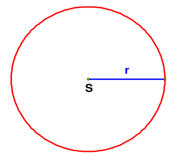
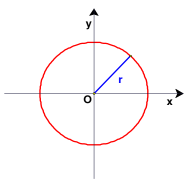
KRUŽNICA (m©h)

kružnica



kružnica je skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od jedne čvrste točke te iste ravnine
središte S nije točka kružnice
r – polumjer (radijus)

središnja jednadžba kružnice



jednadžba kružnice sa središtem u ishodištu O(0, 0) i polumjerom r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

jednadžba tangente u točki $D(x_1, y_1)$ kružnice $x^2 + y^2 = r^2$

$$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = r^2$$

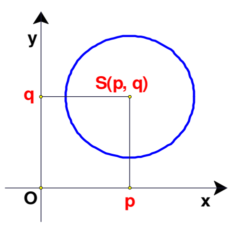
uvjet da je pravac $y = k \cdot x + l$ tangenta kružnice $x^2 + y^2 = r^2$

$$r^2 \cdot (1 + k^2) = l^2$$

točka D u kojoj tangenta dira kružnicu zove se diralište

koordinate dirališta $D\left(\frac{-k \cdot l}{1+k^2}, \frac{l}{1+k^2}\right)$

opća jednadžba kružnice sa središtem S(p, q) i polumjerom r



$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \text{ ili}$$
$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + c = 0$$
$$c = p^2 + q^2 - r^2$$
$$r^2 = p^2 + q^2 - c$$

jednadžba tangente u točki $D(x_1, y_1)$ kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$

$$(x_1 - p) \cdot (x - p) + (y_1 - q) \cdot (y - q) = r^2$$

jednadžba normale u točki $D(x_1, y_1)$ kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$

$$y - y_1 = \frac{y_1 - q}{x_1 - p} \cdot (x - x_1)$$

uvjet da je pravac $y = k \cdot x + l$ tangenta kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$

$$r^2 \cdot (1 + k^2) = (q - k \cdot p - l)^2$$

presjek pravca i kružnice

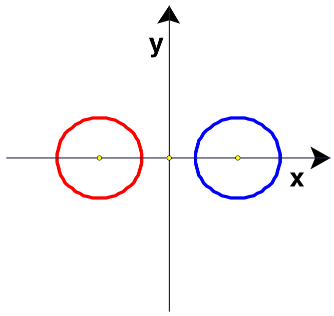
traže se njihove zajedničke točke (ako postoje)
treba riješiti sustav jednadžbi

$$\left.\begin{matrix} Ax + By + C = 0 \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{matrix}\text{iz jednadžbe pravca izrazimo y (ili x)} \\ \text{i uvrstimo ga u jednadžbu kružnice}\end{matrix}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{matrix}\text{nakon sređivanja dobijemo} \\ \text{kvadratnu jednadžbu}\end{matrix}\right):$$

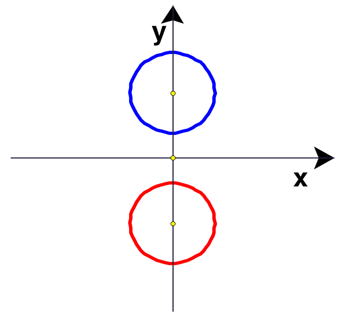
- ako jednadžba ima dva realna rješenja, onda pravac siječe kružnicu u dvije točke
- ako jednadžba ima dvostruko realno rješenje, onda je pravac tangenta
- ako jednadžba ima konjugirano kompleksna rješenja, onda se pravac i kružnica ne sijeku

posebni položaji kružnice u koordinatnom sustavu



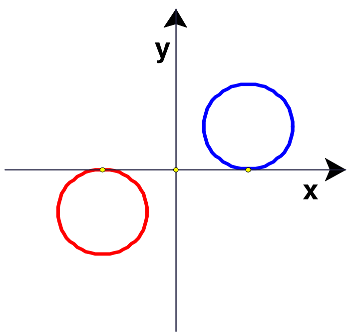
središte kružnice je na osi x

$q=0 \Rightarrow (x-p)^2+y^2=r^2$



središte kružnice je na osi y

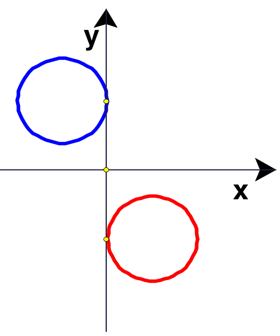
$p=0 \Rightarrow x^2+(y-q)^2=r^2$



kružnica dira os x,

$q=-r$ ili $q=r$

$(x-p)^2+(y\pm r)^2=r^2$

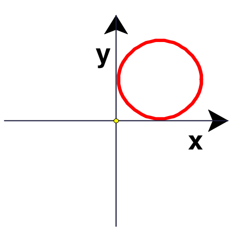


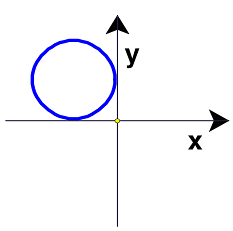
kružnica dira os y,

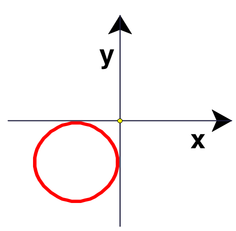
$p=-r$ ili $p=r$

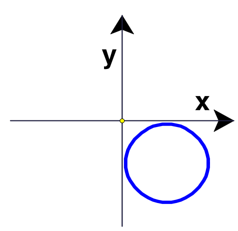
$(x\pm r)^2+(y-q)^2=r^2$

kružnica dodiruje obje koordinatne osi









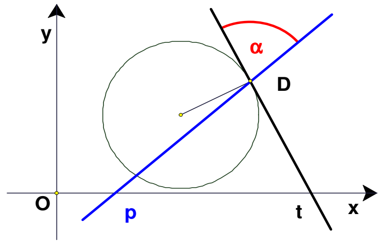
I. kvadrant $\Rightarrow p=q=r \Rightarrow (x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

II. kvadrant $\Rightarrow p=-r\ ,\ q=r \Rightarrow (x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

III. kvadrant $\Rightarrow p=q=-r \Rightarrow (x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

IV. kvadrant $\Rightarrow p=r\ ,\ q=-r \Rightarrow (x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

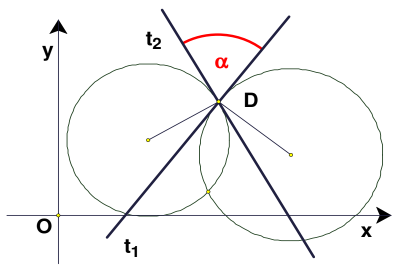
kut pravca i kružnice



kut pravca i kružnice definira se kao kut pravca i tangente kružnice u točki njihovog presjeka

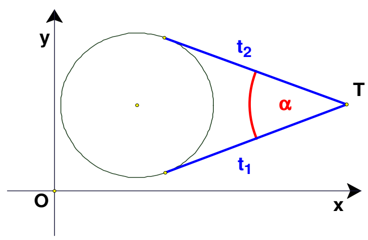
kut pravca i kružnice je kut pravca i tangente na kružnicu u točki presjeka pravca i kružnice

kut između kružnica



ako se kružnice sijeku u točki D, tada je kut između njih u točki D kut između tangenata kružnica povučenih u točki D

pod kojim se kutom iz točke T vidi kružnica

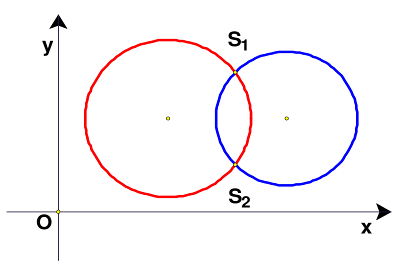


iz točke T povučemo tangente na kružnicu, tj. nađemo jednadžbe tih tangenata $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$

izračunamo kut između dva pravca (dvije tangente)

$$tg\,\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$$

presjek kružnica



traže se njihove zajedničke točke (ako postoje)
treba riješiti sustav jednadžbi

$$\left.\begin{array}{l} (x-p_1)^2 + (y-q_1)^2 = r_1^2 \\ (x-p_2)^2 + (y-q_2)^2 = r_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

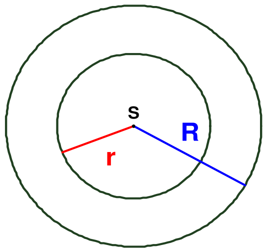
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{oduzmemo jednadžbe i dobijemo} \\ \text{linearnu jednadžbu} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{iz linearne jednadžbe izračunamo nepoznanicu x} \\ \text{(ili y) i uvrstimo u jednu od zadanih jednadžbi} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{nakon sređivanja dobijemo} \\ \text{kvadratnu jednadžbu} \end{array} \right):$$

- ako jednadžba ima dva realna rješenja, onda se kružnice sijeku
- ako jednadžba ima dvostruko realno rješenje, onda se kružnice dodiruju
- ako jednadžba ima konjugirano kompleksna rješenja, onda se kružnice ne sijeku niti dodiruju

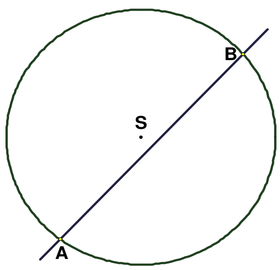
koncentrične kružnice



kružnice su koncentrične ako imaju zajedničko središte S(p, q)
r i R su polumjeri kružnica

$$\left.\begin{aligned}(x-p)^2+(y-q)^2&=r^2\\(x-p)^2+(y-q)^2&=R^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{koncentrične kružnice}$$

pravac i kružnica

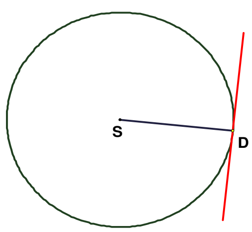


pravac i kružnica koji se nalaze u istoj ravnini mogu imati dvije zajedničke točke, jednu zajedničku točku ili nijednu
pravac siječe kružnicu u dvije točke, takav pravac zove se sekanta

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=r^2\\y&=k\cdot x+l\end{aligned}\right\}\Rightarrow r^2\cdot\left(1+k^2\right)>l^2$$

$$\left.\begin{aligned}(x-p)^2+(y-q)^2&=r^2\\y&=k\cdot x+l\end{aligned}\right\}\Rightarrow r^2\cdot\left(1+k^2\right)>(q-k\cdot p-l)^2$$

pravac i kružnica

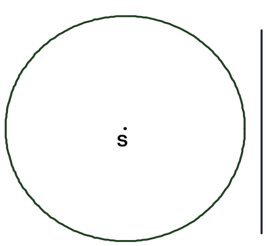


pravac siječe kružnicu u jednoj točki, takav pravac zove se tangenta

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=r^2\\y&=k\cdot x+l\end{aligned}\right\}\Rightarrow r^2\cdot\left(1+k^2\right)=l^2$$

$$\left.\begin{aligned}(x-p)^2+(y-q)^2&=r^2\\y&=k\cdot x+l\end{aligned}\right\}\Rightarrow r^2\cdot\left(1+k^2\right)=(q-k\cdot p-l)^2$$

pravac i kružnica

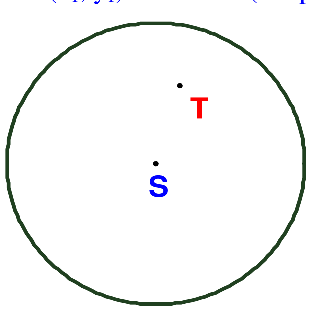


pravac ne siječe kružnicu

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=r^2\\y&=k\cdot x+l\end{aligned}\right\}\Rightarrow r^2\cdot\left(1+k^2\right)<l^2$$

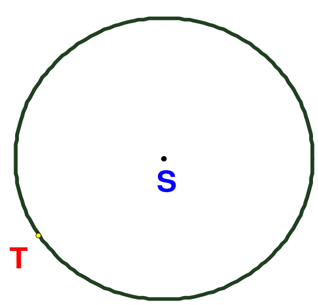
$$\left.\begin{aligned}(x-p)^2+(y-q)^2&=r^2\\y&=k\cdot x+l\end{aligned}\right\}\Rightarrow r^2\cdot\left(1+k^2\right)<(q-k\cdot p-l)^2$$

točka $T(x_1, y_1)$ i kružnica $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$



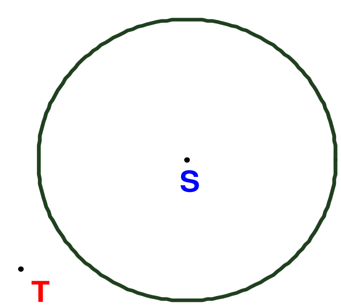
$(x_1-p)^2+(y_1-q)^2<r^2$

točka leži
unutar kružnice



$(x_1-p)^2+(y_1-q)^2=r^2$

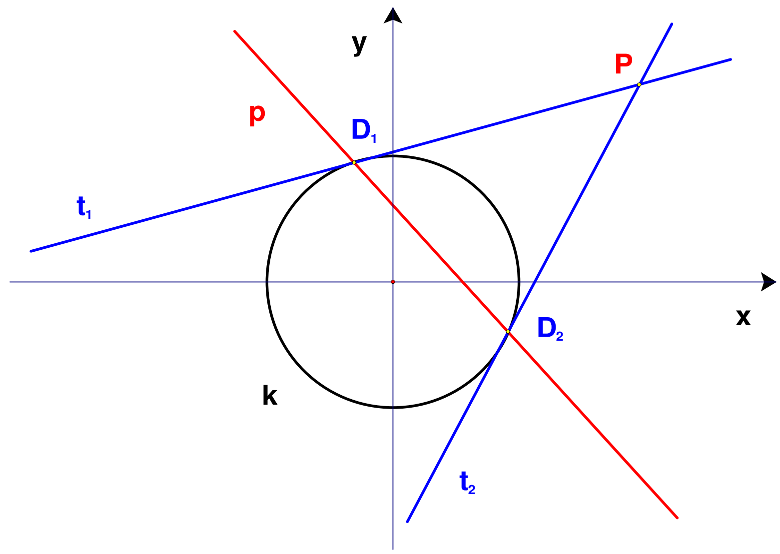
točka leži na kružnici



$(x_1-p)^2+(y_1-q)^2>r^2$

točka leži
izvan kružnice

pol i polara kružnice



Polara je spojnica dirališta D_1 i D_2 tangenata povučenih iz točke P na kružnicu k.
Pravac p je polara točke P s obzirom na kružnicu k.
Točka P je pol pravca p (polare) s obzirom na kružnicu k.
Jednadžba polare točke P s obzirom na kružnicu k glasi:

- $$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=r^2 \\ P\left(x_0,\ y_0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow x_0\cdot x+y_0\cdot y=r^2$$
- $$\left.\begin{array}{l} (x-p)^2+(y-q)^2=r^2 \\ P\left(x_0,\ y_0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(x_0-p\right)\cdot(x-p)+\left(y_0-q\right)\cdot(y-q)=r^2$$