



Težište trokuta

Branimir Dakić, Zagreb

Pojmu težišta u nastavi geometrije osnovne i srednje škole ne pridjeljuje se pozornost koja bi mu zbog njegove važnosti bila primjerena. Nešto se temeljitije težištem i raznim geometrijskim svojstvima vezanim uz njega bavimo u analitičkoj geometriji ravnine u trećem razredu srednje škole. Nije to baš najprirodnije mjesto, ali valja iskoristiti barem taj trenutak i težištem se pozabaviti malo detaljnije.

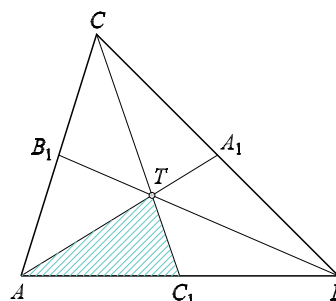
Evo jednog zadatka čije rješavanje povlači niz vrlo jednostavnih razmatranja, koja će, premda je zadatak srednjoškolski, zasigurno pobuditi interes i učitelja osnovnih škola.

Zadatak. Točke $A_1(3, 2)$ i $C_1(1, 1)$ polovišta su stranica \overline{BC} odnosno \overline{AB} trokuta $\triangle ABC$, točka $T(-1, 3)$ njegovo je težište. Kolika je površina trokuta $\triangle ABC$?

► Standardno zadatak rješavam na sljedeći način:

Točka A_1 polovište je stranice \overline{BC} , te je

zato $x_B + x_C = 6$. No $x_T = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$ i slijedi $x_A = -9$.



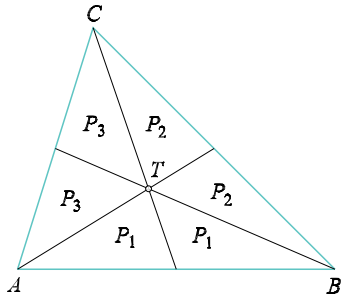
Sl. 1.

Analogno, jer je $y_B + y_C = 4$, iz $y_T = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$ slijedi $y_A = 5$.

Tako smo odredili točku $A(-9, 5)$.

Lako je sada odrediti i točke $B(11, -3)$ i $C(-5, 7)$, i zatim po formuli $P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$ izračunati površinu trokuta, $P = 36$. ◀

No, za rješanje zadatka bilo je dovoljno odrediti samo točku A . Naime, težišnice trokuta dijele trokut na šest malih trokuta koji imaju jednake površine.



Sl. 2.

Pogledajmo sliku. Točka T težište je trokuta. Očigledno vrijedi:

$$P_1 + 2P_2 = P_1 + 2P_3$$

i

$$P_2 + 2P_1 = P_2 + 2P_3.$$

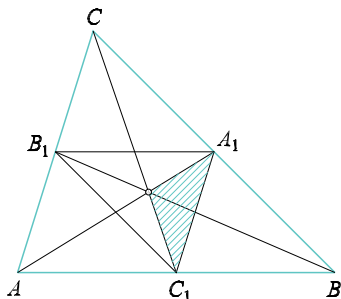
Iz prve jednakosti slijedi $P_2 = P_3$, a iz druge $P_1 = P_2$. No onda je i $P_1 = P_3$.

Kako je $P(\triangle AC_1T) = 6$, to je $P(\triangle ABC) = 6 \cdot P(\triangle AC_1T) = 36$.

No, sigurno je već ranije dokazano:

Ako su A_1, B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{AC},$ odnosno \overline{AB} trokuta $\triangle ABC$, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ imaju isto težište.

To je vrlo lijep i jednostavan zadatak. Osobito ga je jednostavno riješiti analitički. Evo kako:



Sl. 3.

Najprije odredimo

$$A_1 \left(\frac{1}{2}(x_B + x_C), \frac{1}{2}(y_B + y_C) \right),$$

$$B_1 \left(\frac{1}{2}(x_A + x_C), \frac{1}{2}(y_A + y_C) \right),$$

$$C_1 \left(\frac{1}{2}(x_A + x_B), \frac{1}{2}(y_A + y_B) \right).$$

Zatim odredimo težište T_1 trokuta $\triangle A_1B_1C_1$ i lako se uvjerimo da je to ista točka kao i težište trokuta $\triangle ABC$.

Ali onda smo naš zadatak s početka mogli riješiti izravno. Izračunamo površinu trokuta $\triangle A_1C_1T$, i njegova je površina jednaka $\frac{1}{3}$ površine trokuta $\triangle A_1B_1C_1$, odnosno $\frac{1}{12}$ površine trokuta $\triangle ABC$.

Zamijenite simbol odgovarajućom znamenkom!

8.

$$\begin{array}{l} \text{■ ■} \times \text{■} = \text{■ ■} \\ + \quad \times \quad = \quad : \\ \text{■ ■ ■} - \text{■} = \text{■ ■} \\ \hline \text{■ ■} + \text{■ ■} = \text{■ ■ ■} \end{array}$$

9.

$$\begin{array}{l} \text{◆ ■} \times \text{◆} = \text{■ ■ ■} \\ + \quad + \quad = \quad : \\ \text{■} \times \text{■ ■ ■} = \text{■ ■ ■ ■} \\ \hline \text{◆ ■ ■} - \text{◆ ■} = \text{■ ■} \end{array}$$

10.

$$\begin{array}{l} \text{■ ■} \times \text{■ ■ ■} = \text{■ ■} \\ \times \quad \times \quad = \quad + \\ \text{■ ■} + \text{■} = \text{■ ■} \\ \hline \text{■ ■ ■} - \text{■ ■} = \text{■ ■ ■} \end{array}$$