O obračunu kamata i kredita

Zlatko Erjavec[1], Dražen Malić[2]

Sažetak

U članku su pojašnjene vrste obračuna kamata te otplata kredita jednakim anuitetima krajem razdoblja uz primjenu složenog dekurzivnog obračuna kamata.

Uvod

Svakodnevno se u medijima susrećemo s pojmom kredita, a da pri tome možda nismo svjesni računa koji povezuje posuđeni iznos i iznose koje ćemo kasnije vraćati. U ovom članku želimo pojasniti na koji način se izračunava rata kod otplate kredita jednakim anuitetima. No, najprije ćemo ponoviti osnovne pojmove obračuna kamata i kredita, a zatim ćemo izvesti formulu koja povezuje anuitet i iznos kredita. Na kraju ćemo prikazati primjer gotovinskog kredita jedne naše poslovne banke.

Vrste obračuna kamata

Kada netko (kreditor) nekome (dužniku) posudi novac (glavnicu), osim što očekuje da mu ga vrati, očekuje da mu isplati i naknadu za posuđeni novac (kamatu). Kolika će kamata biti ovisi o iznosu glavnice, o vremenskom roku posudbe, o "cijeni" posudbe (kamatnoj stopi) i o vrsti obračuna kamate.

Kao što je vjerojatno čitateljima poznato, razlikujemo dekurzivni i anticipativni te jednostavni i složeni obračun kamata. Razlika između dekurzivnog i anticipativnog obračuna kamata leži u činjenici da kod dekurzivnog obračuna kamate pribrajamo glavnici na kraju razdoblja ukamaćivanja, a kod anticipativnog obračuna kamate oduzimamo od glavnice na početku razdoblja ukamaćivanja.

Dakle, ako posudimo 100 novčanih jedinica uz dekurzivnu godišnju kamatnu stopu p, tada ćemo na kraju godine morati vratiti $100 + p$ novčanih jedinica. U slučaju da smo posudili 100 novčanih jedinica uz anticipativnu godišnju kamatnu stopu q, tada ćemo na početku godine oduzeti kamate i raspolagati s iznosom $100 - q$, a na kraju godine morati vratiti 100 novčanih jedinica.

[1]Docent Fakulteta organizacije i informatike, e-pošta: zlatko.erjavec@foi.hr
[2]Student Fakulteta organizacije i informatike, e-pošta: drazen.malic@foi.hr

Razlika između jednostavnog i složenog obračuna kamata leži u činjenici da se kod jednostavnog obračuna kamate računaju uvijek na isti iznos glavnice te su jednake za svako razdoblje ukamaćivanja, dok se kod složenog obračuna kamate računaju na glavnicu iz prethodnog razdoblja i u svakom razdoblju su veće nego u prethodnom. Drugim riječima kod složenog kamatnog računa, kamate računamo ne samo na glavnicu nego i na prethodno obračunate kamate.

O jednostavnom i složenom kamatnom računu već je bilo riječi na stranicama ovog časopisa prije nekoliko godina (vidi [3] i [4]).

Jednostavni dekurzivni obračun kamata

Kod jednostavnog dekurzivnog kamatnog računa iznos kamata za svako razdoblje ukamaćivanja bit će jednak, a kamate ćemo glavnici pribrojiti na kraju zadnjeg perioda ukamaćivanja.

Iznos kamata I na glavnicu C_0 za godinu dana, uz godišnju kamatnu stopu p, dan je formulom:

$$I = C_0 \cdot \frac{p}{100}.$$

Konačna vrijednost glavnice nakon n godina jednaka je sumi njezine sadašnje vrijednosti C_0 i ukupnih kamata I_{uk},

$$\mathbf{C_n = C_0 + I_{uk}}.$$

(Ova relacija vrijedi uvijek, bez obzira na vrstu obračuna kamata!)

Nadalje, obzirom da su kod jednostavnog kamatnog računa kamate za svako razdoblje jednake imamo

$$C_n = C_0 + n \cdot I,$$

odnosno konačno,

$$\mathbf{C_n = C_0\Big(1 + \frac{p \cdot n}{100}\Big)}.$$

Primjer 1. Ako netko posudi 1000,00 kuna na tri godine uz godišnju kamatnu stopu 8 i jednostavni dekurzivni obračun kamata, nakon isteka tog razdoblja morat će vratiti

$$C_3 = 1000,00\ \left(1 + \frac{8 \cdot 3}{100}\right) = 1240,00 \text{ kuna}.$$

Napomena: Primijetite da iako bi u svakodnevnom govoru rekli da je kamatna stopa "8 posto", u primjeru navodimo samo broj 8. Riječ je o tome da izvedena formula za konačnu vrijednost glavnice već ima "ugrađeno" djeljenje s brojem sto, pa bi uvrštavanjem broja 8% tj. $0,08$ dobili pogrešan rezultat.

Jednostavni anticipativni obračun kamata

Kao što smo spomenuli ranije, kod anticipativnog obračuna, kamate računamo u odnosu na glavnicu zadnjeg razdoblja C_n, pri čemu su godišnje kamate I uz anticipativnu godišnju kamatnu stopu q jednake

$$I = C_n \cdot \frac{q}{100}.$$

Obzirom da su zbog jednostavnog obračuna, kamate u svakoj godini jednake, ukupan iznos kamata nakon n godina je

$$I_{uk} = C_n \cdot \frac{q \cdot n}{100}.$$

Uvrstimo li to u ranije poznatu formulu $C_n = C_0 + I_{uk}$ nakon kratkog izvoda dobijemo,

$$\mathbf{C_n = C_0 \cdot \frac{100}{100 - q \cdot n}}.$$

Primjer 2. Ako netko posudi 1000,00 kuna na tri godine uz godišnju kamatnu stopu 8 i jednostavni anticipativni obračun kamata, nakon isteka tog razdoblja morat će vratiti

$$C_3 = 1000,00 \cdot \frac{100}{100 - 8 \cdot 3} = 1315,79 \text{ kuna.}$$

Složeni dekurzivni obračun kamata

Obzirom da se kod složenog dekurzivnog kamatnog računa, kamate u nekom razdoblju računaju na glavnicu iz prethodnog razdoblja, vrijednosti glavnica tijekom prve tri godine kapitalizacije su

$$\begin{aligned}
\mathbf{C_1} &= C_0 + I_1 = C_0 + C_0\frac{p}{100} = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \mathbf{C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^1},\\
\mathbf{C_2} &= C_1 + I_2 = C_1 + C_1\frac{p}{100} = C_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \mathbf{C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2},\\
\mathbf{C_3} &= C_2 + I_3 = C_2 + C_2\frac{p}{100} = C_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \mathbf{C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3}.
\end{aligned}$$

Induktivnim zaključivanjem dolazimo do formule za konačnu vrijednost glavnice nakon n godina

$$\mathbf{C_n = C_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}. \tag{1}$$

Primjer 3. Ako netko posudi 1000,00 kuna na tri godine uz godišnju kamatnu stopu 8 i složeni dekurzivni obračun kamata, nakon isteka tog razdoblja morat će vratiti

$$C_3 = 1000,00 \ \left(1 + \frac{8}{100}\right)^3 = 1259,71 \text{ kuna.}$$

Napomena: Uobičajeno je izraz $1+\frac{p}{100}$ označiti s r (dekurzivni kamatni faktor) te u tom slučaju formula (1) poprimi kraću formu

$$\mathbf{C_n = C_0 \cdot r^n}. \tag{2}$$

Nadalje, ukoliko nam je poznat konačni iznos, a pitamo se kolika bi glavnica ukamaćivanjem dosegla taj iznos, tada tu početnu vrijednost još nazivamo **diskontiranom** vrijednošću glavnice i računamo po formuli

$$C_0 = \frac{C_n}{r^n}.$$

Ukoliko bi se kamate obračunavale u kraćim intervalima od godine (npr. mjesecima), godišnju bi kamatnu stopu pretvorili u odgovarajuću ispodgodišnju konformnu ili pak relativnu kamatnu stopu. Više o ispodgodišnjem ukamaćivanju, relativnoj i konformnoj kamatnoj stopi možete naći u udžbenicima [1], [2], [5] i [6].

Složeni anticipativni obračun kamata

Kao što smo već naglasili, kod anticipativnog obračuna kamata, kamate se obračunavaju na početku razdoblja ukamaćivanja u odnosu na glavnicu s kraja tog razdoblja. Uz složeni obračun kamata, za vrijednosti glavnice tijekom prve tri godine dobijemo

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + I_1 = C_0 + C_1\frac{q}{100} &&\Rightarrow\quad C_1 = C_0\frac{100}{100-q} = C_0\left(\frac{100}{100-q}\right)^1,\\
C_2 &= C_1 + I_2 = C_1 + C_2\frac{q}{100} &&\Rightarrow\quad C_2 = C_1\frac{100}{100-q} = C_0\left(\frac{100}{100-q}\right)^2,\\
C_3 &= C_2 + I_3 = C_2 + C_3\frac{q}{100} &&\Rightarrow\quad C_3 = C_2\frac{100}{100-q} = C_0\left(\frac{100}{100-q}\right)^3.
\end{aligned}$$

Induktivnim zaključivanjem dolazimo do formule za konačnu vrijednost glavnice nakon n godina

$$\mathbf{C_n = C_0\left(\frac{100}{100-q}\right)^n}.$$

Primjer 4. Ako netko posudi 1000,00 kuna na tri godine uz godišnju kamatnu stopu 8 i složeni anticipativni obračun kamata, nakon isteka tog razdoblja morat će vratiti

$$C_3 = 1000,00 \cdot \left(\frac{100}{100-8}\right)^3 = 1284,21 \text{ kuna}.$$

Zadatak: Obratite pažnju na konačne vrijednosti glavnica iz sva četiri primjera i međusobno ih usporedite! Uz koji obračun kamata moramo platiti najveće kamate?

Otplata kredita jednakim anuitetima

O kreditu

Kredit (lat.čredare = povjeriti, uzdati se, vjerovati) je novac koji kreditor daje na korištenje korisniku kredita (dužniku), a koji se dužnik obvezuje vratiti u određenom roku uz dogovorenu kamatu. Dužnik vraća odobreni iznos kredita otplatama koje se nazivaju **anuiteti** (obročne rate). Najčešći način otplate kredita je jednakim anuitetima, tj. dužnik svakog vremenskog intervala (mjeseca, kvartala, godine) vraća kreditoru jednake iznose novca (anuitete).

Iako bi kod izračuna anuiteta mogli koristiti bilo koji od ranije navedenih obračuna kamata, kod naših je poslovnih banaka najzastupljeniji izračun anuiteta uz primjenu složenog dekurzivnog kamatnog računa i proporcionalno (relativno) ukamaćivanje. Za detalje o ostalim vrstama obračuna kredita, zainteresirane čitatelje upućujemo na udžbenike [1], [2], [5] i [6].

Otplata kredita jedakim anuitetima

U ovom ćemo dijelu prvo izvesti formulu koja povezuje iznos kredita i obročne rate kod otplate kredita jednakim anuitetima krajem razdoblja. Polazna točka tog izvoda je **princip ekvivalencije kapitala**. Princip ekvivalencije kapitala govori o tome da u nekom trenutku, vrijednost svih isplata kreditora mora biti jednaka vrijednosti svih uplata dužnika, uzimajući u obzir određeni kamatni račun.

U našem slučaju izjednačavamo sadašnju vrijednost iznosa kredita sa sadašnjim vrijednostima svih uplata dužnika, pri čemu kod izračunavanja sadašnjih vrijednosti uplata dužnika koristimo složeni dekurzivni kamatni račun, odnosno ranije spomenutu diskontiranu vrijednost glavnice i formulu

$$C_0 = \frac{C_n}{r^n}.$$

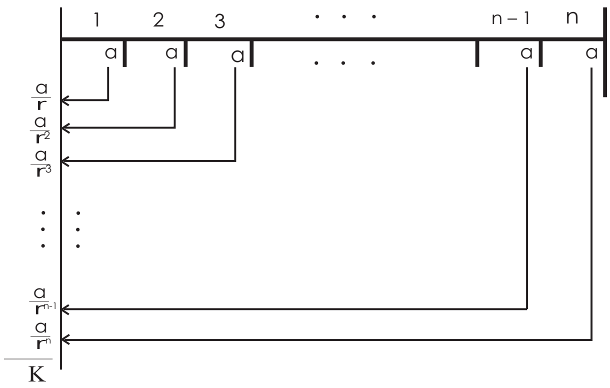
Princip ekvivalencije kapitala u slučaju otplate kredita jednakim anuitetima prikazan je na slici 1.

Izjednačimo li sadašnju vrijednost isplate (iznos kredita) i sadašnje vrijednosti anuiteta, dobijemo

$$\begin{aligned} K &= \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + ... + \frac{a}{r^{n-1}} + \frac{a}{r^n} \\ &= \frac{a}{r}\left(1 + \frac{1}{r} + ... + \frac{1}{r^{n-2}} + \frac{1}{r^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Izraz u zagradi predstavlja sumu prvih n članova geometrijskog niza kod kojeg je $a_1 = 1,\ q = \frac{1}{r}$ pa primjenom formule za sumu

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$



Slika 1: Diskontirani iznosi anuiteta

dobijemo relaciju koja povezuje iznos kredita i anuiteta,

$$\mathbf{K} = \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{r^n - 1}}{\mathbf{r^n \cdot (r - 1)}}. \tag{3}$$

Iz navedene formule imamo,

$$\mathbf{a} = \mathbf{K} \cdot \frac{\mathbf{r^n \cdot (r - 1)}}{\mathbf{r^n - 1}}. \tag{4}$$

Na kraju pogledajmo stvarni primjer gotovinskog kredita jedne naše poslovne banke.

Primjer 5. Poslovna banka je odobrila gotovinski kredit visine 10000,00 eura na 5 godina uz otplatu mjesečnim anuitetima, nominalnu godišnju kamatnu stopu $9,30$ te naknadu za obradu kreditnog zahtjeva u iznosu od 2% visine kredita.

Izračunajmo visinu naknade za obradu kreditnog zahtjeva te anuitet.

Naknada za obradu kreditnog zahtjeva je 2% od 10000,00, dakle 200,00 eura. Naknada se obično plaća iz sredstava kredita, tako da u stvarnosti od banke dobijemo 9800, a ne 10000 eura.

Nadalje, izračunajmo anuitet

$$\begin{array}{l}
K = 10000,00 \\
n = 5 \cdot 12 = 60 \\
p = 9,30 \;\Rightarrow\; p_{mj} = \frac{9,30}{12} = 0,775 \;\Rightarrow\; r = 1 + \frac{0,775}{100} = 1,00775 \\
\hline
a = ?
\end{array}$$

Uvrstimo li prikazane podatke u formulu (4), dobijemo

$$a = 10000 \cdot \frac{1,00775^{60} \cdot (1,00775 - 1)}{1,00775^{60} - 1} = 209,043.$$

U stvarnom bi slučaju svi anuiteti koje uplaćujemo (osim zadnjeg) bili zaokruženi na cent više i iznosili bi 209,05 eura, dok bi zadnji anuitet bio nešto manji (u konkretnom slučaju 208,49).

Literatura

[1] V. Erceg, *Metode gospodarskog računa*, Element, Zagreb, 2004.

[2] B. Divjak, Z. Erjavec, *Financijska matematika*, TIVA - FOI, Varaždin, 2007.

[3] E. Pavić, B. Šego, *Jednostavni kamatni račun*, Matematičko-fizički list (**225**), 2006, 15-25.

[4] E. Pavić, B. Šego, *Složeni kamatni račun*, Matematičko-fizički list (**226**), 2006, 94-97.

[5] K. Šorić, *Matematika 3*, Udžbenik za ekonomske škole, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

[6] B. Šego, *Financijska matematika*, Zgombić i partneri, Zagreb, 2008.