=2\cdot x^2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

V.

Polinom ima zajednički faktor koji najprije izlučimo i onda uporabimo formulu za kvadrat razlike (kvadrat binoma).

Kvadrat razlike

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2$$

$$n\cdot a^2-2\cdot n\cdot a\cdot b+n\cdot b^2=n\cdot\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)=n\cdot(a-b)^2$$

- $3\cdot a^2-6\cdot a+3=3\cdot\left(a^2-2\cdot a+1\right)=3\cdot(a-1)^2$

- $x^3-6\cdot x^2+9\cdot x=x\cdot\left(x^2-6\cdot x+9\right)=x\cdot(x-3)^2$
- $27\cdot a^3-18\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2=3\cdot a\cdot\left(9\cdot a^2-6\cdot a\cdot b+b^2\right)=3\cdot a\cdot(3\cdot a-b)^2$
- $18\cdot x^4-4\cdot x^3+\frac{2}{9}\cdot x^2=2\cdot x^2\cdot\left(9\cdot x^2-2\cdot x+\frac{1}{9}\right)=2\cdot x^2\cdot\left(3\cdot x-\frac{1}{3}\right)^2$.

VI.

Polinom se može prikazati u obliku razlike kvadrata.

Razlika kvadrata

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$$

- $a^2-4\cdot b^2=(a-2\cdot b)\cdot(a+2\cdot b)$
- $9\cdot a^2-25\cdot b^2=(3\cdot a-5\cdot b)\cdot(3\cdot a+5\cdot b)$
- $\frac{1}{4}\cdot x^2-9\cdot y^2=\left(\frac{1}{2}\cdot x-3\cdot y\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x+3\cdot y\right)$
- $(a+b)^2-4=(a+b-2)\cdot(a+b+2)$
- $(a+b)^2-(c+d)^2=((a+b)-(c+d))\cdot((a+b)+(c+d))=(a+b-c-d)\cdot(a+b+c+d)$

VII.

Polinom ima zajednički faktor koji najprije izlučimo i onda uporabimo formulu za razliku kvadrata.

Razlika kvadrata

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$$

$$n\cdot a^2-n\cdot b^2=n\cdot\left(a^2-b^2\right)=n\cdot(a-b)\cdot(a+b)$$

- $2\cdot a^2-18\cdot b^2=2\cdot\left(a^2-9\cdot b^2\right)=2\cdot(a-3\cdot b)\cdot(a+3\cdot b)$
- $4\cdot a^3-a\cdot b^2=a\cdot\left(4\cdot a^2-b^2\right)=a\cdot(2\cdot a-b)\cdot(2\cdot a+b)$
- $\frac{2}{9}\cdot x^3-8\cdot x=2\cdot x\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot x^2-4\right)=2\cdot x\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x+2\right)$
- $2\cdot a^3\cdot b-2\cdot a\cdot b=2\cdot a\cdot b\cdot\left(a^2-1\right)=2\cdot a\cdot b\cdot(a-1)\cdot(a+1)$

VIII.

Polinom se može prikazati kao kub zbroja (kub binoma).

Kub zbroja

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\quad,\quad a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3=(a+b)^3$$

- $x^3+3\cdot x^2+3\cdot x+1=(x+1)^3$
- $8\cdot x^3+60\cdot x^2+150\cdot x+125=(2\cdot x+5)^3$
- $8\cdot m^3+12\cdot m^2+6\cdot m+1=(2\cdot m+1)^3$
- $8\cdot a^3\cdot b^3+36\cdot a^2\cdot b^2\cdot c+54\cdot a\cdot b\cdot c^2+27\cdot c^3=(2\cdot a\cdot b+3\cdot c)^3$

IX.

Polinom se može prikazati kao kub razlike (kub binoma).

Kub razlike

$$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3 \quad , \quad a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3=(a-b)^3$$

- $b^3-3\cdot b^2+3\cdot b-1=(b-1)^3$
- $8\cdot a^3-60\cdot a^2+150\cdot a-125=(2\cdot a-5)^3$
- $27\cdot x^3-27\cdot x^2\cdot y+9\cdot x\cdot y^2-y^3=(3\cdot x-y)^3$
- $a^3-6\cdot a^2\cdot b+12\cdot a\cdot b^2-8\cdot b^3=(a-2\cdot b)^3$

X.

Polinom ima zajednički faktor koji najprije izlučimo i onda uporabimo formulu za kub zbroja.

Kub zbroja

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3 \quad , \quad a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3=(a+b)^3$$

$$n\cdot a^3+3\cdot n\cdot a^2\cdot b+3\cdot n\cdot a\cdot b^2+n\cdot b^3=n\cdot\left(a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\right)=n\cdot(a+b)^3$$

- $2\cdot x^3+6\cdot x^2+6\cdot x+2=2\cdot\left(x^3+3\cdot x^2+3\cdot x+1\right)=2\cdot(x+1)^3$
- $24\cdot x^3+180\cdot x^2+450\cdot x+375=3\cdot\left(8\cdot x^3+60\cdot x^2+150\cdot x+125\right)=3\cdot(2\cdot x+5)^3$
- $32\cdot m^3+48\cdot m^2+24\cdot m+4=4\cdot\left(8\cdot m^3+12\cdot m^2+6\cdot m+1\right)=4\cdot(2\cdot m+1)^3$

XI.

Polinom ima zajednički faktor koji najprije izlučimo i onda uporabimo formulu za kub razlike.

Kub razlike

$$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3 \quad , \quad a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3=(a-b)^3$$

$$n\cdot a^3-3\cdot n\cdot a^2\cdot b+3\cdot n\cdot a\cdot b^2-n\cdot b^3=n\cdot\left(a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3\right)=n\cdot(a-b)^3$$

- $5\cdot a^3-15\cdot a^2+15\cdot a-5=5\cdot\left(a^3-3\cdot a^2+3\cdot a-1\right)=5\cdot(a-1)^3$

- $16 \cdot a^3 - 120 \cdot a^2 + 300 \cdot a - 250 = 2 \cdot \left(8 \cdot a^3 - 60 \cdot a^2 + 150 \cdot a - 125\right) = 2 \cdot (2 \cdot a - 5)^3$
- $54 \cdot x^3 - 54 \cdot x^2 \cdot y + 18 \cdot x \cdot y^2 - 2 \cdot y^3 = 2 \cdot \left(27 \cdot x^3 - 27 \cdot x^2 \cdot y + 9 \cdot x \cdot y^2 - y^3\right) = 2 \cdot (3 \cdot x - y)^3$
- $6 \cdot a^3 - 36 \cdot a^2 \cdot b + 72 \cdot a \cdot b^2 - 48 \cdot b^3 = 6 \cdot \left(a^3 - 6 \cdot a^2 \cdot b + 12 \cdot a \cdot b^2 - 8 \cdot b^3\right) = 6 \cdot (a - 2 \cdot b)^3$

XII.

Polinom se može prikazati kao zbroj kubova.

Zbroj kubova

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \left(a^2 - a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad (a+b) \cdot \left(a^2 - a \cdot b + b^2\right) = a^3 + b^3$$

- $a^3 + 8 = (a+2) \cdot \left(a^2 - 2 \cdot a + 4\right)$
- $8 \cdot a^3 + 27 = (2 \cdot a + 3) \cdot \left(4 \cdot a^2 - 6 \cdot a + 9\right)$
- $x^3 + 1 = (x+1) \cdot \left(x^2 - x + 1\right)$
- $a^6 + b^6 = \left(a^2\right)^3 + \left(b^2\right)^3 = \left(a^2 + b^2\right) \cdot \left(a^4 - a^2 \cdot b^2 + b^4\right)$

XIII.

Polinom se može prikazati kao razlika kubova.

Razlika kubova

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) = a^3 - b^3$$

- $z^3 - 1 = (z-1) \cdot \left(z^2 + z + 1\right)$
- $8 \cdot x^3 - 27 = (2 \cdot x - 3) \cdot \left(4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 9\right)$
- $\frac{1}{8} \cdot a^3 - 1 = \left(\frac{1}{2} \cdot a - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot a + 1\right)$
- $z^6 - 1 = \left(z^2\right)^3 - 1 = \left(z^2 - 1\right) \cdot \left(z^4 + z^2 + 1\right) = (z-1) \cdot (z+1) \cdot \left(z^4 + z^2 + 1\right)$

XIV.

Polinom ima zajednički faktor koji najprije izlučimo i onda uporabimo formulu za zbroj kubova.

Zbroj kubova

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \left(a^2 - a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad (a+b) \cdot \left(a^2 - a \cdot b + b^2\right) = a^3 + b^3$$

$$n \cdot a^3 + n \cdot b^3 = n \cdot \left(a^3 + b^3\right) = n \cdot (a+b) \cdot \left(a^2 - a \cdot b + b^2\right)$$

- $3 \cdot a^3 + 24 = 3 \cdot \left(a^3 + 8\right) = 3 \cdot (a+2) \cdot \left(a^2 - 2 \cdot a + 4\right)$
- $40 \cdot a^3 + 135 = 5 \cdot \left(8 \cdot a^3 + 27\right) = 5 \cdot (2 \cdot a + 3) \cdot \left(4 \cdot a^2 - 6 \cdot a + 9\right)$
- $\frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(x^3 + 1\right) = \frac{1}{3} \cdot (x+1) \cdot \left(x^2 - x + 1\right)$
- $2 \cdot a^6 + 2 \cdot b^6 = 2 \cdot \left(a^6 + b^6\right) = 2 \cdot \left(\left(a^2\right)^3 + \left(b^2\right)^3\right) = 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) \cdot \left(a^4 - a^2 \cdot b^2 + b^4\right)$

XV.

Polinom ima zajednički faktor koji najprije izlučimo i onda uporabimo formulu za razliku kubova.

Razlika kubova

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) = a^3 - b^3$$

$$n \cdot a^3 - n \cdot b^3 = n \cdot \left(a^3 - b^3\right) = n \cdot (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right)$$

- $7 \cdot n^3 - 7 = 7 \cdot \left(n^3 - 1\right) = 7 \cdot (n-1) \cdot \left(n^2 + n + 1\right)$
- $16 \cdot x^3 - 54 = 2 \cdot \left(8 \cdot x^3 - 27\right) = 2 \cdot (2 \cdot x - 3) \cdot \left(4 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 9\right)$
- $\frac{3}{8} \cdot a^3 - 3 = 3 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot a^3 - 1\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{2} \cdot a + 1\right)$
- $4 \cdot z^6 - 4 = 4 \cdot \left(z^6 - 1\right) = 4 \cdot \left(\left(z^2\right)^3 - 1\right) = 4 \cdot \left(z^2 - 1\right) \cdot \left(z^4 + z^2 + 1\right) =$
  $= 4 \cdot (z-1) \cdot (z+1) \cdot \left(z^4 + z^2 + 1\right)$

XVI.

Polinomu, prije rastavljanja na faktore, neki postojeći član prikažemo kao zbroj ili razliku dvaju članova i onda ih pokušamo grupirati.

- $a^2 + 5 \cdot a + 6 = a^2 + 3 \cdot a + 2 \cdot a + 6 = \left(a^2 + 3 \cdot a\right) + (2 \cdot a + 6) =$
  $= a \cdot (a+3) + 2 \cdot (a+3) = (a+3) \cdot (a+2)$
- $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2 \cdot x^2 - x^2 + 1 = x^4 + 2 \cdot x^2 + 1 - x^2 = \left(x^4 + 2 \cdot x^2 + 1\right) - x^2 =$
  $= \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2 = \left(x^2 + 1 - x\right) \cdot \left(x^2 + 1 + x\right) = \left(x^2 - x + 1\right) \cdot \left(x^2 + x + 1\right)$

- $$a^{2}-a-6=a^{2}-3\cdot a+2\cdot a-6=\left(a^{2}-3\cdot a\right)+(2\cdot a-6)=$$
$$=a\cdot(a-3)+2\cdot(a-3)=(a-3)\cdot(a+2)$$
- $$2\cdot y^{2}+5\cdot y+2=2\cdot y^{2}+4\cdot y+y+2=\left(2\cdot y^{2}+4\cdot y\right)+(y+2)=$$
$$=2\cdot y\cdot(y+2)+(y+2)=(y+2)\cdot(2\cdot y+1)$$

XVII.

Polinomu, prije rastavljanja na faktore, dodamo i oduzmemo neki novi član i onda članove pokušamo grupirati ili uporabiti neku od formula.

- $$a^{4}+4=a^{4}+4+4\cdot a^{2}-4\cdot a^{2}=a^{4}+4\cdot a^{2}+4-4\cdot a^{2}=\left(a^{4}+4\cdot a^{2}+4\right)-4\cdot a^{2}=$$
$$=\left(a^{2}+2\right)^{2}-(2\cdot a)^{2}=\left(a^{2}+2-2\cdot a\right)\cdot\left(a^{2}+2+2\cdot a\right)=\left(a^{2}-2\cdot a+2\right)\cdot\left(a^{2}+2\cdot a+2\right)$$
- $$x^{4}+1=x^{4}+1+2\cdot x^{2}-2\cdot x^{2}=x^{4}+2\cdot x^{2}+1-2\cdot x^{2}=\left(x^{4}+2\cdot x^{2}+1\right)-2\cdot x^{2}=$$
$$=\left(x^{2}+1\right)^{2}-\left(x\cdot\sqrt{2}\right)^{2}=\left(x^{2}+1-x\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(x^{2}+1+x\cdot\sqrt{2}\right)=$$
$$=\left(x^{2}-x\cdot\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(x^{2}+x\cdot\sqrt{2}+1\right)$$

XVIII.

Polinom ima članove od kojih samo neki imaju zajednički faktor. Tada ih pokušamo grupirati.

- $$a\cdot x-a\cdot y+b\cdot x-b\cdot y=(a\cdot x-a\cdot y)+(b\cdot x-b\cdot y)=$$
$$=a\cdot(x-y)+b\cdot(x-y)=(x-y)\cdot(a+b)$$
- $$a^{2}\cdot b-a\cdot b+a-1=\left(a^{2}\cdot b-a\cdot b\right)+(a-1)=$$
$$=a\cdot b\cdot(a-1)+(a-1)=(a-1)\cdot(a\cdot b+1)$$
- $$a\cdot c-a\cdot d+b\cdot d-b\cdot c=(a\cdot c-a\cdot d)+(b\cdot d-b\cdot c)=$$
$$=a\cdot(c-d)-b\cdot(c-d)=(c-d)\cdot(a-b)$$
- $$a^{2}+5\cdot a-b^{2}-5\cdot b=a^{2}-b^{2}+5\cdot a-5\cdot b=\left(a^{2}-b^{2}\right)+(5\cdot a-5\cdot b)=$$
$$=(a-b)\cdot(a+b)+5\cdot(a-b)=(a-b)\cdot(a+b+5)$$